Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

# Existência de Soluções Não-negativas para uma Classe de Equações de Schrödinger Semilineares

**por**

**Jairo Santos da Silva** †

**sob a orientação do**

**Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo**

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

† Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq

# Existência de Soluções Não-negativas para uma Classe de Equações de Schrödinger Semilineares

**por**

**Jairo Santos da Silva**

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

**Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo** - UFPB (Orientador)

**Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado** - UnB

**Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó** - UFPB

**Universidade Federal da Paraíba**
**Centro de Ciências Exatas e da Natureza**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**
**Curso de Mestrado em Matemática**

**Fevereiro/2009**

# Agradecimentos


- A Deus acima de tudo, pois Ele supriu todas as minhas necessidades durante esses dois anos e me fez alcançar mais esta vitória.

- Ao meu Orientador, Professor Uberlandio Batista Severo, pelos conselhos, incentivo, empenho e amizade dedicados durante todo o período em que me orientou. Agradeço, também, pela paciência e confiança depositada na minha pessoa, bem como, pela enorme contribuição não só no meu crescimento intelectual, mas também, para o meu progresso social. Em fim, sou grato a Uberlandio pelo maravilhoso trabalho de orientação, pois cresci muito com os seus ensinamentos.

- Ao Professor Everaldo Souto de Medeiros, que foi meu orientador durante um ano do mestrado. Fica aqui o meu muito obrigado ao amigo e professor Everaldo.

- A minha família, pelo apoio e incentivo, sem os quais seria difícil enfrentar essa jornada e, em especial, à minha noiva Eusiene pela força, paciência, compreensão, incentivo e amor dedicados durante esse período que passamos longe um do outro.

- Aos professores da pós-graduação, que contribuiram de forma essencial para a minha formação.

- Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPB por ter me concedido a oportunidade de participar do mesmo. Agradeço também aos funcionários da Secretaria da PG-Mat pela atenção e cordialidade.

- Aos colegas de curso e amigos, Marcos Aurélio, Gerson, Diogo, Antônio, Felipe, José Francisco, Osvaldo, Joedson, Andréia, Haline e Tarciana, pelo companheirismo e momentos que estudamos juntos. Em especial, queria agradecer ao meu amigo Robson, pela convivência e paciência durante esses dois anos e ao meu amigo Jackson pelas muitas noites de estudos, incentivo e amizade. Sucesso a todos!

- A todos aqueles que de forma direta ou indireta contribuiram para a realização deste trabalho e que lamentavelmente não me recordo neste momento.

- Enfim, a CNPq pelo apoio financeiro.

# Dedicatória

*A minha amada noiva Eusiene, a minha família e aos professores Uberlandio Batista Severo, Everaldo Souto de Medeiros e Marcos Antônio F. de Araujo.*

# Resumo

Neste trabalho, estudamos questões relacionadas a existência de soluções fracas não-negativas para uma classe de equações de Schrödinger semilineares da forma

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde $N \geq 2$, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Na obtenção de nossos resultados, dependendo do comportamento do potencial $V(x)$ e da não-linearidade $f(u)$, utilizamos diferentes métodos, a saber os variacionais, tais como, Princípio Variacional de Ekeland, decomposição de sequências de Palais-Smale limitadas e argumentos de concentração de compacidade.

**Palavras-Chave:** Equação de Schrödinger, Métodos Variacionais, Princípio Variacional de Ekeland, Sequências de Palais-Smale Limitadas, Sequência de Cerami, Assintoticamente Linear, Concentração de Compacidade, Problemas Elípticos, Existência de Solução.

# Abstract

In this work, we study questions related to existence of nonnegative weak solutions for a class of semilinear Schrödinger equations of the form

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

where $N \geq 2$, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. To obtain our results, depending on the behavior of the potential $V(x)$ and the the nonlinearity $f(u)$, we using different methods, namely, the variationals methods, such as, Ekeland's Variational Principle, decomposition of bounded Palais-Smale sequences and also arguments of concentration compactness.

**Key-Words:** Schrödinger Equation, Variationals Methods, Ekeland's Variational Principle, Bounded Palais-Smale Sequences, Cerami Sequence, Asymptotically Linear, Concentration Compactness, Elliptics Problems, Existence of Solution.

# Sumário

# Notações

**Notações Gerais**

| | |
|---|---|
| $B_\delta(x)$ | bola fechada de centro $x$ e raio $\delta$, |
| $B_\delta^C(x)$ | complementar da bola fechada de centro $x$ e raio $\delta$, |
| $\rightharpoonup$ | convergência fraca, |
| $\hookrightarrow$ | indica imersão, |
| $\|A\|$ | medida de Lebesgue de um conjunto $A$, |
| q.t.p. | quase toda parte, |
| $f'$ | denota a derivada de Gâteaux e derivada de Fréchet da função $f$, |
| $\mathrm{supp} f$ | suporte da função $f$, |
| $\|\cdot\|$ | norma euclidiana, |
| $\mathrm{div}\, g$ | divergente de $g$, |
| $u_{x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ | denota a derivada parcial de $u$ em relação a sua i-ésima variável, |
| $u_{x_i x_j} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ | denota a derivada parcial de $u_{x_i}$ em relação a sua j-ésima variável, |
| $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ | gradiente de $u$, |

| | |
|---|---|
| $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ | laplaciano de $u$, |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$ | denota produto interno<br>e aplicação dualidade, |
| $C, C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots$ | denotam constantes positivas, |
| $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ | domínio no espaço $\mathbb{R}^N$, |
| $\overline{\Omega}$ | fecho do conjunto $\Omega$, |
| $\partial\Omega$ | fronteira de $\Omega$, |
| $p' = p/(p-1)$ | conjugado hölderiano de $p$, |
| $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} f$ | limite superior da função $f$<br>quando $n \to \infty$, |
| $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} f$ | limite inferior da função $f$<br>quando $n \to \infty$, |
| $\blacksquare$ | indica final de demonstração, |
| $f = o(g)$ quando $x \to x_0$ | se $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{\lvert f(x)\rvert}{\lvert g(x)\rvert} = 0$, |
| $p^*$ | expoente crítico de Sobolev<br>definido por<br>$p^* = \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p} & \text{se} \quad 1 \leq p < N, \\ \infty & \text{se} \quad p \geq N. \end{cases}$ |

**Espaços de Funções**

| | |
|---|---|
| $L^p(\Omega)$ | funções mensuráveis $u$ sobre $\Omega$ tais que $\int_\Omega \lvert u\rvert^p dx < \infty$, $1 \leq p < \infty$, |
| $L^\infty(\Omega)$ | funções mensuráveis $u$ sobre $\Omega$ tais que existe $C$ satisfazendo $\lvert u(x)\rvert \leq C$ q.t.p. sobre $\Omega$, |
| $C_0(\Omega)$ | funções contínuas com suporte compacto em $\Omega$, |
| $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ | semi-eixo real não-negativo, |
| $C^k(\Omega)$ | funções $k$ vezes continuamente diferenciáveis sobre $\Omega$, $k \in \mathbb{N}$, |
| $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 0} C^k(\Omega)$ | |
| $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ | |
| $C(\overline{\Omega})$ | funções contínuas sobre $\overline{\Omega}$, |
| $W^{1,p}(\Omega)$ | funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que existem $g_1, g_2, \ldots, g_N$ $\in L^p(\Omega)$ satisfazendo $\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega g_i\varphi dx$, $\forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall\, i = 1, \ldots, n$ com $1 \leq p \leq \infty$, |
| $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ | |
| $H \equiv H^1(\mathbb{R}^N)$ | |
| $H'$ | espaço dual de $H$, |
| $W^{m,p}(\Omega)$ | funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $\forall\, \alpha > 0$ com $\lvert\alpha\rvert \leq m$, existe $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ satisfazendo $\int_\Omega uD^\alpha\varphi dx =$ $= (-1)^{\lvert\alpha\rvert}\int_\Omega g_\alpha\varphi dx,\ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$, |
| $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ | |
| $W_0^{1,p}(\Omega)$ | o completamento de $C_0^1(\Omega)$ na norma de $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, |
| $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ | |

**Normas**

| | |
|---|---|
| $\|u\|_p = \left( \int_\Omega \|u\|^p \right)^{1/p}$ | norma do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$, |
| $\|\nabla u\|_p = \left( \int_\Omega \|\nabla u\|^p \right)^{1/p}$ | norma do espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, |
| $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = (\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2)^{1/2}$ | norma padrão do espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$, |
| $\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (\|\nabla u\|^2 + V(x)u^2)dx$ | norma equivalente à norma padrão do espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$. |

# Introdução

Neste trabalho, estudamos questões relativas a existência de soluções fracas não-negativas e não-triviais para a equação elíptica semilinear

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

onde $u \in H \equiv H^1(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 2$, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua denominada potencial e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua não-linear. Teremos, ainda, algumas hipóteses adicionais sobre as funçoes $V$ e $f$ ao longo deste trabalho.

Ao abordar a Equação (1), utilizamos métodos variacionais, ou seja, associamos a Equação (1) o funcional energia $I : H \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla u|^2 + V(x)u^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \quad \text{onde} \quad F(s) = \int_0^s f(t)dt, \tag{2}$$

e almejamos encontrar pontos críticos para $I$, que serão as soluções fracas de (1). No estudo do funcional $I$, as hipóteses adicionais sobre o potencial $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e sobre a não-linearidade $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ desempenham papéis importantes no que diz respeito a existência de pontos críticos para $I$ e, consequentemente, a existência de solução para a equação (1).

Equações do tipo (1) estão relacionadas a muitos problemas da física-matemática. Por exemplo, as soluções de (1) estão associadas à existência de soluções do tipo onda estacionária para equações de Schrödinger não-lineares da forma (para mais detalhes, confira, por exemplo, Berestycki-Lions [1], Liu-Wang [14], Rabinowitz [18] e Strauss [20])

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\Delta\varphi + W(x)\varphi - g(|\varphi|)\varphi, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $W : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é um potencial dado e $g$ é uma função real conveniente. Aqui, entendemos por uma onda estacionária (solução estacionária) uma função $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ do tipo

$$\varphi(t, x) = e^{iEt}u(x)$$

onde $E \in \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$.

Se considerarmos o potencial $V(x)$ constante, ou seja, se (1) é autônomo, Berestycki-Lions [1] (para $N \geq 3$) e Berestycki-Gallouët-Kavian [2] (para $N = 2$) determinaram um resultado de existência para uma classe ampla de não-linearidades. Em particular, este resultado vale para as não-linearidades assumidas neste trabalho.

Nosso trabalho é constituído de dois capítulos e dois apêndices.

No *capítulo 1*, apresentamos os resultados de existência para a equação (1) obtidos por Jeanjean-Tanaka [10], isto é, estudamos (1) com as seguintes hipóteses na não-linearidade $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$(f_1)$ $\lim\limits_{s\to 0^+} f(s)/s = f'(0)$ existe e, consequentemente, $f(0) = 0$;

$(f_2)$ Existe $1 < p < \infty$ se $N = 2$, $1 < p < (N+2)/(N-2)$ se $N \geq 3$ tal que

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s^p} = 0;$$

$(f_3)$ $\lim\limits_{s\to+\infty} f(s)/s = +\infty$.

Com respeito ao potencial $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, assumimos que:

$(V_1)$ $f'(0) < \inf \sigma(-\Delta + V(x))$, onde $\sigma(-\Delta + V(x))$ denota o espectro do operador auto-adjunto $-\Delta + V(x) : H^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ cujo o ínfimo do espectro pode ser caracterizado por (veja Brezis [4])

$$\inf \sigma(-\Delta + V(x)) = \inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx};$$

$(V_2)$ $V(x) \to V(\infty) \in \mathbb{R}$ quando $|x| \to \infty$;

$(V_3)$ $V(x) \leq V(\infty)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

$(V_4)$ Existam as derivadas parciais de $V(x)$ e uma função $\psi \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|x||\nabla V(x)| \leq \psi(x)^2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Podemos ainda assumir, como consequência das hipóteses acima, que

$(V_5)$ $f \geq 0$, $f'(0) \geq 0$, $\alpha_0 \equiv \inf \sigma(-\Delta + V(x)) > 0$ e $0 \leq f'(0) < \alpha_0$.

Uma das principais características apontadas, neste capítulo, é que produzimos um resultado de existência onde somente condições em $f(s)$ próximo de 0 e $\infty$ são requeridas, ou seja, não precisamos de condições globais em $f(s)$, tais como, a condição superlinear global de Ambrosetti-Rabinowitz (que é frequentemente assumida), a saber

$$\exists\, \mu > 2 \, : \, 0 < \mu \int_0^s f(\tau) d\tau \leq s f(s), \quad \text{para todo } \; s \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

O principal resultado deste capítulo 1 é o seguinte:

**Teorema 0.1** *Assuma* $N \geq 2$ *e que* $(f_1)$-$(f_3)$, $(V_1)$-$(V_4)$ *ocorram. Então* (1) *tem uma solução não-negativa não-trivial.*

Para provar o Teorema 0.1, associamos à equação (1) o funcional energia $I$ dado em (2) que devido a $(f_1)$, $(f_2)$, $(V_2)$ e $(V_5)$ está bem definido e é de classe $\mathcal{C}^1$ (veja Apêndice B). Primeiro, provamos que $I$ tem a geometria do Passo da Montanha (uma geometria PM em resumo), ou seja, definindo

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], H) \,|\, \gamma(0) = 0 \text{ e } I(\gamma(1)) < 0\},$$

temos que $\Gamma \neq \emptyset$ e
$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) > 0.$$
Para esta geometria, o Princípio Variacional de Ekland nos garante a existência de uma sequência de Palais-Smale (uma sequência (PS) em resumo) no nível $c$ do Passo da Montanha, isto é, uma sequência $\{u_n\} \subset H$ tal que
$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Na busca de um ponto crítico para $I$, um passo fundamental é mostrar a limitação de uma sequência deste tipo, que sob as hipóteses acima é algo desafiador. Visando superar tal dificuldade, usamos uma aproximação indireta desenvolvida em Jeanjean [8]. Desta forma, considerando $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$ e a família de funcionais $I_\lambda : H \to \mathbb{R}$ definida por
$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx,$$
mostramos que estes funcionais, também, terão uma geometria PM e denotando por $c_\lambda$ os correspondentes níveis PM temos como consequência de Jeanjean [8] que existe uma sequência $\{\lambda_j\} \subset [\frac{1}{2}, 1]$ tal que

(i) $\lambda_j \to 1$;

(ii) $I_{\lambda_j}$ tem uma sequência (PS) limitada $\{u_n^j\}$ no nível $c_{\lambda_j}$.

Posteriormente, verificamos que, para todo $j \in \mathbb{N}$, $\{u_n^j\}$ converge fracamente para um ponto crítico não-trivial $u_j$ de $I_{\lambda_j}$. Em seguida mostramos que $\{u_j\}$ é uma sequência (PS) limitada para $I$ e que, a menos de subsequência, converge fracamente para um ponto crítico não-trivial de $I$.

Os passos fundamentais para obter a limitação de $\{u_j\}$ é fazer uso da hipótese $(V_4)$ em $V$ e de um tipo de identidade de Pohozaev (dada no Apêndice B) que pode ser utilizada, justamente, porque $\{u_j\}$ é uma sequência de pontos críticos não-triviais de $I_{\lambda_j}$. Em virtude de precisarmos desta propriedade, usamos um processo de aproximação para obter uma sequência (PS) limitada para $I$, ao invés de argumentar diretamente de uma sequência (PS) arbitrária.

Por fim, para mostrar que a sequência limitada $\{u_j\}$ converge fracamente para um ponto crítico não-trivial de $I$ o "problema no infinito" associado à (1) (que é conhecido desde o trabalho de Lions [15, 16]), a saber
$$-\Delta u + V(\infty)u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$
desempenha um papel muito importante, já que, por meio dele, podemos usar os resultados (para problemas autônomos) de Berestycki-Lions [1] (para $N \geq 3$), Berestycki *et al.* [2] (para $N = 2$) e Jeanjean-Tanaka [11, 12] dados no Apêndice A. Outro resultado importante para obtermos o Teorema 0.1 foi o uso de uma decomposição para sequências (PS) limitadas (dada pelo Teorema 1.19) no espírito do trabalho pioneiro de Lions [15, 16]. Em virtude de assumirmos apenas condições fracas em $f$, em particular, $f$ pode não ser de classe $\mathcal{C}^1$, não podemos usar algumas das muitas decomposições encontrados na literatura (veja Coti-Rabinowitz [5] por exemplo).

No *capítulo 2*, apresentamos alguns resultados de existência para a equação (1) obtidos por Jeanjean-Tanaka [9], ou seja, estudamos a existência de soluções fracas para (1) sob o ponto de vista das seguintes hipóteses com respeito ao potencial $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$:

$(W_1)$ Existe $\alpha > 0$ tal que $V(x) \geq \alpha$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

$(W_2)$ $\lim\limits_{|x| \to \infty} V(x) = V(\infty) \in (0, \infty)$.

Em relação a não-linearidade $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pedimos as seguintes hipóteses:

$(g_1)$ $\lim\limits_{s \to 0^+} f(s)s^{-1} = 0$;

$(g_2)$ Existe $a \in (0, \infty)$ tal que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s} = a > \inf \sigma(-\Delta + V(x)),$$

onde $\sigma(-\Delta + V(x))$ denota o espectro do operador auto-adjunto

$$-\Delta + V(x) : H^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N).$$

As principais características do prolema (1), abordadas neste capítulo, são que a não-linearidade $f$ é assintoticamente linear e que o problema é autônomo no infinito. Por outro lado, a principal dificuldade encontrada neste problema, está relacionada ao fato de não existir compacidade na imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$. Visando superar está dificuldade, Jeanjean-Tanaka [9] utilizam a técnica de concentração de compacidade de Lions [15, 16], juntamente com o fato do problema ser autônomo no infinito.

Os principais resultados deste capítulo estão contidos nos seguintes teoremas:

**Teorema 0.2** *Suponha que* $(W_1)$, $(W_2)$, $(g_1)$, $(g_2)$ *ocorram e que* $F(s)$ *satisfaça a condição:*
$(g_3)$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\frac{2F(s)}{s^2} \leq V(\infty) - \delta \quad \textit{para todo} \quad s \in \mathbb{R}^+.$$

*Então* (1) *tem uma solução não-negativa não-trivial.*

**Teorema 0.3** *Assuma* $(W_1)$, $(W_2)$, $(g_1)$, $(g_2)$ *e que as condições, abaixo, sejam satisfeitas:*
$(W_3)$ $V(x) \leq V(\infty)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$;
$(g_4)$ *Definindo* $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *por* $G(s) = \frac{1}{2}f(s)s - F(s)$,
(i) $G(s) \geq 0$ *para todo* $s \geq 0$;
(ii) *Existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\frac{2F(s)}{s^2} \geq V(\infty) - \delta \Rightarrow G(s) \geq \delta.$$

*Então* (1) *tem uma solução não-negativa não-trivial.*

Para provar os Teoremas 0.2 e 0.3, associamos à equação (1) o funcional energia $I$ dado em (2) que devido a $(g_1)$, $(g_2)$, $(W_1)$ e $(W_2)$ está bem definido e é, também, de classe $\mathcal{C}^1$ (veja apêndice B). Em seguida, mostramos que $I$ tem geometria PM e usamos o Princípio Variacional de Ekeland para obter uma sequência de Cerami para $I$ no nível $c$ do Passo da Montanha, isto é, uma sequência $\{u_n\} \subset H$ tal que

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \|I'(u_n)\|_{H'}(1 + \|u_n\|) \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

onde $H'$ denota o espaço dual de $H$. Neste momento, para obter um resultado de existência para o problema (1) é suficiente mostrar que $\{u_n\}$ é limitada e, depois, que $\{u_n\}$ tem uma subsequência convergente cujo limite é um ponto crítico não-trivial de $I$.

Na maioria dos trabalhos, para mostrar a limitação de $\{u_n\}$, é usada a condição superlinear global de Ambrosetti-Rabinowitz (dada em (3)). Entretanto, em virtude de estarmos trabalhando com um problema assintoticamente linear, esta condição não poderá ser utilizada e isto se caracteriza como uma das nossas principais dificuldades.

Da mesma forma que em Jeanjean [8], provamos a limitação de $\{u_n\}$ como uma consequência da técnica de concentração de compacidade de Lions [15, 16].

Finalmente, para mostrar que a sequência limitada $\{u_n\}$ converge fracamente para um ponto crítico não-trivial de $I$ usamos novamente o "problema no infinito" associado à (1) e os resultados de Berestycki-Lions [1] (para $N \geq 3$), Berestycki *et al.* [2] (para $N = 2$).

No *apêndice A*, recordamos e demonstramos alguns resultados de problemas autônomos (que desempenham papéis fundamentais na obtenção de nossos resultados) estabelecidos por Berestycki-Lions [1] (para $N \geq 3$), Berestycki *et al.* [2] (para $N = 2$), assim como, alguns resultados devido a Jeanjean-Tanaka [11, 12].

No *apêndice B*, apresentamos e demonstramos alguns resultados complementares que serão utilizados ao longo deste trabalho.

Visando tornar os capítulos independentes e não necessitar recorrer sempre à introdução, enunciamos novamente, em cada capítulo, as hipóteses sobre a não-linearidade $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e sobre o potencial $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, bem como, os respectivos resultados principais.

# Capítulo 1

# Uma equação de Schrödinger com termo não-linear satisfazendo somente condições locais

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados de existência de solução fraca não-negativa não-trivial, encontrados em Jeanjean-Tanaka [10] , para uma classe de equações de Schrödinger semilineares da forma

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \tag{1.1}$$

onde $N \geq 2$ e assumimos que o termo não-linear $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua satisfazendo as seguintes condições:

$(f_1)$ $\lim\limits_{s \to 0^+} f(s)/s = f'(0)$ existe e, consequentemente, $f(0) = 0$;

$(f_2)$ Existe $1 < p < \infty$ se $N = 2$, $1 < p < (N+2)/(N-2)$ se $N \geq 3$ tal que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s^p} = 0;$$

$(f_3)$ $\lim\limits_{s \to +\infty} f(s)/s = +\infty$.

Sobre o potencial $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, assumimos que:

$(V_1)$ $f'(0) < \inf \sigma(-\Delta + V(x))$, onde $\sigma(-\Delta + V(x))$ denota o espectro do operador auto-adjunto $-\Delta + V(x) : H^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ cujo o ínfimo do espectro pode ser caracterizado por (veja Brezis [4])

$$\inf \sigma(-\Delta + V(x)) = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx};$$

$(V_2)$ $V(x) \to V(\infty) \in \mathbb{R}$ quando $|x| \to \infty$;

$(V_3)$ $V(x) \leq V(\infty)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

$(V_4)$ Existam as derivadas parciais de $V(x)$ e uma função $\psi \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|x||\nabla V(x)| \leq \psi(x)^2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Um cálculo direto nos mostra que a classe de funções $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(s) = s(k_1 \log(s+1) + k_2),$$

onde $k_1$ e $k_2$ são constantes positivas adequadas, satisfaz as hipóteses $(f_1) - (f_3)$ acima. Da mesma forma, podemos exibir os seguintes exemplos de potenciais $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ que satisfazem as hipóteses $(V_1) - (V_4)$ acima:

$$V(x) = A - \frac{k_3|x|^2}{1+|x|^{2\beta}},$$

onde $\beta > (N+2)/2$, $k_3$ é uma constante positiva e $A$ é uma constante positiva adequada.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

**Teorema 1.1** *Assuma $N \geq 2$ e que $(f_1)$-$(f_3)$, $(V_1)$-$(V_4)$ ocorram. Então (1.1) tem uma solução não-negativa não-trivial.*

**Observação 1.2** **(i)** *A condição $f(0) = 0$ nos diz que (1.1) possui uma solução trivial $u = 0$. Como estamos interessados em uma solução não-negativa não-trivial, podemos assumir, sem restrição, que $f(s) = 0$ para todo $s \leq 0$.*

**(ii)** *No caso em que $V(x) \equiv V(\infty)$, ou seja, quando (1.1) é autonômo, o* Teorema 1.1 *está contido no resultado de* Berestycki-Lions [1] *(veja também* Berestycki-Gallouët-Kavian [2]*).*

**(iii)** *Considerando, para uma constante $L \in \mathbb{R}$, $f + Ls$ e $V + L$ em vez de $f$ e $V$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que*

$$(\mathrm{V}_5) \quad f \geq 0,\ f'(0) \geq 0,\ \alpha_0 \equiv \inf \sigma(-\Delta + V(x)) > 0 \ \text{ e } \ 0 \leq f'(0) < \alpha_0.$$

*De fato, por $(f_1)$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\frac{f(s)}{s} > f'(0) - \varepsilon \quad \text{sempre que} \ \ 0 < s < \delta,$$

*ou ainda,*

$$f(s) + (\varepsilon - f'(0))s > 0 \quad \text{sempre que} \ \ 0 < s < \delta.$$

*Além disso, por $(f_3)$, dado $A > 0$, existe $R > 0$ tal que*

$$f(s) - As > 0 \quad \text{sempre que} \ \ s > R.$$

*Da continuidade de $f$, existe $K_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\frac{|f(s)|}{s} < K_\varepsilon \quad \text{sempre que} \ \ \delta \leq s \leq R,$$

*ou, equivalentemente,*

$$f(s) + K_\varepsilon s > 0 \quad \text{sempre que} \ \ \delta \leq s \leq R.$$

*Assim, tomando* $L = max\{\varepsilon - f'(0), K_\varepsilon\}$, *obtemos*

$$\widetilde{f}(s) = f(s) + Ls > 0 \quad \textit{sempre que} \quad s > 0.$$

*Podemos assumir também, como em* **(i)**, $\widetilde{f}(s) = 0$ *para todo* $s \leq 0$, *donde se conclui que* $\widetilde{f} \geq 0$. *Além disso, segue imediatamente de* $(f_1)$-$(f_3)$ *e* $(V_1)$-$(V_4)$ *que* $\widetilde{f}(s) = f(s) + Ls$ *e* $\widetilde{V}(x) = V(x) + L$ *satisfazem também* $(f_1)$-$(f_3)$ *e* $(V_1)$-$(V_4)$.
*Desse modo, usando que* $\widetilde{f} \geq 0$, *temos*

$$\widetilde{f}'(0) = \lim_{s \to 0^+} \frac{\widetilde{f}(s)}{s} \geq 0$$

*e por* $(V_1)$, *obtemos*

$$\widetilde{\alpha}_0 \equiv \inf \sigma(-\Delta + \widetilde{V}(x)) = \inf \sigma(-\Delta + V(x)) + L > f'(0) + L = \widetilde{f}'(0) \geq 0.$$

*Portanto, denotando ainda por* $f$ *a função* $\widetilde{f}$ *e por* $V$ *o potencial* $\widetilde{V}$ , *temos o resultado desejado.*

*Admitiremos a hipótese* $(V_5)$ *ao longo deste capítulo.*

**(iv)** *É imediato que a continuidade de* $V(x)$ *e* $(V_2)$ *nos asseguram que o potencial* $V$ *é limitado. Usaremos este fato ao longo deste trabalho.*

**(v)** *Afirmamos que* $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) \leq \alpha_0 \leq V(\infty)$. *De fato, por* $(V_2)$ *temos que o potencial* $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ *é limitado, e assim fica bem definido* $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x)$. *Além disso, para todo* $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \backslash \{0\}$, *temos*

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx < \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x) u^2 dx.$$

*Logo,*

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) < \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x) u^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx} \quad \textit{para todo} \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N) \backslash \{0\}.$$

*Assim, usando a definição de* $\alpha_0$, *concluímos que*

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) \leq \alpha_0.$$

*Por outro lado, usando novamente a definição de* $\alpha_0$ *e* $(V_3)$, *temos que*

$$\alpha_0 \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x) u^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx} \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx} + V(\infty) \quad \forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^N) \backslash \{0\}. \tag{1.2}$$

*Em particular, se* $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \backslash \{0\}$, *tomando* $v(x) = u(\lambda x)$ *(onde* $\lambda \in \mathbb{R}$*) então* $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \backslash \{0\}$. *Além disso, temos* $\nabla v(x) = \lambda \nabla u(\lambda x)$ *e fazendo a mudança de variável* $y = \lambda x$, *obtemos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x)|^2 dx = \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(\lambda x)|^2 dx = \frac{\lambda^2}{\lambda^N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^2 dy$$

*e*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u(\lambda x)|^2 dx = \frac{1}{\lambda^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^2 dy.$$

*Desse modo, tomando* $v \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ *em* (1.2), *tem-se*

$$\alpha_0 \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dx} + V(\infty) = \lambda^2 \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^2 dy}{\int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^2 dy} + V(\infty).$$

*Assim, fazendo* $\lambda \to 0$ *na desigualdade anterior, temos* $\alpha_0 \leq V(\infty)$, *como desejávamos.*

O Teorema 1.1 será provado usando métodos variacionais, isto é, associamos a (1.1) o funcional energia $I : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + V(x)u^2] dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx \quad \text{onde} \quad F(s) = \int_0^s f(t) dt,$$

e almejamos encontrar pontos críticos para $I$, que serão as soluções de (1.1).

Trabalharemos em $H^1(\mathbb{R}^N) \equiv H$ com a norma

$$\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dx.$$

Usaremos também a notação

$$\|u\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx\right)^{1/p} \quad \text{para todo } \ p \in [1, \infty).$$

**Observação 1.3** **(i)** *As condições* $(f_1)$ *e* $(f_2)$ *implicam que, para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $C_\varepsilon > 0$ *tal que*

$$|f(s)| \leq C_\varepsilon |s| + \varepsilon |s|^p \quad \textit{para todo} \ \ s \in \mathbb{R},$$

*onde* $1 < p < \infty$ *se* $N = 2$ *e* $1 < p < (N+2)/(N-2)$ *se* $N \geq 3$.
*Em particular,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(u)| dx \leq C_1 \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + C_2 \|u\|^{p+1}_{H^1(\mathbb{R}^N)} \quad \textit{para todo} \ \ u \in H,$$

*onde* $C_1$ *e* $C_2$ *são costantes positivas.*
*De fato, por* $(f_1)$, *dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$|f(s)| < (\varepsilon + f'(0))s \quad \textit{sempre que} \ \ 0 < s < \delta.$$

*Por outro lado, por* $(f_2)$, *existe* $R > 0$ *tal que*

$$|f(s)| < \varepsilon s^p \quad \textit{sempre que} \ \ s > R.$$

*Além disso, pela continuidade de* $f$, *existe* $K_\varepsilon > 0$ *tal que*

$$|f(s)| < K_\varepsilon s \quad \textit{sempre que} \ \ \delta \leq s \leq R,$$

*Assim, tomando* $C_\varepsilon = \max\{K_\varepsilon, \varepsilon + f'(0)\}$ *e usando o fato que* $f(s) = 0$ *para todo* $s \leq 0$ *(veja o item (i) da* Observação 1.2*), obtemos*

$$|f(s)| \leq C_\varepsilon |s| + \varepsilon |s|^p \quad \textit{para todo} \ \ s \in \mathbb{R}.$$

*Consequentemente,*

$$|F(s)| \leq \int_0^s |f(t)|dt \leq \frac{C_\varepsilon}{2}|s|^2 + \frac{\varepsilon}{p+1}|s|^{p+1},$$

*e como,* $H^1(\mathbb{R}^N)$ *está imerso continuamente em* $L^q(\mathbb{R}^N)$*, para* $2 \leq q < \infty$ *se* $N = 2$ *e* $2 \leq q \leq 2^*$ *se* $N \geq 3$*, obtemos*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |F(u)|dx &\leq \frac{C_\varepsilon}{2}\|u\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1} \\ &\leq C_1\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + C_2\|u\|^{p+1}_{H^1(\mathbb{R}^N)} \quad \text{para todo } \ u \in H, \end{aligned}$$

*onde* $C_1$ *e* $C_2$ *são costantes positivas que dependem da constante de imersão de Sobolev.*

**(ii)** *No* Lema 1.8*, mostramos que a norma*

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx$$

*é equivalente à norma usual de* $H^1(\mathbb{R}^N)$*. Usaremos essa equivalência ao longo deste capítulo.*

**(iii)** *Se* $u$ *é solução de* (1.1) *então* $u$ *é não-negativa. Com efeito, tomando a função* $u^- \equiv \max\{-u, 0\} \in H$*, obtemos*

$$\begin{aligned} 0 = I'(u)(-u^-) &= \int_{\mathbb{R}^N} [-(\nabla u^+ - \nabla u^-)\nabla u^- - V(x)(u^+ - u^-)u^-]dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u^- dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^-|^2 + V(x)(u^-)^2) + \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u^- dx, \end{aligned}$$

*onde* $u^+ \equiv \max\{u, 0\}$ *e* $u = u^+ - u^-$*. Desde que,* $f(s) = 0$ *quando* $s \leq 0$*, temos* $\int_{\mathbb{R}^N} f(u)u^- = 0$ *e assim*

$$\|u^-\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^-|^2 + V(x)(u^-)^2)dx = 0.$$

*Desse modo,* $u^- = 0$ *e, portanto,* $u = u^+ \geq 0$*.*

**(iv)** *Pela definição de* $\alpha_0$*, temos para todo* $u \in H$

$$\alpha_0\|u\|_2^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx.$$

## 1.1 Soluções para problemas aproximados

**Definição 1.4 (Geometria do Passo da Montanha)** *Seja* $X$ *um espaço de Banach e denote por* $X'$ *seu espaço dual. Dizemos que um funcional* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ *possui uma geometria do Passo da Montanha, quando existem dois pontos* $v_1, v_2 \in X$ *tais que, fixando*

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X), \gamma(0) = v_1, \ \gamma(1) = v_2\}$$

*temos*

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) > \max\{I(v_1), I(v_2)\}$$

**Definição 1.5 (Sequência de Palais-Smale)** *Seja $X$ um espaço de Banach, $X'$ seu espaço dual e $I$ um funcional de classe $C^1(X,\mathbb{R})$. Uma sequência de Palais-Smale para $I$ (uma sequência (PS) para abreviar) é uma sequência $\{u_n\} \subset X$ satisfazendo*

$$\{I(u_n)\} \text{ é limitada e } I'(u_n) \to 0 \text{ em } X'.$$

*Além disso, se*

$$I(u_n) \to c \text{ e } I'(u_n) \to 0 \text{ em } X'$$

*dizemos que $\{u_n\} \subset X$ é uma sequência (PS) para $I$ no nível $c \in \mathbb{R}$.*

Consideremos $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$ e a família de funcionais $I_\lambda : H \to \mathbb{R}$ definida por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx.$$

Nosso objetivo nesta seção é provar que para quase todo $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$, $I_\lambda$ possui um ponto crítico não-trivial $u_\lambda$ tal que $I_\lambda(u_\lambda) \leq c_\lambda$, onde

$$c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma_\lambda} \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) > 0$$

e

$$\Gamma_\lambda = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], H) \,|\, \gamma(0) = 0 \text{ e } I_\lambda(\gamma(1)) < 0\}.$$

Nosso primeiro passo será mostrar que para quase todo $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$, $I_\lambda$ possui uma sequência (PS) no nível $c_\lambda$. Para este propósito, usaremos o seguinte resultado abstrato de [8] (veja Teorema 1.1 em Jeanjean [8]):

**Teorema 1.6** *Seja $X$ um espaço de Banach munido com a norma $\|\cdot\|_X$ e seja $J \subset \mathbb{R}^+$ um intervalo. Consideremos uma família $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$ de funcionais de classe $C^1$ em $X$ da forma*

$$I_\lambda(u) = A(u) - \lambda B(u) \quad \text{para } \lambda \in J,$$

*onde $B(u) \geq 0$ para todo $u \in X$ e tais que $A(u) \to +\infty$ ou $B(u) \to +\infty$ quando $\|u\|_X \to \infty$. Suponha que existem dois pontos $v_1, v_2$ em $X$ tais que*

$$c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) > \max\{I_\lambda(v_1), I_\lambda(v_2)\} \quad \forall\, \lambda \in J,$$

*onde*

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], X) \,|\, \gamma(0) = v_1, \gamma(1) = v_2\}.$$

*Então, para quase todo $\lambda \in J$, existe uma sequência $\{v_n\} \subset X$ tal que*

**(i)** *$\{v_n\}$ é limitada,*

**(ii)** *$I_\lambda(v_n) \to c_\lambda$,*

**(iii)** *$I'_\lambda(v_n) \to 0$ no espaço dual $X'$ de $X$.*

**Observação 1.7** *No* Lema 2.3 *de* Jeanjean [8] *está também provado que, sob as hipóteses do* Teorema 1.6, *a aplicação $\lambda \to c_\lambda$ é contínua à esquerda.*

Usaremos o Teorema 1.6 com $X = H$, $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, $J = [\frac{1}{2}, 1]$. Para mostrarmos que as hipóteses deste Teorema são satisfeitas, precisaremos dos seguintes lemas:

**Lema 1.8** *Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $c_\varepsilon > 0$ tal que*

$$c_\varepsilon \|\nabla u\|_2^2 + (\alpha_0 - \varepsilon)\|u\|_2^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx \quad \textit{para todo} \;\; u \in H.$$

*Em particular sob $(V_2)$ e $(V_5)$, a norma*

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) dx$$

*é equivalente à norma $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$.*

**Prova.** Para $\delta \in (0, 1)$, definamos

$$\mu_\delta = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} (1-\delta)|\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx}{\|u\|_2^2}.$$

Desde que

$$\inf_{\mathbb{R}^N} V(x) \leq V(x) \quad \text{para todo} \;\; x \in \mathbb{R}^N,$$

temos

$$\inf_{\mathbb{R}^N} V(x) \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 \quad \text{para todo} \;\; u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}.$$

Assim, para todo $\delta \in (0, 1)$ e para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$, obtemos

$$\inf_{\mathbb{R}^N} V(x) \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2}{\|u\|_2^2} < \frac{\int_{\mathbb{R}^N} (1-\delta)|\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx}{\|u\|_2^2}.$$

Portanto,

$$\mu_\delta \geq \inf_{\mathbb{R}^N} V(x) > -\infty \quad \forall\, \delta \in (0, 1).$$

Para provarmos o lema, é suficiente mostrarmos que $\lim_{\delta \to 0} \mu_\delta \geq \alpha_0$, pois neste caso segue pela definição de limite que para todo $\varepsilon > 0$, existe $c_\varepsilon > 0$ tal que

$$\mu_{c_\varepsilon} > \alpha_0 - \varepsilon,$$

donde se conclui, pela definição de $\mu_{c_\varepsilon}$, que

$$\alpha_0 - \varepsilon < \frac{\int_{\mathbb{R}^N} (1-c_\varepsilon)|\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx}{\|u\|_2^2} \qquad \text{para todo} \;\; u \in H,$$

isto é,

$$c_\varepsilon \|\nabla u\|_2^2 + (\alpha_0 - \varepsilon)\|u\|_2^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx \quad \text{para todo} \;\; u \in H.$$

Mostremos então que $\lim_{\delta \to 0} \mu_\delta \geq \alpha_0$. Com efeito, pela definição de $\mu_\delta$, existe um $\widetilde{u}_\delta \in H\backslash\{0\}$, tal que

$$(1-\delta)\|\nabla \widetilde{u}_\delta\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\widetilde{u}_\delta^2 dx \leq (\mu_\delta + \delta)\|\widetilde{u}_\delta\|_2^2$$

ou, equivalentemente, existe $u_\delta = \widetilde{u}_\delta \|\widetilde{u}_\delta\|^{-1}_{H^1(\mathbb{R}^N)} \in H$ com $\|u_\delta\|_H = \|u_\delta\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 1$ tal que

$$\frac{(1-\delta)}{\|\widetilde{u}_\delta\|_H^2}\|\nabla \widetilde{u}_\delta\|_2^2 + \frac{1}{\|\widetilde{u}_\delta\|_H^2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\widetilde{u}_\delta^2 dx \le \frac{(\mu_\delta+\delta)}{\|\widetilde{u}_\delta\|_H^2}\|\widetilde{u}_\delta\|_2^2$$

ou ainda,

$$(1-\delta)\|\nabla u_\delta\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_\delta^2 dx \le (\mu_\delta+\delta)\|u_\delta\|_2^2. \tag{1.3}$$

Além disso, segue da Observação 1.3 (item (iv)) que

$$\alpha_0\|u_\delta\|_2^2 \le \|\nabla u_\delta\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_\delta^2 dx.$$

Logo, utilizando as duas desigualdades anteriores, obtemos

$$\alpha_0\|u_\delta\|_2^2 - \delta\|\nabla u_\delta\|_2^2 \le (\mu_\delta+\delta)\|u_\delta\|_2^2.$$

Consequentemente,

$$(\alpha_0 - \mu_\delta - \delta)\|u_\delta\|_2^2 \le \delta\|\nabla u_\delta\|_2^2 \le \delta\|u_\delta\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \delta.$$

Assim, se $\lim_{\delta\to 0}\mu_\delta < \alpha_0$, temos $\|u_\delta\|_2 \to 0$ quando $\delta \to 0$. Além disso, por (1.3), obtemos

$$(1-\delta)\|\nabla u_\delta\|_2^2 + \inf_{\mathbb{R}^N} V(x)\|u_\delta\|_2^2 \le (\mu_\delta+\delta)\|u_\delta\|_2^2$$

implicando que $\|\nabla u_\delta\|_2 \to 0$ quando $\delta \to 0$. Assim,

$$\|u_\delta\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla u_\delta\|_2^2 + \|u_\delta\|_2^2 \to 0 \quad \text{quando} \quad \delta \to 0,$$

contradizendo o fato que $\|u_\delta\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 1$. Portanto, $\lim_{\delta\to 0}\mu_\delta \ge \alpha_0$.

Em particular, como estamos admitindo $(V_2)$, segue que o potencial $V$ é limitado (veja item (iv) da Observação 1.2), isto é, existe $K > 0$ tal que $|V(x)| \le K$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Então, tomando $C_1 = \max\{1, K\}$, obtemos

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx \le \|\nabla u\|_2^2 + K\|u\|_2^2 \le C_1\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Por outro lado, por $(V_5)$ podemos escolher $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\alpha_0 - \varepsilon_0 > 0$ e tomando $C_2 = \min\{c_\varepsilon, \alpha_0 - \varepsilon_0\}$, resulta da primeira parte da demostração que

$$C_2\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \le c_\varepsilon\|\nabla u\|_2^2 + (\alpha_0 - \varepsilon)\|u\|_2^2 \le \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx = \|u\|^2,$$

donde segue a equivalência das normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$. ■

O lema seguinte assegura que $I_\lambda$ tem geometria do Passo da Montanha (geometria PM para resumir) cujo nível PM correspondente é denotado por $c_\lambda$.

**Lema 1.9** *Suponha que* $(f_1)$-$(f_3)$, $(V_1)$-$(V_3)$ *e* $(V_5)$ *ocorram. Então,*

**(i)** *Existe um* $v \in H\backslash\{0\}$, *com* $I_\lambda(v) \le 0$ *para todo* $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$;

**(ii)** $c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) > \max\{I_\lambda(0), I_\lambda(v)\}$ *para todo* $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$, *onde*

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], H) \,|\, \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\}.$$

**Prova.** Por $(f_3)$, dado $A > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$f(s) > As \quad \text{sempre que} \quad s > R.$$

Assim, tomando em particular $\tilde{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\tilde{u} \equiv 1$ em $B_1 \equiv B_1(0)$, obtemos

$$\begin{aligned} I_{1/2}(t\tilde{u}) &= \frac{1}{2}\|t\tilde{u}\|^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} F(t\tilde{u})dx \leq \frac{t^2}{2}\|\tilde{u}\|^2 - \frac{1}{2}\int_{B_1} F(t\tilde{u})dx \\ &= \frac{t^2}{2}\|\tilde{u}\|^2 - \frac{1}{2}\int_{B_1} F(t)dx = \frac{t^2}{2}\|\tilde{u}\|^2 - \frac{1}{2}F(t)|B_1| \\ &\leq \frac{t^2}{2}\|\tilde{u}\|^2 - \frac{t^2}{4}A|B_1| = \frac{t^2}{2}\left(\|\tilde{u}\|^2 - \frac{A}{2}|B_1|\right), \end{aligned}$$

sempre que $t > R$.

Desse modo, escolhendo $A > 2\frac{\|\tilde{u}\|^2}{|B_1|}$ e $t_0 > R$, existe $v = t_0\tilde{u} \in H\backslash\{0\}$ tal que $I_{1/2}(v) \leq 0$. Além disso, é imediato que

$$I_\lambda(v) \leq I_{1/2}(v) \leq 0 \qquad \forall\ \lambda \in [\frac{1}{2}, 1],$$

e assim **(i)** está provado.

Passemos agora a prova de **(ii)**. Primeiramente, por $(V_5)$ podemos escolher $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\alpha_0 - \varepsilon_0 > f'(0) \geq 0$ e pelo Lema 1.8, existe $c_{\varepsilon_0} > 0$ tal que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \\ &\geq \frac{1}{2}c_{\varepsilon_0}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}(\alpha_0 - \varepsilon_0)\|u\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx =: J_0(u) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Consideremos o problema autonômo

$$-\Delta u = h(u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

onde

$$h(s) = \begin{cases} \frac{1}{c_{\varepsilon_0}}[f(s) - (\alpha_0 - \varepsilon_0)s] & \text{se} \quad s \geq 0, \\ -h(-s) & \text{se} \quad s < 0. \end{cases}$$

Afirmamos que $h$ satisfaz as hipóteses $(h_1)$ e $(h_2)$ do Teorema A.2 do Apêndice A. De fato, por $(f_1)$ e pela definição de $h$, temos

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{h(s)}{s} = \frac{1}{c_{\varepsilon_0}}[f'(0) - (\alpha_0 - \varepsilon_0)] \in (-\infty, 0),$$

pois $\alpha_0 - \varepsilon_0 > f'(0)$ e assim obtemos $(h_1)$.

Por outro lado, segue de $(f_2)$ que existe $1 < p < (N+2)/(N-2)$, quando $N \geq 3$ tal que $\lim_{s\to+\infty} f(s)s^{-p} = 0$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 1$ tal que se $s > R > 1$ então

$$f(s) < \varepsilon s^p < \varepsilon s^{\frac{N+2}{N-2}}$$

ou seja, $\lim_{s\to+\infty} f(s)/s^{\frac{N+2}{N-2}} = 0$, o que nos dá pela definição de $h$

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{|h(s)|}{s^{\frac{N+2}{N-2}}} = \frac{1}{c_{\varepsilon_0}} \lim_{s\to+\infty} \frac{|f(s)-(\alpha_0-\varepsilon_0)s|}{s^{\frac{N+2}{N-2}}} = 0.$$

Quando $N = 2$ segue, ainda por $(f_2)$, que existe $1 < p < \infty$ tal que $\lim_{s\to+\infty} f(s)s^{-p} = 0$, donde obtemos

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{|h(s)|}{s^p} = \frac{1}{c_{\varepsilon_0}} \lim_{s\to+\infty} \frac{|f(s)-(\alpha_0-\varepsilon_0)s|}{s^p} = 0.$$

Desse modo, para todo $\alpha > 0$, existe $R_\alpha > 0$ tal que

$$|h(s)| \leq \alpha s^p \leq \alpha e^{\alpha s^2} \quad \text{sempre que} \quad s > R_\alpha.$$

Desde que $f$ é continua, $h$ também é continua, logo existe $K_\alpha > 0$ tal que

$$|h(s)| \leq k_\alpha \leq k_\alpha e^{\alpha s^2} \quad \text{sempre que} \quad 0 \leq s \leq R_\alpha.$$

Assim, tomando $C_\alpha = \max\{\alpha, k_\alpha\}$, temos

$$|h(s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2} \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R},$$

pois quando $s < 0$, temos, por definição, $|h(s)| = |-h(-s)| = |h(-s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2}$, e isto nos fornece $(h_2)$.

Portanto, pela Observação A.4 do Apêndice A, existem $C_1 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tais que

$$J(u) \geq C_1\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \quad \text{quando} \quad \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \delta_0,$$

onde

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(u)dx \quad \text{e} \quad H(s) = \int_0^s h(t)dt.$$

Daí, pela definição de $h$,

$$H(s) = \frac{1}{c_{\varepsilon_0}}[F(s) - (\alpha_0-\varepsilon_0)\frac{s^2}{2}]$$

implicando que

$$C_1\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq J(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{c_{\varepsilon_0}}\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx + \frac{1}{2c_{\varepsilon_0}}(\alpha_0-\varepsilon_0)\|u\|_2^2,$$

quando $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \delta_0$. Assim, multiplicando a desigualdade acima por $c_{\varepsilon_0}$, obtemos

$$J_0(u) = \frac{1}{2}c_{\varepsilon_0}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}(\alpha_0-\varepsilon_0)\|u\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \geq C_1 c_{\varepsilon_0}\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} > 0,$$

quando $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \delta_0$. Por (1.4), temos

$$J_0(u) \leq I_\lambda(u) \quad \text{para todo} \quad u \in H.$$

Em particular, pelo item **(i)**, existe $v \in H\backslash\{0\}$ tal que

$$J_0(v) \leq I_\lambda(v) \leq 0.$$

Portanto,

$$\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J_0(\gamma(t)) > 0,$$

donde obtemos

$$c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) \geq \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J_0(\gamma(t)) > 0 = \max\{I_\lambda(0), I_\lambda(v)\}, \quad \forall\, \lambda \in [\frac{1}{2}, 1],$$

o que prova **(ii)**. ■

**Observação 1.10** *Segue pelos* Lemas 1.8, 1.9 *e pelo* Teorema 1.6, *que $I_\lambda$ possui uma sequência (PS) limitada no nível $c_\lambda$ para quase todo $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$. Com efeito,*

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx = A(u) - \lambda B(u)$$

*satisfaz $\frac{1}{2}\|u\|^2 = A(u) \to +\infty$ quando $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to +\infty$ e $\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx = B(u) \geq 0$ para todo $u \in H$, visto que por $(V_5)$, $f \geq 0$. Além disso, pelo* Lema 1.9 *existem dois pontos $v_1 = 0$ e $v_2 = v$ em $H$ tais que*

$$c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) > \max\{I_\lambda(0), I_\lambda(v)\} \quad \forall\, \lambda \in J,$$

*onde*

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], X) \,|\, \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\}.$$

*Desse modo, tomando $X = H$, $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ e $J = [\frac{1}{2}, 1]$ segue pelo* Teorema 1.6 *que $I_\lambda$ possui uma sequência (PS) limitada $\{v_n\}$ no nível $c_\lambda$ para quase todo $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$.*

**Observação 1.11** *Sob as hipóteses $(f_1)$, $(f_2)$ e $(V_1)$ existe um $\delta_0 > 0$, independente de $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$, tal que*

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \geq \delta_0 \text{ para qualquer ponto crítico não-trivial } u \text{ de } I_\lambda.$$

*De fato, analogamente ao item (i) da* Observação 1.3 *por $(f_1)$ e $(f_2)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|f(s)| \leq (\varepsilon + f'(0))|s| + C_\varepsilon|s|^p \quad \text{para todo } \; s \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

*Agora , Por $(V_1)$, temos*

$$f'(0) < \inf\sigma(-\Delta + V(x)) = \inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}} \frac{\|u\|^2}{\|u\|_2^2}.$$

*Desse modo, existe $A > 0$ tal que*

$$f'(0) + A \leq \inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}} \frac{\|u\|^2}{\|u\|_2^2} \leq \frac{\|v\|^2}{\|v\|_2^2} \quad \text{para todo } \; v \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}.$$

*ou, equivalentemente,*

$$\|v\|_2^2 \leq \frac{\|v\|^2}{f'(0)+A} \quad \textit{para todo} \;\; v \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}. \tag{1.6}$$

*Observe que se $u$ é ponto crítico não-trivial de $I_\lambda$ ($\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$) então $u$ satisfaz*

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx,$$

*Consequentemente, usando (1.5), (1.6) e as imersões contínuas de Sobolev, temos*

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx \\ &\leq (\varepsilon + f'(0))\|u\|_2^2 + C_\varepsilon \|u\|_{p+1}^{p+1} \\ &\leq \frac{\varepsilon + f'(0)}{f'(0)+A}\|u\|^2 + C_\varepsilon \|u\|_{p+1}^{p+1} \\ &\leq \frac{\varepsilon + f'(0)}{f'(0)+A}\|u\|^2 + CC_\varepsilon \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^{p+1} \end{aligned}$$

*onde $C > 0$ é a constante de imersão. Por fim, tomando $\varepsilon > 0$ tal que*

$$C_1 = 1 - \frac{\varepsilon + f'(0)}{f'(0)+A} > 0$$

*e usando a equivalência das normas $\|.\|$ e $\|.\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, obtemos*

$$C_2 C_1 \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 \leq CC_\varepsilon \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^{p+1},$$

*onde $C_2 > 0$ é a constante de equivalência das normas $\|.\|$ e $\|.\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$. Portanto,*

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \geq \left(\frac{C_2 C_1}{CC_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p-1}} =: \delta_0 > 0,$$

*como desejávamos*

Sobre convergência de sequências de Palais-Smale limitadas temos o seguinte resultado:

**Lema 1.12** *Suponha que $(f_1)$-$(f_3)$, $(V_2)$, $(V_3)$ e $(V_5)$ ocorram e seja $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$ fixo, porém arbitrário. Então qualquer sequência de Palais-Smale limitada $\{u_n\}$ para $I_\lambda$ satisfazendo $\limsup_{n\to+\infty} I_\lambda(u_n) \leq c_\lambda$ e $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \nrightarrow 0$, após extrair uma subsequência, converge fracamente para um ponto crítico não-trivial $u_\lambda$ de $I_\lambda$ com $I_\lambda(u_\lambda) \leq c_\lambda$.*

**Prova.** Desde que $\{u_n\}$ é uma sequência de Palais-Smale limitada para $I_\lambda$, segue pelo Teorema 1.19 (veja também a Observação 1.20) que existe uma subsequência de $\{u_n\}$, ainda denotada $\{u_n\}$, um inteiro $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sequências $\{y_n^k\} \subset \mathbb{R}^N$ e funções $w_\lambda^k \in H$ para $1 \leq k \leq l$ tais que

**(i)** $u_n \rightharpoonup u_\lambda$ com $I'_\lambda(u_\lambda) = 0$,

**(ii)** $w_\lambda^k \neq 0$ e $I_\lambda^{\infty\prime}(w_\lambda^k) = 0$ para $1 \leq k \leq l$,

**(iii)** $\|u_n - u_\lambda - \sum_{k=1}^{l} w_\lambda^k(\cdot - y_n^k)\| \to 0$,

**(iv)** $I_\lambda(u_n) \to I_\lambda(u_\lambda) + \sum_{k=1}^{l} I_\lambda^\infty(w_\lambda^k)$,

onde no caso $l = 0$ os itens anteriormente mencionados ocorrem sem $w_\lambda^k$ e $\{y_n^k\}$.

Aqui, $I_\lambda^\infty : H \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda^\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(\infty)u^2)dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx$$

é o funcional associado ao "problema no infinito" ou "problema limite"

$$-\Delta u + V(\infty)u = \lambda f(u), \quad u \in H. \tag{1.7}$$

Pelo item **(i)**, para provar o lema, resta-nos mostrar que

**(1)** $I_\lambda(u_\lambda) \leq c_\lambda$;

**(2)** $u_\lambda \neq 0$.

É fácil ver que se $u$ é solução de (1.7) então $u$ é não-negativa (a prova desse fato é análoga a apresentada no item (iii) da Observação 1.3). Assim, podemos encarar as soluções de (1.7) como soluções do problema autônomo

$$-\Delta u = h(u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N) \tag{1.8}$$

onde

$$h(s) = \begin{cases} -V(\infty)s + \lambda f(s), & \text{se} \quad s \geq 0, \\ -h(-s), & \text{se} \quad s < 0. \end{cases}$$

Desse modo, uma solução de energia mínima de (1.8) – que podemos assumir positiva – é também uma solução de energia mínima de (1.7) e a recíproca também é verdadeira.

Note que $h$, assim definida, satisfaz as hipotéses dos Teoremas A.2 e A.3 do Apêndice A. De fato, $h$ é contínua e ímpar por definição e isto nos dá $(h_0)$. Além disso, por $(f_1)$ e pela definição de $h$, temos

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{h(s)}{s} = -V(\infty) + \lambda f'(0) \in (-\infty, 0)$$

visto que pelo item (v) da Observação 1.2 e por $(V_5)$ temos $V(\infty) \geq \alpha_0 > f'(0) \geq \lambda f'(0)$, o que garante $(h_1)$.

Por $(f_2)$, existe $1 < p < (N+2)/(N-2)$ quando $N \geq 3$ tal que $\lim_{s \to +\infty} f(s)s^{-p} = 0$. Desse modo, para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 1$ tal que se $s > R > 1$ então

$$f(s) < \varepsilon s^p < \varepsilon s^{\frac{N+2}{N-2}}$$

isto é, $\lim_{s \to +\infty} f(s)/s^{\frac{N+2}{N-2}} = 0$, implicando pela definição de $h$ que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{|h(s)|}{s^{\frac{N+2}{N-2}}} = \lim_{s \to +\infty} \frac{|-V(\infty)s + \lambda f(s)|}{s^{\frac{N+2}{N-2}}} = 0$$

e quando $N = 2$, segue ainda por $(f_2)$ que existe $1 < p < \infty$ tal que $\lim_{s\to+\infty} f(s)s^{-p} = 0$, donde obtemos

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{|h(s)|}{s^p} = \lim_{s\to+\infty} \frac{|-V(\infty)s + \lambda f(s)|}{s^p} = 0.$$

Logo, para todo $\alpha > 0$, existe $R_\alpha > 0$ tal que

$$|h(s)| \leq \alpha s^p \leq \alpha e^{\alpha s^2} \quad \text{sempre que} \quad s > R_\alpha.$$

Pela continuidade de $h$, existe $K_\alpha > 0$ tal que

$$|h(s)| \leq k_\alpha \leq k_\alpha e^{\alpha s^2} \quad \text{sempre que} \quad 0 \leq s \leq R_\alpha.$$

Assim, tomando $C_\alpha = \max\{\alpha, k_\alpha\}$, obtemos

$$|h(s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2} \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R},$$

pois quando $s < 0$, temos por definição $|h(s)| = |-h(-s)| = |h(-s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2}$ e isto nos garante que $h$ satisfaz $(h_2)$.

Finalmente, por $(f_3)$, para todo $A > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$f(s) > As \quad \text{sempre que} \quad s > R.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} H(s) &= \int_0^s h(t)dt = \int_0^s -V(\infty)t + \lambda f(t)dt \\ &> -V(\infty)\frac{s^2}{2} + \lambda A\frac{s^2}{2} = \frac{s^2}{2}(-V(\infty) + \lambda A). \end{aligned}$$

sempre que $s > R$. Logo, tomando $A > \frac{V(\infty)}{\lambda}$, existe $s_0 > 0$ ($s_0 > R$) tal que $H(s_0) > 0$.

Portanto, pelo Teorema A.2 do Apêndice A, obtemos

$$0 < m_\lambda^\infty = \inf\{I_\lambda^\infty(u) \,|\, u \in H\backslash\{0\} \text{ e } I_\lambda^{\infty\prime}(u) = 0\}$$

e assim, qualquer ponto crítico não-trivial $w_\lambda$ de $I_\lambda^\infty$ satisfaz

$$I_\lambda^\infty(w_\lambda) \geq m_\lambda^\infty > 0$$

e como $\limsup_{n\to+\infty} I_\lambda(u_n) \leq c_\lambda$ segue, pelos itens **(ii)** e **(iv)** acima, que

$$c_\lambda \geq \limsup_{n\to+\infty} I_\lambda(u_n) = I_\lambda(u_\lambda) + \sum_{k=1}^{l} I_\lambda^\infty(w_\lambda^k) \geq I_\lambda(u_\lambda), \tag{1.9}$$

onde obtemos a igualdade na primeira desigualdade de (1.9) quando $l = 0$, e assim **(1)** está provado.

Passemos agora à prova de **(2)**. Suponha que $u_\lambda = 0$ (o que implica $I_\lambda(u_\lambda) = 0$). Afirmamos que $l > 0$. Com efeito se $l = 0$ segue pelo item **(iii)** acima que $\|u_n\| = \|u_n - u_\lambda\| \to 0$ e como as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ são equivalentes, concluímos que

$\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to 0$, o que é uma contradição, já que por hipótese $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \not\to 0$. Assim, $l \geq 1$ e usando (1.9), obtemos

$$m_\lambda^\infty \leq l m_\lambda^\infty \leq \sum_{k=1}^{l} I_\lambda^\infty(w_\lambda^k) = I_\lambda(u_\lambda) + \sum_{k=1}^{l} I_\lambda^\infty(w_\lambda^k) \leq c_\lambda, \tag{1.10}$$

já que pelo item **(ii)** acima $w_\lambda^k \neq 0$ e $I_\lambda^{\infty\prime}(w_\lambda^k) = 0$ para $1 \leq k \leq l$ e isto implica que $0 < m_\lambda^\infty \leq I_\lambda^\infty(w_\lambda^k)$ para todo $1 \leq k \leq l$.

Por outro lado, também pelo Teorema A.2 do Apêndice A existe uma solução de energia mínima $\omega_\lambda$ de (1.7) e pelo Teorema A.3 do Apêndice A existe um caminho $\gamma \in \Gamma_\lambda^\infty$ tal que $\gamma(t)(x) > 0$ para todo $(t,x) \in (0,1] \times \mathbb{R}^N$, $\omega_\lambda \in \gamma([0,1])$ e

$$\max_{t\in[0,1]} I_\lambda^\infty(\gamma(t)) = c_\lambda^\infty = m_\lambda^\infty = I_\lambda^\infty(\omega_\lambda),$$

onde

$$\Gamma_\lambda^\infty = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1],H) \,|\, \gamma(0) = 0 \text{ e } I_\lambda^\infty(\gamma(1)) < 0\} \quad \text{e} \quad c_\lambda^\infty = \inf_{\gamma\in\Gamma_\lambda} \max_{t\in[0,1]} I_\lambda^\infty(\gamma(t)) > 0.$$

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $V \not\equiv V(\infty)$ em $(V_3)$ (do contrário, recairíamos no problema autonômo estudado por Berestycki-Lions [1] para $N \geq 3$ e Berestycki-Gallouët-Kavian [2] para $N = 2$, e assim, o Teorema 1.1 seria uma consequência imediata do Teorema A.2 (i) do Apêndice A). Portanto, existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $V(x_0) < V(\infty)$ e pela continuidade de $V$ existe $\delta > 0$ tal que

$$V(x) < V(\infty) \quad \text{para todo } \ x \in B_\delta(x_0),$$

donde concluímos que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) - I_\lambda^\infty(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} [V(x) - V(\infty)]u^2 dx \\ &= \int_{B_\delta(x_0)} [V(x) - V(\infty)]u^2 dx + \int_{B_\delta^C(x_0)} [V(x) - V(\infty)]u^2 dx \\ &< 0 \end{aligned}$$

para todo $u \not\equiv 0$ em $B_\delta(x_0)$, visto que por $(V_3)$, $V(x) \leq V(\infty)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e assim

$$\int_{B_\delta^C(x_0)} [V(x) - V(\infty)]u^2 dx \leq 0.$$

Em particular, como $\gamma(t)(x) > 0$ para todo $(t,x) \in (0,1] \times \mathbb{R}^N$, obtemos

$$I_\lambda(\gamma(t)) < I_\lambda^\infty(\gamma(t)) \quad \text{para todo } \ t \in ]0,1].$$

Consequentemente,

$$c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma_\lambda} \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) < \max_{t\in[0,1]} I_\lambda^\infty(\gamma(t)) = m_\lambda^\infty,$$

contradizendo assim (1.10). Portanto $u_\lambda \neq 0$ e **(2)** fica provado. ■

## 1.2 Prova do Teorema 1.1

Nesta seção, apresentaremos a prova do Teorema 1.1. Inicialmente usaremos o seguinte resultado:

**Observação 1.13** *Segue pela* Observação 1.10 *e pelo* Lema 1.12 *que $I_\lambda$ possui um ponto crítico não-trivial para quase todo $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$. De fato, a* Observação 1.10 *nos garante, para quase todo $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$, a existência de uma sequência de Palais-Smale limitada $\{u_n\}$ para $I_\lambda$ e que $I_\lambda(u_n) \to c_\lambda > 0$, o que implica $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \nrightarrow 0$ (caso contrário teríamos $u_n \to 0$ o que implicaria $I_\lambda(u_n) \to I(0) = 0$). Desse modo, as hipóteses do* Lema 1.12 *são satisfeitas donde se obtém o resultado desejado.*

*Em particular, existe uma sequência $\{(\lambda_j, u_j)\} \subset [\frac{1}{2}, 1] \times H$ com $\lambda_j \to 1$ e $u_j \neq 0$ satisfazendo $I'_{\lambda_j}(u_j) = 0$ e $I_{\lambda_j}(u_j) \leq c_{\lambda_j}$.*

O procedimento para a prova do Teorema 1.1 será o seguinte: primeiramente mostraremos que a sequência $\{u_j\} \subset H$ de pontos críticos não-triviais de $I_{\lambda_j}$ (obtida na seção anterior) é limitada. Depois, mostraremos que $\{u_j\}$ é uma sequência de Palais-Smale para $I$ satisfazendo

$$\limsup_{j \to +\infty} I(u_j) \leq c \ (c = c_1) \quad \text{e} \quad \|u_j\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \nrightarrow 0.$$

Então aplicaremos o Lema 1.12 (para $\lambda = 1$) obtendo assim um ponto crítico não-trivial de $I$ e isto completará a prova do Teorema 1.1.

Para mostrar a limitação de $\{u_j\} \subset H$, utilizaremos uma versão da identidade de Pohozaev (dada no Corolário B.10 do Apêndice B) para a sequência $\{(\lambda_j, u_j)\} \subset [\frac{1}{2}, 1] \times H$ obtida na seção anterior.

**Observação 1.14** **(i)** *Por $(f_3)$ e $(V_5)$, para qualquer $L > 0$ existe $C(L) > 0$ tal que*

$$f(s)s \geq Ls^2 - C(L) \quad \textit{para todo} \ \ s \geq 0.$$

*De fato, por $(f_3)$, para todo $L > 0$ existe $R(L) > 0$ tal que*

$$f(s)s > Ls^2 \quad \textit{sempre que} \ \ s > R(L).$$

*Como $f(s)s$ é contínua em $[0, R(L)]$, temos*

$$f(s)s \geq Ls^2 - C(L) \quad \textit{para todo} \ \ s \geq 0,$$

*como desejávamos.*

**(ii)** *Analogamente ao item (i) da* Observação 1.3 *por $(f_1)$ e $(f_2)$, para qualquer $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que*

$$|f(s) - f'(0)s||s| \leq \epsilon s^2 + C_\epsilon |s|^{p+1} \quad \textit{para todo} \quad s \geq 0.$$

**Proposição 1.15** *Assuma que $(f_1)$-$(f_3)$, $(V_1)$-$(V_5)$ ocorram. Então $\{u_j\} \subset H$ é limitada.*

**Prova.** Nosso primeiro passo será mostrar que $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 dx$ é limitada. Desde que $\lambda_j \in [\frac{1}{2}, 1]$, temos

$$I_{\lambda_j}(u) \leq I_{1/2}(u) \quad \text{para todo } \ u \in H \text{ e para todo } \ j \in \mathbb{N},$$

e como pela Observação 1.13, $I_{\lambda_j}(u_j) \leq c_{\lambda_j}$, obtemos

$$I_{\lambda_j}(u_j) \leq c_{\lambda_j} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_{\lambda_j}(\gamma(t)) \leq \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_{1/2}(\gamma(t)) = c_{1/2}. \tag{1.11}$$

Além disso, sendo $\{u_j\} \subset H$ uma sequência de pontos críticos não-triviais de $I_{\lambda_j}$ (veja Observação 1.13) segue, pelo Corolário B.10 do Apêndice B, que $u_j$ satisfaz

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 dx + \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_j^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla V(x) \cdot x u_j^2 dx - N\lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} F(u_j) dx = 0,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 dx &= N \left( \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_j|^2 + V(x) u_j^2) dx - \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} F(u_j) dx \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla V(x) \cdot x u_j^2 dx \\ &= N I_{\lambda_j}(u_j) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla V(x) \cdot x u_j^2 dx, \end{aligned}$$

donde obtemos, por (1.11) e pela desigualdade de Schwarz, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla V(x)||x| u_j^2 dx + c_{1/2} N.$$

Agora, por $(V_4)$, existe uma função $\psi \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|x||\nabla V(x)| \leq \psi(x)^2 \quad \text{para todo } \ x \in \mathbb{R}^N,$$

implicando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 \psi^2 dx + c_{1/2} N. \tag{1.12}$$

Neste momento, para provar a limitação de $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 dx$ é suficiente mostrar que $\int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 \psi^2 dx$ é limitada a medida que $j \to \infty$. Inicialmente, usando o item (i) da Observação 1.14, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_j) u_j \psi^2 dx \geq L \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 \psi^2 dx - C(L) \int_{\mathbb{R}^N} \psi^2 dx = L \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 \psi^2 dx - \widetilde{C}(L),$$

onde $0 < \widetilde{C}(L) = C(L) \int_{\mathbb{R}^N} \psi^2 dx < \infty$, pois $\psi \in L^2(\mathbb{R}^N)$.
Por outro lado, desde que $\lambda_j \in [\frac{1}{2}, 1]$ e $I'_{\lambda_j}(u_j)(\psi^2 u_j) = 0$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_j \nabla(\psi^2 u_j) dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_j^2 \psi^2 dx = \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} f(u_j) u_j \psi^2 dx,$$

a desigualdade anterior fica

$$\begin{aligned}
L\int_{\mathbb{R}^N} u_j^2\psi^2dx - \widetilde{C}(L) & \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_j)u_j\psi^2dx\\
&= \frac{1}{\lambda_j}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_j\nabla(\psi^2u_j)dx+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u_j^2\psi^2dx\right)\\
&\leq 2\left(\left|\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_j\nabla(\psi^2u_j)dx\right|+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u_j^2\psi^2dx\right). \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_j\nabla(\psi^2u_j)dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_j(2\psi\nabla\psi u_j+\psi^2\nabla u_j)dx\right|\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j|^2\psi^2dx+2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j||u_j||\psi||\nabla\psi|dx.
\end{aligned}$$

e como,

$$0\leq(|\nabla u_j||\nabla\psi|-|u_j||\psi|)^2=|\nabla u_j|^2|\nabla\psi|^2-2|\nabla u_j||u_j||\psi||\nabla\psi|+u_j^2\psi^2,$$

isto é,

$$2|\nabla u_j||u_j||\psi||\nabla\psi|\leq|\nabla u_j|^2|\nabla\psi|^2+u_j^2\psi^2,$$

podemos usar o fato que $\psi\in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ juntamente com (1.12) para concluir que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_j\nabla(\psi^2u_j)dx\right|\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j|^2\psi^2dx+\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j|^2|\nabla\psi|^2dx+\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\psi^2dx\\
&\leq (\|\psi\|_\infty^2+\|\nabla\psi\|_\infty^2)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j|^2dx+\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\psi^2dx\\
&\leq (\|\psi\|_\infty^2+\|\nabla\psi\|_\infty^2)\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\psi^2dx+c_{1/2}N\right)+\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\psi^2dx\\
&= \left[\frac{1}{2}(\|\psi\|_\infty^2+\|\nabla\psi\|_\infty^2)+1\right]\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\psi^2dx+(\|\psi\|_\infty^2+\|\nabla\psi\|_\infty^2)c_{1/2}N\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\psi^2dx+C,
\end{aligned}$$

onde $C=\max\{\frac{1}{2}(\|\psi\|_\infty^2+\|\nabla\psi\|_\infty^2)+1,(\|\psi\|_\infty^2+\|\nabla\psi\|_\infty^2)c_{1/2}N\}>0$.

Portanto, usando $(V_3)$ e as desigualdades acima, a expressão dada em (1.13) fica

$$\begin{aligned}
L\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\psi^2dx-\widetilde{C}(L) &\leq 2\left(C\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\psi^2dx+C+V(\infty)\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\psi^2dx\right)\\
&= (2C+2V(\infty))\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\psi^2dx+2C
\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$[L-(2C+2V(\infty))]\int_{\mathbb{R}^N} u_j^2\psi^2 dx \leq 2C+\widetilde{C}(L)$$

Assim, tomando $L$ tal que $L-(2C+2V(\infty))>0$, segue que $\int_{\mathbb{R}^N} u_j^2\psi^2 dx$ é limitada, donde se conclui, por (1.12), que $\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j|^2dx$ também é limitada.

Por fim, para provar que $\{u_j\}\subset H$ é limitada, resta mostrar que

$$\|u_j\|_2^2=\int_{\mathbb{R}^N} u_j^2\,dx$$

fica limitada a medida que $j\to\infty$. Argumentaremos por contradição, ou seja, assumiremos que $\|u_j\|_2^2\to\infty$, ou ainda, que $r_j\equiv\|u_j\|_2^{2/N}\to\infty$. Consideremos $\widetilde{u}_j(x)=u_j(r_jx)$. Assim, $\nabla\widetilde{u}_j(x)=r_j\nabla u_j(r_jx)$ e fazendo a mudança de variável $y=r_jx$, obtemos

$$\begin{aligned}\|\nabla\widetilde{u}_j\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\widetilde{u}_j(x)|^2dx=r_j^2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j(r_jx)|^2dx\\ &= \frac{r_j^2}{r_j^N}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j(y)|^2dy=r_j^{2-N}\|\nabla u_j\|_2^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|\widetilde{u}_j\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^N}|\widetilde{u}_j(x)|^2dx=\int_{\mathbb{R}^N}|u_j(r_jx)|^2dx\\ &= \frac{1}{r_j^N}\int_{\mathbb{R}^N}|u_j(y)|^2dy=\frac{1}{r_j^N}\|u_j\|_2^2=\frac{r_j^N}{r_j^N}=1.\end{aligned}$$

isto é,

$$\|\nabla\widetilde{u}_j\|_2^2=r_j^{2-N}\|\nabla u_j\|_2^2 \quad \text{e} \quad \|\widetilde{u}_j\|_2^2=1. \tag{1.14}$$

Em particular, $\{\widetilde{u}_j\}$ é uma sequência limitada em $H$, visto que $r_j\to\infty$, $N\geq 2$ e $\|\nabla u_j\|_2^2$ é limitada. Além disso, como $\{u_j\}\subset H$ é uma sequência de pontos críticos não-triviais de $I_{\lambda_j}$, dada $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, então $I'_{\lambda_j}(u_j)\varphi\left(\frac{\cdot}{r_j}\right)=0$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_j(y)\nabla\varphi\left(\frac{y}{r_j}\right)dy+\int_{\mathbb{R}^N}V(y)u_j(y)\varphi\left(\frac{y}{r_j}\right)dy=\lambda_j\int_{\mathbb{R}^N}f(u_j(y))\varphi\left(\frac{y}{r_j}\right)dy.$$

Fazendo novamente a mudança de variável $y=r_jx$, concluímos que

$$r_j^N\left[\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{r_j}\nabla u_j(r_jx)\nabla\varphi(x)+V(r_jx)u_j(r_jx)\varphi(x)dx\right]=\lambda_jr_j^N\int_{\mathbb{R}^N}f(u_j(r_jx))\varphi(x)dx$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{1}{r_j}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla\widetilde{u}_j(x)\nabla\varphi(x)dx+\int_{\mathbb{R}^N}V(r_jx)\widetilde{u}_j(x)\varphi(x)dx=\lambda_j\int_{\mathbb{R}^N}f(\widetilde{u}_j(x))\varphi(x)dx.$$

Logo, $\widetilde{u}_j$ satisfaz

$$-\frac{1}{r_j}\Delta\widetilde{u}_j+V(r_jx)\widetilde{u}_j=\lambda_jf(\widetilde{u}_j) \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \tag{1.15}$$

Agora, afirmamos que

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^N} \|\widetilde{u}_j\|^2_{L^2(B_1(z))} \equiv \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(z)} \widetilde{u}_j^2 dy \to 0 \quad \text{quando} \quad j \to \infty, \tag{1.16}$$

onde $B_1(z) = \{y \in \mathbb{R}^N \;:\; |y - z| \leq 1\}$. Observe que para provar a afirmação acima é suficiente mostrar que

$$\widetilde{u}_j(\cdot + z) \rightharpoonup 0 \quad \text{fracamente em } H^1(\mathbb{R}^N) \quad \text{para todo} \quad z \in \mathbb{R}^N, \tag{1.17}$$

pois se isto ocorrer, então $\widetilde{u}_j(\cdot + z) \to 0$ fortemente em $L^2(B_1)$ (onde $B_1 \equiv B_1(0)$), para qualquer $z \in \mathbb{R}^N$. Mas,

$$\int_{B_1} (\widetilde{u}_j(x + z))^2 dx \to 0 \quad \text{para todo} \;\; z \in \mathbb{R}^N$$

se, e somente se,

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(z)} (\widetilde{u}_j(y))^2 dy = \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1} (\widetilde{u}_j(x + z))^2 dx \to 0,$$

onde usamos a mudança de variável $y = x + z$ para obter a igualdade acima.

Mostremos então (1.17). Primeiro, por uma mudança de variável é imediado que $\|\widetilde{u}_j(\cdot + z)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|\widetilde{u}_j\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, e assim, $\{\widetilde{u}_j(\cdot + z)\} \subset H$ é limitada. Desse modo, após extrair uma subsequência, temos

$$\widetilde{u}_j(\cdot + z) \rightharpoonup \widetilde{u} \quad \text{fracamente em } H.$$

Agora, tomando $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e usando (1.15), obtemos

$$\frac{1}{r_j} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\widetilde{u}_j(y)\nabla\varphi(y - z)dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(r_j y)\widetilde{u}_j(y)\varphi(y - z)dy = \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} f(\widetilde{u}_j(y))\varphi(y - z)dy.$$

Fazendo a mudança de variável $y = x + z$, a expressão acima fica

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r_j} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\widetilde{u}_j(x + z)\nabla\varphi(x)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(r_j(x + z))\widetilde{u}_j(x + z)\varphi(x)dx \\ &\qquad = \;\; \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} f(\widetilde{u}_j(x + z))\varphi(x)dx. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Em virtude da desigualdade de Hölder, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\widetilde{u}_j(x + z)\nabla\varphi(x)dx \leq \|\nabla\widetilde{u}_j(\cdot + z)\|_2\|\nabla\varphi\|_2 \leq \|\widetilde{u}_j(\cdot + z)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\|\nabla\varphi\|_2 < C.$$

Desta forma, desde que $r_j \to \infty$, então

$$\frac{1}{r_j} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\widetilde{u}_j(x + z)\nabla\varphi(x)dx \to 0 \quad \text{quando} \quad j \to \infty. \tag{1.19}$$

Além disso, considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado tal que Supp$\varphi \subseteq \Omega$, a compacidade da imersão de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ (onde $p$ é dado em $(f_2)$) nos garante que

$\widetilde{u}_j(\cdot+z) \to \widetilde{u}$ fortemente em $L^{p+1}(\Omega)$. Assim, a menos de subsequência, existe $h \in L^{p+1}(\Omega)$ tal que
**(a)** $\widetilde{u}_j(x+z) \to \widetilde{u}(x)$ implicando que $f(\widetilde{u}_j(x+z))\varphi(x) \to f(\widetilde{u}(x))\varphi(x)$ q.t.p. em $\Omega$,
**(b)** $|\widetilde{u}_j(x+z)| \leq h(x)$ q.t.p. em $\Omega$.
Consequentemente, usando a Observação 1.3 (item (i)), segue que

$$\textbf{(c)} \qquad \begin{aligned} |f(\widetilde{u}_j(x+z))\varphi(x)| &\leq C_\varepsilon|\widetilde{u}_j(x+z)||\varphi(x)| + \varepsilon|\widetilde{u}_j(x+z)|^p|\varphi(x)| \\ &\leq C_\varepsilon h(x)|\varphi(x)| + \varepsilon h(x)^p|\varphi(x)| =: g(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \end{aligned}$$

Observe que $g \in L^1(\Omega)$. Com efeito, desde que $\Omega$ é compacto e $p+1 > 2$ então $L^{p+1}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ e assim $h \in L^{p+1}(\Omega)$ implica que $h \in L^2(\Omega)$. Logo, usando a desigualdade de Hölder, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |g(x)|dx &\leq C_\varepsilon \int_\Omega |h(x)||\varphi(x)|dx + \varepsilon \int_\Omega |h(x)|^p|\varphi(x)|dx \\ &\leq C_\varepsilon \|h\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\|h\|^p_{L^{p+1}(\Omega)}\|\varphi\|_{L^{p+1}(\Omega)} < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, pelos itens (a) e (c) acima, segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\widetilde{u}_j(x+z))\varphi(x)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} f(\widetilde{u}(x))\varphi(x)dx. \tag{1.20}$$

Observe ainda que em virtude de $r_j \to \infty$, temos que $|r_j(x+z)| = |r_j||x+z| \to \infty$ para $x \in \mathbb{R}^N$ fixado. Então, por $(V_2)$, $V(r_j(x+z)) \to V(\infty)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e de modo análogo ao que foi feito para obter (1.20), podemos concluir, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(r_j(x+z))\widetilde{u}_j(x+z)\varphi(x)dx \to V(\infty)\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{u}(x)\varphi(x)dx. \tag{1.21}$$

Agora, usando o fato que $\lambda_j \to 1$ e combinando (1.18)−(1.21), temos

$$V(\infty)\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{u}\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(\widetilde{u})\varphi dx \quad \text{para toda } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Logo, $\widetilde{u}$ satisfaz

$$V(\infty)\widetilde{u}(x) = f(\widetilde{u}(x)) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{1.22}$$

Além disso, note que $\xi = 0$ é uma solução isolada de $V(\infty)\xi = f(\xi)$, isto é, existe $\delta > 0$ tal que $\xi = 0$ é a única solução de $V(\infty)\xi = f(\xi)$ no intervalo $[0,\delta]$. Caso contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\xi_n \in (0, \frac{1}{n}]$, ou seja, $\xi_n \to 0^+$ tal que $V(\infty)\xi_n = f(\xi_n)$, ou ainda

$$\frac{f(\xi_n)}{\xi_n} = V(\infty).$$

Entretanto, usando as hipóteses $(f_1)$ e $(V_5)$ juntamente com o item (v) da Observação 1.2, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_n)}{\xi_n} = f'(0) < \alpha_0 \leq V(\infty),$$

o que é uma contradição. Desse modo, $\xi = 0$ é uma solução isolada de $V(\infty)\xi = f(\xi)$, e como $\widetilde{u} \in H$ e satisfaz (1.22) devemos ter $\widetilde{u} \equiv 0$, pois, definindo $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : \widetilde{u}(x) \neq 0\}$, segue que $|u(x)| \geq \delta$ para $x \in \Omega$ e para algum $\delta > 0$. Isto implica que $\Omega$ tem medida de Lebesgue nula, caso contrário, $\widetilde{u}$ teria um "salto" entre $\Omega$ e seu complemento, donde $\widetilde{u}$ não poderia estar em $H$. Assim,

$$\widetilde{u}_j(\cdot + z) \rightharpoonup \widetilde{u} \equiv 0,$$

o que prova (1.17) e, por conseguinte, (1.16).

Agora, em virtude de (1.16) e da limitação de $\{\widetilde{u}_j\} \subset H$, concluímos pelo Lema B.6 do Apêndice B que

$$\|\widetilde{u}_j\|_{p+1} \to 0 \quad \text{quando} \quad j \to \infty,$$

onde $p$ é dado em $(f_2)$. Como $u_j$ é ponto crítico de $I_{\lambda_j}$, temos $u_j \geq 0$ (veja item (iii) da Observação 1.3) e, portanto, $\widetilde{u}_j(x) = u_j(r_j x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Logo, usando o item (ii) da Observação 1.14 e o segundo resultado de (1.14), obtemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (f(\widetilde{u}_j) - f'(0)\widetilde{u}_j)\widetilde{u}_j dx \right| \leq \epsilon \|\widetilde{u}_j\|_2^2 + C_\epsilon \|\widetilde{u}_j\|_{p+1}^{p+1} = \epsilon + C_\epsilon \|\widetilde{u}_j\|_{p+1}^{p+1}.$$

Daí, como $\|\widetilde{u}_j\|_{p+1} \to 0$ quando $j \to \infty$ e $\epsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f(\widetilde{u}_j) - f'(0)\widetilde{u}_j)\widetilde{u}_j dx \to 0.$$

Além disso, multiplicando (1.15) por $\widetilde{u}_j$ e integrando, temos

$$\frac{1}{r_j} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \widetilde{u}_j|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(r_j x)\widetilde{u}_j^2 dx = \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} f(\widetilde{u}_j)\widetilde{u}_j dx,$$

Desse modo, usando a convergência acima juntamente com o fato que $\lambda_j \to 1$, podemos reescrever a expressão anterior da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_j}\|\nabla \widetilde{u}_j\|_2^2 &= -\int_{\mathbb{R}^N} (V(r_j x) - \lambda_j f'(0))\widetilde{u}_j^2 dx + \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} (f(\widetilde{u}_j) - f'(0)\widetilde{u}_j)\widetilde{u}_j dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} (V(r_j x) - V(\infty))\widetilde{u}_j^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} (V(\infty) - \lambda_j f'(0))\widetilde{u}_j^2 dx + o(1) \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} (V(r_j x) - V(\infty))\widetilde{u}_j^2 dx - (V(\infty) - \lambda_j f'(0))\|\widetilde{u}_j\|_2^2 + o(1)
\end{aligned}$$

e como $r_j \to \infty$, $\{\widetilde{u}_j\} \subset H$ é limitada, $\lambda_j \to 1$ e $\|\widetilde{u}_j\|_2^2 = 1$ (veja (1.14)), a expressão acima fica

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V(r_j x) - V(\infty))\widetilde{u}_j^2 dx = -(V(\infty) - f'(0)) + o(1). \tag{1.23}$$

Observe ainda que, usando $(V_2)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $R_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^N} (V(r_j x) - V(\infty))\widetilde{u}_j^2 dx \right| \\
&\qquad \leq \int_{B_{R_0}} |V(r_j x) - V(\infty)|\widetilde{u}_j^2 dx + \int_{B_{R_0}^C} |V(r_j x) - V(\infty)|\widetilde{u}_j^2 dx \\
&\qquad < \int_{B_{R_0}} |V(r_j x) - V(\infty)|\widetilde{u}_j^2 dx + \varepsilon \|\widetilde{u}_j\|_2^2 \\
&\qquad = \int_{B_{R_0}} |V(r_j x) - V(\infty)|\widetilde{u}_j^2 dx + \varepsilon
\end{aligned}$$

Novamente em virtude de $r_j \to \infty$, temos que $|r_j x| = |r_j||x| \to \infty$ para $x \in B_{R_0}$ fixado. Então, por $(V_2)$, $V(r_j(x)) \to V(\infty)$ q.t.p. em $B_{R_0}$ e utilizando argumentos semelhantes aos usados para obter (1.20), podemos concluir, por meio do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\int_{B_{R_0}} |V(r_j x) - V(\infty)| \widetilde{u}_j^2 dx \to 0.$$

Consequentemente, como $\varepsilon > 0$ (dado na última desigualdade) é arbitrário, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V(r_j x) - V(\infty)) \widetilde{u}_j^2 dx \to 0.$$

Logo, segue por (1.23) que

$$-(V(\infty) - f'(0)) = 0$$

o que é uma contradição, já que $(V_5)$ juntamente com o item (v) Observação 1.2 nos garantem que

$$f'(0) < \alpha_0 \leq V(\infty).$$

Portanto, $\|u_j\|_2^2$ é limitada e isto conclui a prova da proposição. ∎

**Observação 1.16** *Quando $N \geq 3$, podemos mostrar a limitação de $\|u_j\|_2^2$ diretamente. De fato, desde que para cada $j \in \mathbb{N}$, $u_j$ é ponto crítico de $I_{\lambda_j}$ ($\lambda_j \in [\frac{1}{2}, 1]$), obtemos $I'_{\lambda_j}(u_j)u_j = 0$, ou seja,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 + V(x) u_j^2 dx = \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} f(u_j) u_j dx. \tag{1.24}$$

*Por outro lado, como no item (i) da* Observação 1.3*, usando $(f_1)$ e $(f_2)$, para todo $\delta > 0$ existe $C_\delta > 0$ tal que*

$$f(s) \leq (f'(0) + \delta)s + C_\delta s^{(N+2)/(N-2)} \quad \textit{para todo} \;\; s \geq 0. \tag{1.25}$$

*Portanto, usando o item* (iv) *da* Observação 1.3, (1.24), (1.25) *e o fato que o espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ (isto é, $\|u\|_{2^*} \leq C\|\nabla u\|_2$), obtemos*

$$\begin{aligned}
\alpha_0 \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 + V(x) u_j^2 dx = \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} f(u_j) u_j dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_j) u_j dx \\
&\leq (f'(0) + \delta) \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 dx + C_\delta \int_{\mathbb{R}^N} u_j^{2^*} dx \\
&\leq (f'(0) + \delta) \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 dx + C_\delta \widetilde{C} \|\nabla u_j\|_2^{2^*}
\end{aligned}$$

*e como já temos a limitação de $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 dx$ basta, então, escolher $\delta$ tal que*

$$f'(0) + \delta < \alpha_0 = \inf \sigma(-\Delta + V(x)),$$

*isto é,* $\delta < \alpha_0 - f'(0)$ *(o que é possível por* $(V_5)$*) para que tenhamos a limitação de* $\|u_j\|_2^2$*. De fato, tomando* $\delta$ *como mencionado anteriormente, segue que* $K = \alpha_0 - (f'(0) + \delta) > 0$*. Assim, obtemos da desigualdade acima que*

$$K \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2 dx \leq C_\delta \widetilde{C} \|\nabla u_j\|_2^{2^*}$$

*e se* $\|u_j\|_2^2$ *não for limitada (isto é, a menos de subsequencia,* $\|u_j\|_2^2 \to \infty$*, quando* $j \to \infty$*), dividindo a desigualdade anterior por* $\|u_j\|_2^2$ *e fazendo* $j \to \infty$*, obteríamos* $0 < K \leq 0$*, o que é uma contradição.*

**Lema 1.17** *Assuma que* $(f_1)$*-*$(f_3)$*,* $(V_1)$*-*$(V_5)$ *ocorram. Então a sequência* $\{u_j\} \subset H$ *é uma sequência de Palais-Smale para* $I$ *satisfazendo* $\limsup_{n\to+\infty} I(u_j) \leq c$ *e* $\|u_j\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \nrightarrow 0$ *onde*

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) > 0$$

*e*

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], H) \,|\, \gamma(0) = 0 \ e \ I(\gamma(1)) < 0\}.$$

**Prova.** Pela Observação 1.13, $\{u_j\} \subset H$ satisfaz $I'_{\lambda_j}(u_j) = 0$ com $u_j \neq 0$. Assim, pela Observação 1.11 concluímos que $\|u_j\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \nrightarrow 0$.
Também pela Observação 1.13, $\{u_j\} \subset H$ satisfaz $I_{\lambda_j}(u_j) \leq c_{\lambda_j}$, donde se conclui pela definição de $I_\lambda$ que

$$\begin{aligned} I(u_j) &= I_{\lambda_j}(u_j) + (\lambda_j - 1) \int_{\mathbb{R}^N} F(u_j) dx \\ &\leq c_{\lambda_j} + (\lambda_j - 1) \int_{\mathbb{R}^N} F(u_j) dx \end{aligned} \tag{1.26}$$

onde $F(s) = \int_0^s f(t)dt$.
Além disso, pelo item (i) da Obsevação 1.3, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u_j) dx \leq C_1 \|u_j\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + C_2 \|u_j\|^{p+1}_{H^1(\mathbb{R}^N)},$$

onde $C_1$ e $C_2$ são costantes positivas, $1 < p < \infty$ se $N = 2$ e $1 < p < (N+2)/(N-2)$ se $N \geq 3$.

Portanto, como $\{u_j\} \subset H$ é limitada (veja Proposição 1.15) segue da desigualdade acima que $\int_{\mathbb{R}^N} F(u_j)dx$ também é limitada quando $j \to \infty$.

Agora, usando o fato que $\lambda_j \to 1$ (veja Observação 1.13) e que a aplicação $\lambda \to c_\lambda$ é contínua à esquerda (veja Observação 1.7) tem-se $\lim_{j\to\infty} c_{\lambda_j} = c_1 = c$. Assim, (1.26) nos mostra que

$$\limsup_{n\to+\infty} I(u_j) \leq c.$$

Por fim, para mostrar que $\{u_j\} \subset H$ é uma sequência de Palais-Smale para $I$, só nos resta provar que $\lim_{j\to\infty} I'(u_j) = 0$ no espaço dual $H'$ de $H$, ou ainda,

$$\lim_{j\to\infty} \|I'(u_j)\|_{H'} = \lim_{j\to\infty} \sup_{\|u\|_H \leq 1} |I'(u_j)u| = 0 \quad \text{onde} \quad u \in H \equiv H^1(\mathbb{R}^N).$$

Para isto, observemos inicialmente, pela definição de $I_\lambda$, que

$$\begin{aligned}
|I'(u_j)u| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_j \nabla u + V(x)u_j u dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_j)u dx\right| \\
&= \left|I'_{\lambda_j}(u_j)u + (\lambda_j - 1)\int_{\mathbb{R}^N} f(u_j)u dx\right| \\
&\leq |\lambda_j - 1| \int_{\mathbb{R}^N} |f(u_j)u| dx, \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

já que $I'_{\lambda_j}(u_j)u = 0$ (veja Observação 1.13). Por outro lado, segue também, pelo item (i) da Obsevação 1.3, que sob $(f_1)$-$(f_2)$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq C_\varepsilon |s| + \varepsilon |s|^p \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R},$$

onde $1 < p < \infty$ se $N = 2$ e $1 < p < (N+2)/(N-2)$ se $N \geq 3$.
Consequentemente, usando a desigualdade de Hölder e as imersões contínuas de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |f(u_j)u| dx &\leq C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u_j||u| dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^p |u| dx \\
&\leq C_\varepsilon \|u_j\|_2 \|u\|_2 + \varepsilon \|u_j\|_{p+1}^p \|u\|_{p+1} \\
&\leq C_3 \|u_j\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + C_4 \|u_j\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^p \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq C_3 \|u_j\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + C_4 \|u_j\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^p,
\end{aligned}$$

onde $C_3$ e $C_4$ são costantes positivas que dependem da constante de imersão.

Portanto, como $\{u_j\} \subset H$ é limitada, segue pela desigualdade acima que existe $M > 0$ tal que $\int_{\mathbb{R}^N} |f(u_j)u| dx \leq M$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, usando (1.27), obtemos

$$|I'(u_j)u| \leq M|\lambda_j - 1|.$$

Agora, desde que $\lambda_j \to 1$, dado $\epsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $j \geq j_0$ então

$$|I'(u_j)u| \leq M|\lambda_j - 1| < M\frac{\epsilon}{2M} = \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para toda } u \in H \ \text{ tal que } \|u\|_H \leq 1,$$

ou ainda,

$$\|I'(u_j)\|_{H'} = \sup_{\|u\|_H \leq 1} |I'(u_j)u| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \quad \text{sempre que} \ \ j \geq j_0,$$

donde concluímos que

$$\lim_{j\to\infty} \|I'(u_j)\|_{H'} = 0,$$

como desejávamos. ■

**Prova. (do Teorema 1.1).** Pela Proposição 1.15 e o Lema 1.17, a sequência $\{u_j\} \subset H$ satisfaz as hipóteses do Lema 1.12 para o caso $\lambda = 1$. Logo, $I$ possui um ponto crítico não-trivial $u$ (com $I(u) \leq c$) e isto prova o Teorema 1.1. ■

## 1.3 Uma solução de energia mínima

O objetivo desta seção é mostrar a existência de uma solução de energia mínima de (1.1) sob as hipóteses do Teorema 1.1. Este resultado está contido no seguinte teorema:

**Teorema 1.18** *Sob as hipóteses do* Teorema 1.1, (1.1) *tem uma solução de energia mínima. Mais precisamente, existe uma solução* $u_0 \in H$ *tal que* $I(u_0) = m$, *onde*

$$m = \inf\{I(u) \,|\, u \in H\backslash\{0\} \text{ e } I'(u) = 0\}.$$

**Prova.** Consideremos $\{u_n\} \subset H$ uma sequência de pontos críticos não-triviais para $I$ satisfazendo $I(u_n) \to m$. Observemos inicialmete que usando a Observação 1.11, temos $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \nrightarrow 0$. Além disso, desde que $\{I(u_n)\}$ é limitada superiormente podemos proceder como na prova da Proposição 1.15 para concluir que $\{u_n\} \subset H$ é limitada, isto é, existe $C > 0$ tal $\|u_n\| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, pelo item (i) da Observação 1.3 e pela equivalência das normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(u_n)|dx \leq C_1\|u_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + C_2\|u_n\|^{p+1}_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C_3,$$

onde $C_1$, $C_2$ e $C_3$ são costantes positivas. Consequentemente,

$$|I(u_n)| = \left|\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx\right| \leq \frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |F(u_n)|dx \leq C_4.$$

Portanto, $m > -\infty$ e $\{u_n\} \subset H$ é uma sequência de Palais-Smale (limitada) para o funcional $I$. Aplicando o Teorema 1.19 (veja também a Observação 1.20), existe uma subsequência de $\{u_n\}$, ainda denotada por $\{u_n\}$, um inteiro $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sequências $\{y_n^k\} \subset \mathbb{R}^N$ e funções $w_\lambda^k \in H$ para $1 \leq k \leq l$ tais que

**(i)** $u_n \rightharpoonup u_0$ com $I'(u_0) = 0$,

**(ii)** $w^k \neq 0$ e $I^{\infty\prime}(w^k) = 0$ para $1 \leq k \leq l$,

**(iii)** $\|u_n - u_0 - \sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k)\| \to 0$,

**(iv)** $I(u_n) \to I(u_0) + \sum_{k=1}^{l} I^\infty(w^k)$,

onde no caso $l = 0$ os itens anteriormente mencionados ocorrem sem $w^k$ e $\{y_n^k\}$.

Aqui, $I^\infty : H \to \mathbb{R}$ dado por

$$I^\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(\infty)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx.$$

é o funcional associado ao "problema no infinito"

$$-\Delta u + V(\infty)u = f(u), \quad u \in H.$$

Agora, seja $m^\infty$ o nível de energia mínima para $I^\infty$, ou seja,

$$m^\infty = \inf\{I^\infty(u) \,|\, u \in H\backslash\{0\} \text{ e } I^\infty(u) = 0\}.$$

Como na prova do Lema 1.12 assumimos que $V \not\equiv V(\infty)$ e, consquentemente, $c < m^\infty$ (tome o caso $\lambda = 1$ na prova do Lema 1.12). Além disso, na prova do Teorema 1.1 obtemos um ponto crítico não-trivial $u$ de $I$ satisfazendo $I(u) \leq c$. Desta forma,

$$m \leq I(u) \leq c < m^\infty. \tag{1.28}$$

Afirmamos que $u_0 \neq 0$. Com efeito, ainda como na prova do Lema 1.12, se $u_0 = 0$ (o que implica que $I(u_0) = 0$) então $l > 0$ (basta supor $l = 0$ e usar o item **(iii)** acima juntamente com o fato que $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \nrightarrow 0$ para chegar a uma contradição). Desse modo, $l \geq 1$ e usando a definição de $m^\infty$ junto com os itens **(ii)** e **(iv)** acima, obtemos

$$m = \lim_{n \to +\infty} I(u_n) = I(u_0) + \sum_{k=1}^{l} I^\infty(w^k) = \sum_{k=1}^{l} I^\infty(w^k) \geq l m^\infty \geq m^\infty$$

o que contradiz (1.28). Portanto $u_0 \neq 0$, como desejávamos. Agora, usando o item **(iv)** e a definição de $m$, podemos concluir por um lado que

$$m \leq I(u_0).$$

Por outro lado, também da prova do Lema 1.12, temos $m^\infty > 0$ (basta tomar o caso $\lambda = 1$) e, consequentemente, $I^\infty(w^k) \geq m^\infty > 0$ para cada $k \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Logo, segue pelo item **(iv)** que

$$m = I(u_0) + \sum_{k=1}^{l} I^\infty(w^k) \geq I(u_0),$$

implicando que $I(u_0) = m$ e isto conclui a prova do teorema. ■

## 1.4 Decomposição de sequências de Palais-Smale limitadas

Consideremos o funcional $I : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left( |\nabla u|^2 + V(x) u^2 \right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx.$$

onde assumimos que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ satisfaz

$(\mathrm{f}_1)'$ $\lim_{s \to 0^+} (f(s)/s) = 0$ e, consequentemente, $f(0) = 0$,

$(\mathrm{f}_2)'$ Existe $1 < p < \infty$ se $N = 1, 2$ e $1 < p < (N+2)/(N-2)$ se $N \geq 3$ tal que $\lim_{s \to \infty} f(s)|s|^{-p} = 0$,

$V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ satisfaz $(\mathrm{V}_2)$ e a seguinte condição:

$(\mathrm{V}_1)'$ $\alpha_0 = \inf \sigma(-\Delta + V(x)) > 0$.

O objetivo desta seção é fazer uma descrição das sequências de Palais-Smale limitadas de $I$ no espírito de Lions [15, 16]. Tralharemos em $H \equiv H^1(\mathbb{R}^N)$ com a norma

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x) u^2) dx,$$

que é equivalente à norma padrão do espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ (veja Lema 1.8), e com o produto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v + V(x)uv\, dx.$$

**Teorema 1.19** *Suponha que* $(\mathrm{f}_1)'$, $(\mathrm{f}_2)'$, $(\mathrm{V}_1)'$ *e* $(V_2)$ *ocorram e seja* $\{u_n\}$ *uma sequência de Palais-Smale limitada para* $I$. *Então existe uma subsequência de* $\{u_n\}$, *ainda denotada* $\{u_n\}$, *um inteiro* $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *sequências* $\{y_n^k\} \subset \mathbb{R}^N$ *e funções* $w_\lambda^k \in H$ *para* $1 \leq k \leq l$ *tais que*

**(i)** $u_n \rightharpoonup u_0$ *com* $I'(u_0) = 0$;

**(ii)** $|y_n^k| \to \infty$ *e* $|y_n^k - y_n^{k'}| \to \infty$ *para* $k \neq k'$;

**(iii)** $w^k \neq 0$ *e* $I^{\infty\prime}(w^k) = 0$ *para* $1 \leq k \leq l$;

**(iv)** $\|u_n - u_0 - \sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k)\| \to 0$;

**(v)** $I(u_n) \to I(u_0) + \sum_{k=1}^{l} I^\infty(w^k)$,

*onde no caso* $l = 0$ *os itens anteriormente mencionados ocorrem sem* $w^k$ *e* $\{y_n^k\}$.

**Observação 1.20** *A decomposição obtida no* Teorema 1.19 *ainda é válida assumindo apenas que* $\alpha_0 > f'(0)$. *Para ver isto, é suficiente escrever* $I$ *na forma*

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + (V(x) - f'(0))u^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left(F(u) - \frac{1}{2}f'(0)u^2\right) dx.$$

*De fato, para o funcional* $I$ *dado acima, consideremos* $\widetilde{f}(s) = f(s) - f'(0)s$ *e* $\widetilde{V}(x) = V(x) - f'(0)$. *Observe que* $\widetilde{f}$ *e* $\widetilde{V}$, *assim definidos, satisfazem* $(\mathrm{f}_1)'$, $(\mathrm{f}_2)'$ *e* $(\mathrm{V}_1)'$. *Com efeito, por* $(\mathrm{f}_1)$ *temos claramente* $\widetilde{f}(0) = 0$ *e* $\lim_{s\to 0^+} \widetilde{f}(s)/s = 0$, *donde se obtém* $(\mathrm{f}_1)'$. *Além disso, como estamos assumindo* $f(s) = 0$ *para todo* $s \leq 0$ *segue por* $(\mathrm{f}_2)$ *que* $(\mathrm{f}_2)'$ *é satisfeita. Por fim, se* $\alpha_0 > f'(0)$ *obtemos*

$$\widetilde{\alpha}_0 \equiv \inf \sigma(-\Delta + \widetilde{V}(x)) = \inf \sigma(-\Delta + V(x)) - f'(0) = \alpha_0 - f'(0) > 0,$$

*e assim temos* $(\mathrm{V}_1)'$. *Desta forma, se* $\{u_n\}$ *é uma sequência de Palais-Smale limitada para* $I$, *a decomposição obtida pelo* Teorema 1.19 *ainda é verdadeira.*

**Observação 1.21** *Analogamente ao item (i) da* Observação 1.3, *sob* $(\mathrm{f}_1)'$ *e* $(\mathrm{f}_2)'$, *para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $C_\varepsilon > 0$ *tal que*

$$|f(s)| \leq \varepsilon|s| + C_\varepsilon|s|^p \quad \textit{para todo} \quad s \geq 0.$$

**Observação 1.22** *Sob as condições* $(\mathrm{f}_1)', (\mathrm{f}_2)'$ *e* $(\mathrm{V}_1)'$, *existe* $\rho_0 > 0$ *tal que*

$$\|u\| \geq \rho_0 \quad \textit{para qualquer ponto crítico não-trivial } u \textit{ de } I.$$

*A justificativa deste resultado é analóga a uma apresentada na* Observação 1.11.

**Prova. (do Teorema 1.19).** A prova será feita em cinco etapas.

**1ª etapa:** Mostremos, a menos de subsequência, que $u_n \rightharpoonup u_0$ com $I'(u_0) = 0$. De fato, desde que $\{u_n\} \subset H$ é limitada temos, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H$. Além disso, como $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H$, para provar que $I'(u_0) = 0$ é suficiente mostrar que $I'(u_0)\varphi = 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Dada $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, observe que

$$\begin{aligned} I'(u_n)\varphi - I'(u_0)\varphi = & \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n - u_0)\nabla\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_n - u_0)\varphi dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n) - f(u_0))\varphi dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $u_n - u_0 \rightharpoonup 0$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n - u_0)\nabla\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_n - u_0)\varphi = \langle u_n - u_0, \varphi\rangle \to 0,$$

e assim,

$$I'(u_n)\varphi - I'(u_0)\varphi + \int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n) - f(u_0))\varphi dx \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Desde que $\{u_n\} \subset H$ é uma sequência de Palais-Smale para $I$, temos $I'(u_n)\varphi \to 0$. Portanto, pela convergência acima, para provar que $I'(u_0)\varphi = 0$, basta mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n) - f(u_0))\varphi dx = 0.$$

Para isto, consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado tal que $\mathrm{Supp}\varphi \subseteq \Omega$. Como $\{u_n\} \subset H$ é limitada, a compacidade da imersão de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ implica que

$$u_n \to u_0 \text{ em } L^{p+1}(\Omega), \text{ pois } p+1 \in ]2, 2N/(N-2)[ \text{ se } N \geq 3 \text{ e } p+1 \geq 2 \text{ se } N = 1, 2.$$

Assim, a menos de subsequência, existe $h \in L^{p+1}(\Omega)$ tal que
**(a)** $u_n(x) \to u_0(x)$, implicando que $f(u_n(x))\varphi(x) \to f(u_0(x))\varphi(x)$ q.t.p. em $\Omega$,
**(b)** $|u_n(x)| \leq h(x)$ q.t.p. em $\Omega$.
Além disso, pela Observação 1.21, para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq \varepsilon|s| + C_\varepsilon|s|^p \quad \text{para todo} \quad s \geq 0.$$

Desse modo, pelo item (b) acima, obtemos

**(c)** $$\begin{aligned} |[f(u_n(x)) - f(u_0(x))]\varphi(x)| &\leq |f(u_n(x))\varphi(x)| + |f(u_0(x))\varphi(x)| \\ &\leq \varepsilon|u_n(x)||\varphi(x)| + C_\varepsilon|u_n(x)|^p|\varphi(x)| \\ &\quad + \varepsilon|u_0(x)||\varphi(x)| + C_\varepsilon|u_0(x)|^p|\varphi(x)| \\ &\leq \varepsilon h(x)|\varphi(x)| + C_\varepsilon h(x)^p|\varphi(x)| \\ &\quad + \varepsilon|u_0(x)||\varphi(x)| + C_\varepsilon|u_0(x)|^p|\varphi(x)| =: g(x). \end{aligned}$$

Observe que $g \in L^1(\Omega)$, pois $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\Omega$ é compacto e como $p+1 > 2$ tem-se $L^{p+1}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Logo, usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |g(x)|dx \leq &\varepsilon \int_\Omega |h(x)||\varphi(x)|dx + C_\varepsilon \int_\Omega |h(x)|^p|\varphi(x)|dx\\ &+ \varepsilon \int_\Omega |u_0(x)||\varphi(x)|dx + C_\varepsilon \int_\Omega |u_0(x)|^p|\varphi(x)|dx\\ \leq &\varepsilon \|h\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + C_\varepsilon \|h\|^p_{L^{p+1}(\Omega)}\|\varphi\|_{L^{p+1}(\Omega)}\\ &+ \varepsilon \|u_0\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + C_\varepsilon \|u_0\|^p_{L^{p+1}(\Omega)}\|\varphi\|_{L^{p+1}(\Omega)} < \infty.\end{aligned}$$

Portanto, combinando os itens (a) e (c) acima, segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n) - f(u_0))\varphi dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f(u_n) - f(u_0))\varphi dx = 0,$$

como desejávamos.

**2ª etapa:** Consideremos $v_n^1 = u_n - u_0$. Suponha que

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(z)} |v_n^1|^2 dx \to 0.$$

Então $u_n \to u_0$ em $H$ e o Teorema 1.19 ocorre com $l = 0$.
De fato, desde que $u_n = v_n^1 + u_0$, temos

$$\begin{aligned}I'(u_n)v_n^1 &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla v_n^1 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n v_n^1 dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v_n^1 dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(v_n^1 + u_0)\nabla v_n^1 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(v_n^1 + u_0)v_n^1 dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v_n^1 dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n^1|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_n^1|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla v_n^1 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_0 v_n^1 dx\\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v_n^1 dx.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|v_n^1\|^2 = &\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n^1|^2 dx + V(x)|v_n^1|^2 dx = I'(u_n)v_n^1 - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla v_n^1 dx\\ &- \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_0 v_n^1 dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v_n^1 dx,\end{aligned}$$

Além disso, pela primeira etapa, obtemos

$$0 = I'(u_0)v_n^1 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla v_n^1 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_0 v_n^1 dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)v_n^1 dx,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)v_n^1 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla v_n^1 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_0 v_n^1 dx,$$

e assim,

$$\|v_n^1\|^2 = I'(u_n)v_n^1 - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)v_n^1 + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v_n^1 dx.$$

Como $\{u_n\} \subset H$ é uma sequência (PS) para $I$ e $\{v_n^1\} \subset H$ é limitada (já que $v_n^1 = u_n - u_0$ e $\{u_n\} \subset H$ é limitada), temos $I'(u_n)v_n^1 \to 0$. Portanto, pelo resultado acima, para provar que $u_n \to u_0$, ou seja, que $\|u_n - u_0\| = \|v_n^1\| \to 0$, é suficiente mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v_n^1 dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)v_n^1 dx = 0.$$

Passemos então a prova destas convergências. Pela Observação 1.21, para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq \varepsilon|s| + C_\varepsilon|s|^p \quad \text{para todo} \quad s \geq 0.$$

Assim, usando a desigualdade de Hölder, as imersões contínuas de Sobolev e as limitações da sequências $\{u_n\} \subset H$ e $\{v_n^1\} \subset H$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v_n^1 dx \right| &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u_n||v_n^1| dx + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p |v_n^1| dx \\
&\leq \varepsilon \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |v_n^1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \varepsilon \left( \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^p)^{\frac{p+1}{p}} dx \right)^{\frac{p}{p+1}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |v_n^1|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&= \varepsilon \|u_n\|_2 \|v_n^1\|_2 + C_\varepsilon \|u_n\|_{p+1}^p \|v_n^1\|_{p+1} \\
&\leq \varepsilon C_1 \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \|v_n^1\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + C_\varepsilon C_2 \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^p \|v_n^1\|_{p+1} \\
&\leq \varepsilon C_3 + C_\varepsilon C_4 \|v_n^1\|_{p+1}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, desde que $\{v_n^1\} \subset H$ é limitada e

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(z)} |v_n^1|^2 dx \to 0,$$

segue pelo Lema B.6 do Apêndice B que $\|v_n^1\|_{p+1} \to 0$ quando $n \to \infty$. Consequentemente, usando a desigualdade anterior, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v_n^1 dx = 0,$$

e, analogamente,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)v_n^1 dx = 0,$$

como desejávamos. Assim, $u_n \to u_0$ em $H$ (o que implica que $I(u_n) \to I(u_0)$, pois o funcional $I$ é de classe $\mathcal{C}^1$) e o Teorema 1.19 ocorre com $l = 0$, o que completa a prova da segunda etapa.

**3ª etapa:** Suponha que exista $\{z_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que, para um $d > 0$,

$$\int_{B_1(z_n)} |v_n^1|^2 dx \to d.$$

Então, a menos de subsequência, temos para um $w \in H$,

(i) $|z_n| \to \infty$;

(ii) $u_n(\cdot + z_n) \rightharpoonup w \neq 0$;

(iii) $I^{\infty\prime}(w) = 0$.

Para o item (i) suponha, por absurdo, que $\{z_n\} \subset \mathbb{R}^N$ é limitada, isto é, existe $K > 0$ tal que $|z_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $B_1(z_n) \subset B_r(0) \equiv B_r$, onde $r = 1 + K$. Com efeito, se $y \in B_1(z_n)$, temos

$$|y| - |z_n| \leq |y - z_n| \leq 1,$$

ou ainda,

$$|y| \leq 1 + |z_n| \leq 1 + K = r,$$

donde segue que $y \in B_r(0) \equiv B_r$. Logo,

$$0 \leq \int_{B_1(z_n)} |v_n^1|^2 dx \leq \int_{B_r} |v_n^1|^2 dx.$$

Por outro lado, desde que $\{v_n^1\} \subset H$ é limitada e $v_n^1 = u_n - u_0 \rightharpoonup 0$, segue que, a menos de subsequência, $v_n^1 \to 0$ em $L^2(B_r)$. Portanto, usando a desigualdade acima, obtemos

$$\int_{B_1(z_n)} |v_n^1|^2 dx \to 0,$$

o que contradiz nossa hipótese. Portanto, $|z_n| \to \infty$ e o item (i) está provado.

Passemos agora a prova de (ii). Afirmamos, inicialmente, que

$$\|u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Com efeito, note que

$$\int_{B_1(z_n)} u_0^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_0^2 \chi_{B_1(z_n)} dx,$$

onde

$$\chi_{B_1(z_n)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in B_1(z_n), \\ 0, & \text{se} \quad x \notin B_1(z_n). \end{cases}$$

Por outro lado, desde que $|z_n| \to \infty$, temos

$$u_0^2(x) \chi_{B_1(z_n)}(x) \to 0 \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

e como

$$|u_0^2(x) \chi_{B_1(z_n)}(x)| \leq u_0^2(x),$$

e $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, isto é, $u_0^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_{B_1(z_n)} u_0^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_0^2 \chi_{B_1(z_n)} dx \to 0,$$

ou seja, $\|u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} \to 0$.

Observe ainda que

$$\|v_n^1\|_{L^2(B_1(z_n))} = \|u_n - u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} \leq \|u_n\|_{L^2(B_1(z_n))} + \|u_0\|_{L^2(B_1(z_n))},$$

isto é,

$$\|u_n\|_{L^2(B_1(z_n))} \geq \|v_n^1\|_{L^2(B_1(z_n))} - \|u_0\|_{L^2(B_1(z_n))}.$$

Como, por hipótese, $\|v_n^1\|_{L^2(B_1(z_n))} \to d^{1/2} > 0$, a desigualdade acima juntamente com a afirmação anterior nos garantem, para $n$ suficientemente grande, a existência de um $\delta > 0$ tal que

$$\|u_n\|_{L^2(B_1(z_n))} \geq \delta,$$

ou, equivalentemente,

$$\int_{B_1(0)} |u_n(\cdot + z_n)|^2 dy = \int_{B_1(z_n)} |u_n|^2 dx \geq \delta^2, \tag{1.29}$$

onde usamos a mudança de variável $x = y + z_n$. Definamos agora, $\widetilde{u}_n(\cdot) = u_n(\cdot + z_n)$. Desde que $\{u_n\} \subset H$ é limitada, segue por uma mudança de variável que

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{u}_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u_n(x+z_n)|^2 + u_n^2(x+z_n)]dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u_n(y)|^2 + u_n^2(y)]dy = \|u_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq K,
\end{aligned}$$

e pela equivalência das normas $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ e $\|\cdot\|$, temos $\|\widetilde{u}_n\| \leq K_1$, ou seja, $\{\widetilde{u}_n\} \subset H$ é limitada. Assim, a menos de subsequência, obtemos

$$\widetilde{u}_n \rightharpoonup w.$$

Afirmamos que $w \neq 0$. De fato, se $w = 0$ então $\widetilde{u}_n \to w = 0$ em $L^2(B_1(0))$, isto é,

$$\int_{B_1(0)} |u_n(\cdot + z_n)|^2 dy = \int_{B_1(0)} |\widetilde{u}_n|^2 dx \to 0,$$

o que contradiz (1.29). Portanto, $u_n(\cdot + z_n) \rightharpoonup w \neq 0$, o que prova (ii).

Por fim, para a prova de (iii), consideremos como no item anterior, $\widetilde{u}_n(\cdot) = u_n(\cdot + z_n)$ e observe que, analogamente ao que foi feita na primeira etapa, temos

$$I^{\infty\prime}(\widetilde{u}_n)\varphi - I^{\infty\prime}(w)\varphi \to 0 \quad \text{para qualquer } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, para provar que $I^{\infty\prime}(w) = 0$ é suficiente mostrar que $I^{\infty\prime}(\widetilde{u}_n)\varphi \to 0$, para qualquer $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ fixada. Note que

$$\begin{aligned}
I'(u_n)\varphi(\cdot - z_n) = &\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(x)\nabla\varphi(x-z_n)dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n(x)\varphi(x-z_n)dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n(x))\varphi(x-z_n)dx,
\end{aligned}$$

ou, equivalentemente (usando a mudança de variável $y = x - z_n$),

$$\begin{aligned}
I'(u_n)\varphi(\cdot - z_n) = &\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(y+z_n)\nabla\varphi(y)dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(y+z_n)u_n(y+z_n)\varphi(y)dy \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n(y+z_n))\varphi(y)dy \\
= &\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\widetilde{u}_n(y)\nabla\varphi(y)dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(y+z_n)\widetilde{u}_n(y)\varphi(y)dy \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} f(\widetilde{u}_n(y))\varphi(y)dy
\end{aligned}$$

Por outro lado, desde que $\{u_n\} \subset H$ é uma sequencia (PS) para $I$ e

$$\|\varphi(\cdot - z_n)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)},$$

isto é, $\{\varphi(\cdot - z_n)\}$ é limitada, obtemos

$$I'(u_n)\varphi(\cdot - z_n) \to 0,$$

e assim,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\widetilde{u}_n(y)\nabla\varphi(y)dy &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(y+z_n)\widetilde{u}_n(y)\varphi(y)dy - \int_{\mathbb{R}^N} f(\widetilde{u}_n(y))\varphi(y)dy \\ &= I'(u_n)\varphi(\cdot - z_n) \to 0,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\widetilde{u}_n(y)\nabla\varphi(y)dy &+ \int_{\mathbb{R}^N} (V(y+z_n) - V(\infty))\widetilde{u}_n(y)\varphi(y)dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(\infty)\widetilde{u}_n(y)\varphi(y)dy - \int_{\mathbb{R}^N} f(\widetilde{u}_n(y))\varphi(y)dy \to 0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$I^{\infty\prime}(\widetilde{u}_n)\varphi + \int_{\mathbb{R}^N} (V(y+z_n) - V(\infty))\widetilde{u}_n(y)\varphi(y)dy \to 0.$$

Desta forma, pelo resultado acima, para provar que $I^{\infty\prime}(\widetilde{u}_n)\varphi \to 0$, é suficiente mostrar

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V(y+z_n) - V(\infty))\widetilde{u}_n(y)\varphi(y)dy \to 0,$$

onde as convergências acima são todas quando $n \to \infty$.

Para provar este fato, consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado e Supp$\varphi \subseteq \Omega$. Já vimos no item (ii) que $\widetilde{u}_n(\cdot) = u_n(\cdot + z_n) \rightharpoonup w \neq 0$, donde se obtém que $\widetilde{u}_n \to w$ em $L^2(\Omega)$. Assim, a menos de subsequência, existe $h \in L^2(\Omega)$ tal que

**(a)** $\widetilde{u}_n(y) \to w(y)$ q.t.p. em $\Omega$,

**(b)** $|\widetilde{u}_n(y)| \leq h(y)$ q.t.p. em $\Omega$.

Por outro lado, desde que $|z_n| \to \infty$, para $y \in \mathbb{R}^N$ fixo, temos $|y + z_n| \to \infty$ e por $(V_2)$, segue que

$$V(y+z_n) - V(\infty) \to 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega \quad \text{quando } \ n \to \infty,$$

donde obtemos

$$(V(y+z_n) - V(\infty))\widetilde{u}_n(y)\varphi(y) \to 0 \quad \text{q.t.p. em } \ \Omega.$$

Agora, usando o fato que V é limitado (veja item (iv) da Observação 1.2), obtemos

$$|(V(y+z_n) - V(\infty))\widetilde{u}_n(y)\varphi(y)| \leq K|h(y)||\varphi(y)| =: g(y)$$

e $g \in L^1(\Omega)$ pois, pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\int_\Omega |g(y)|dy \leq K\int_\Omega |h(y)||\varphi(y)|dy = K\|h\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} < \infty.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(V(y+z_n)-V(\infty))\widetilde{u}_n(y)\varphi(y)dy=\int_{\Omega}(V(y+z_n)-V(\infty))\widetilde{u}_n(y)\varphi(y)dy\to 0,$$

como desejávamos. Assim, a terceira etapa está concluída.

**4ª etapa:** Suponha que existam $m\geq 1$, sequências $\{y_n^k\}\subset\mathbb{R}^N$ e funções $w^k\in H$ para $1\leq k\leq m$, tais que

$$\begin{array}{lll} |y_n^k|\to\infty,\ \ |y_n^k-y_n^{k'}|\to\infty & \text{se} & k\neq k', \\ u_n(\cdot+y_n^k)\rightharpoonup w^k\neq 0 & \text{para todo} & 1\leq k\leq m, \\ I^{\infty\prime}(w^k)=0 & \text{para todo} & 1\leq k\leq m. \end{array}$$

Então

**(1)** Se $\displaystyle\sup_{z\in\mathbb{R}^N}\int_{B_1(z)}|u_n-u_0-\sum_{k=1}^m w^k(\cdot-y_n^k)|^2dx\to 0$ temos

$$\|u_n-u_0-\sum_{k=1}^m w^k(\cdot-y_n^k)\|\to 0.$$

**(2)** Se existe $\{z_n\}\subset\mathbb{R}^N$ tal que, para um $d>0$,

$$\int_{B_1(z_n)}|u_n-u_0-\sum_{k=1}^m w^k(\cdot-y_n^k)|^2dx\to d,$$

então, após extrair uma subsequência se necessário, o seguinte ocorre:

(i) $|z_n|\to\infty$, $|z_n-y_n^k|\to\infty$ para todo $1\leq k\leq m$;

(ii) $u_n(\cdot+z_n)\rightharpoonup w^{m+1}\neq 0$;

(iii) $I^{\infty\prime}(w^{m+1})=0$.

Suponha que **(1)** ocorre. Consideremos $\xi_n=u_n-u_0-\sum_{k=1}^m w^k(\cdot-y_n^k)$ e observemos que por uma mudança de variável, $\|w^k(\cdot-y_n^k)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}=\|w^k\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$. Assim, usando que $\{u_n\}\subset H$ é limitada, obtemos

$$\begin{aligned} \|\xi_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= \|u_n-u_0-\sum_{k=1}^m w^k(\cdot-y_n^k)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}+\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}+\sum_{k=1}^m\|w^k(\cdot-y_n^k)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\ &= \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}+\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}+\sum_{k=1}^m\|w^k\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\leq K, \end{aligned}$$

isto é, $\{\xi_n\} \subset H$ é limitada. Logo, se **(1)** ocorre então pelo Lema B.6 do Apêndice, temos $\xi_n \to 0$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Observe ainda que $u_n = \xi_n + u_0 + \sum_{k=1}^m w^k(\cdot - y_n^k)$, donde se tem

$$\begin{aligned} I'(u_n)\xi_n = &\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \xi_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla \xi_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \left( \sum_{k=1}^m w^k(\cdot - y_n^k) \right) \nabla \xi_n dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\xi_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_0 \xi_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \left( \sum_{k=1}^m w^k(\cdot - y_n^k) \right) \xi_n dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)\xi_n dx, \end{aligned}$$

o que nos fornece

$$\begin{aligned} \|\xi_n\|^2 = &\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \xi_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\xi_n^2 dx \\ = &\, I'(u_n)\xi_n + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)\xi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla \xi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_0 \xi_n dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \left( \sum_{k=1}^m w^k(\cdot - y_n^k) \right) \nabla \xi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \left( \sum_{k=1}^m w^k(\cdot - y_n^k) \right) \xi_n dx \end{aligned}$$

Desde que $I'(u_0)\xi_n = 0$ (isto segue pela primeira etapa), ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)\xi_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla \xi_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_0 \xi_n dx,$$

podemos reescrever a expressão anterior da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \|\xi_n\|^2 = &\, I'(u_n)\xi_n - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)\xi_n dx - \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w^k(\cdot - y_n^k) \nabla \xi_n dx \\ &- \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^N} V(\infty) w^k(\cdot - y_n^k) \xi_n dx \\ &+ \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^N} (V(\infty) - V(x)) w^k(\cdot - y_n^k) \xi_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)\xi_n dx. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Agora, usando a hipótese que $I^{\infty\prime}(w^k) = 0$ para todo $1 \leq k \leq m$, temos

$$I^{\infty\prime}(w^k)\xi_n(\cdot + y_n^k) = 0,$$

o que implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(w^k(z))\xi_n(z + y_n^k) dz = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w^k(z) \nabla \xi_n(z + y_n^k) dz + \int_{\mathbb{R}^N} V(\infty) w^k(z) \xi_n(z + y_n^k) dz.$$

Fazendo a mudança de variável $x = z + y_n^k$ (para cada $1 \leq k \leq m$) no lado direito da igualdade acima, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(w^k)\xi_n(\cdot + y_n^k) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w^k(\cdot - y_n^k) \nabla \xi_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(\infty) w^k(\cdot - y_n^k) \xi_n dx,$$

donde obtemos

$$\sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N} f(w^k)\xi_n(\cdot + y_n^k)dx = \sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w^k(\cdot - y_n^k)\nabla\xi_n dx + \sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N} V(\infty)w^k(\cdot - y_n^k)\xi_n dx.$$

Assim, (1.30) fica

$$\begin{aligned}\|\xi_n\|^2 = I'(u_n)\xi_n - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)\xi_n dx - \sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N} f(w^k)\xi_n(\cdot + y_n^k)dx\\ + \sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N}(V(\infty) - V(x))w^k(\cdot - y_n^k)\xi_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)\xi_n dx.\end{aligned}$$

Analogamente ao que foi feito na segunda etapa, usando repetidamente o fato que $\|\xi_n\|_{p+1} \to 0$, obtemos

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N} f(w^k)\xi_n(\cdot + y_n^k)dx \to 0,\\ \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)\xi_n dx \to 0,\\ \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)\xi_n dx \to 0,\end{cases}$$

onde usamos para obter a primeira convergência o fato (dado diretamente por mudança de variável) que $\|\xi_n(\cdot + y_n^k)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = \|\xi_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}$, para todo $q \in [1, \infty)$.
Logo,

$$\begin{aligned}&\|\xi_n\|^2 - I'(u_n)\xi_n - \sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N}(V(\infty) - V(x))w^k(\cdot - y_n^k)\xi_n dx\\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)\xi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)\xi_n dx - \sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N} f(w^k)\xi_n(\cdot + y_n^k)dx \to 0.\end{aligned}$$

Como $\{u_n\} \subset H$ é uma sequência PS para $I$ e $\{\xi_n\} \subset H$ é limitada, temos $I'(u_n)\xi_n \to 0$. Portanto, pelo resultado acima, para provar que

$$\|\xi_n\| = \|u_n - u_0 - \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)\| \to 0,$$

é suficiente mostrar que

$$\sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N}(V(\infty) - V(x))w^k(\cdot - y_n^k)\xi_n dx \to 0,$$

onde as convergências acima são todas quando $n \to \infty$.

Para provar este fato, note que por $(V_2)$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}^N}(V(\infty) - V(x))w^k(\cdot - y_n^k)\xi_n dx\right|\\ &\quad \leq \int_{B_R}|V(\infty) - V(x)||w^k(\cdot - y_n^k)||\xi_n|dx + \int_{B_R^C}|V(\infty) - V(x)||w^k(\cdot - y_n^k)||\xi_n|dx\\ &\quad \leq C_1\int_{B_R}|w^k(\cdot - y_n^k)||\xi_n|dx + \varepsilon\int_{B_R^C}|w^k(\cdot - y_n^k)||\xi_n|dx,\end{aligned}$$

onde $B_R = B_R(0)$ e estamos considerando o fato que o potencial $V$ é limitado.

Além disso, desde que $\xi_n, w^k \in H$, segue pelas imersões continuas de Sobolev que $\xi_n, w^k \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, e como, $L^{p+1}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p+1}(B_R) \subset L^{\frac{p+1}{p}}(B_R)$, temos $\xi_n, w^k \in L^{\frac{p+1}{p}}(B_R) \cap L^{p+1}(B_R) \cap L^2(B_R) \cap L^2(B_R^C)$. Assim, usando a desigualdade de Hölder, a limitação de $\xi_n$ em $H$, o fato que $\|w^k(\cdot - y_n^k)\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} = \|w^k\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}$ e novamente as imersões continuas de Sobolev, concluímos da desigualdade anterior que

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^N} (V(\infty) - V(x)) w^k(\cdot - y_n^k) \xi_n dx \right| \\
&\quad \le C_1 \|w^k(\cdot - y_n^k)\|_{L^{p+1}(B_R)} \|\xi_n\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(B_R)} + \varepsilon \|w^k(\cdot - y_n^k)\|_{L^2(B_R^C)} \|\xi_n\|_{L^2(B_R^C)} \\
&\quad \le C_1 \|w^k(\cdot - y_n^k)\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} \|\xi_n\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(B_R)} + \varepsilon \|w^k(\cdot - y_n^k)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\xi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad = C_1 \|w^k\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} \|\xi_n\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(B_R)} + \varepsilon \|w^k\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\xi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad \le C_2 \|\xi_n\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(B_R)} + \varepsilon C_3 \|\xi_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \le C_2 \|\xi_n\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(B_R)} + \varepsilon C_4, \qquad (1.31)
\end{aligned}
$$

Desde que $L^{p+1}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p+1}(B_R) \subset L^{\frac{p+1}{p}}(B_R)$, temos

$$0 \le \|\xi_n\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(B_R)} \le C \|\xi_n\|_{p+1},$$

e como, $\|\xi_n\|_{p+1} \to 0$, segue da desigualdade acima que

$$\|\xi_n\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(B_R)} \to 0.$$

Consequentemente, temos por (1.31) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V(\infty) - V(x)) w^k(\cdot - y_n^k) \xi_n dx \to 0 \quad \text{para todo } \ 1 \le k \le m.$$

ou ainda,

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^N} (V(\infty) - V(x)) w^k(\cdot - y_n^k) \xi_n dx \to 0,$$

como desejávamos.

Assuma agora que **(2)** ocorre. A prova de (i) será dividida em dois casos.

1º caso: Afirmamos que $|z_n| \to \infty$.

Suponha, por contradição, que $(z_n) \subset \mathbb{R}^N$ é limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $|z_n| \le M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$|z_n - y_n^k| = |y_n^k - z_n| \ge |y_n^k| - |z_n| \ge |y_n^k| - M,$$

e como por hipótese $|y_n^k| \to \infty$ para todo $1 \le k \le m$, temos

$$|z_n - y_n^k| \to \infty \quad \text{quando} \ \ n \to \infty.$$

Defina, $\widetilde{w}^k(\cdot) = w^k(\cdot - y_n^k)$ e tome $\xi_n = u_n - u_0 - \sum_{k=1}^m w^k(\cdot - y_n^k)$. Note que

$$
\begin{aligned}
\|\xi_n\|_{L^2(B_1(z_n))} &= \|u_n - u_0 - \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)\|_{L^2(B_1(z_n))} \\
&\le \|u_n - u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} + \sum_{k=1}^{m} \|\widetilde{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n))},
\end{aligned}
$$

isto é,

$$\|u_n - u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} \geq \|\xi_n\|_{L^2(B_1(z_n))} - \sum_{k=1}^{m} \|\widetilde{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n))}. \tag{1.32}$$

Por outro lado, fazendo a mudança de variável $z = x - y_n^k$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\widetilde{w}^k\|^2_{L^2(B_1(z_n))} &= \int_{B_1(z_n)} |w^k(x - y_n^k)|^2 dx \\ &= \int_{B_1(z_n - y_n^k)} |w^k(z)|^2 dz = \|w^k\|^2_{L^2(B_1(z_n - y_n^k))}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\widetilde{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n))} = \|w^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^k))} \quad \text{para todo} \;\; 1 \leq k \leq m.$$

Como $w^k \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e, neste 1º caso, já foi provado que $|z_n - y_n^k| \to \infty$, segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (análogo ao que foi feito no item(ii) da terceira etapa) que

$$\|\widetilde{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n))} = \|w^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^k))} \to 0 \quad \text{para todo} \;\; 1 \leq k \leq m,$$

e assim,

$$\sum_{k=1}^{m} \|\widetilde{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n))} \to 0.$$

Consequentemente, visto que por **(2)**, $\|\xi_n\|_{L^2(B_1(z_n))} \to d^{1/2} > 0$, o resultado acima juntamente com (1.32) garantem a existência de um $\delta > 0$ (para $n$ suficientemente grande) tal que

$$\|u_n - u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} \geq \delta,$$

ou ainda,

$$\int_{B_1(z_n)} |u_n - u_0|^2 dx \geq \delta^2 > 0. \tag{1.33}$$

Desde que estamos admitindo $|z_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos como no item (i) da terceira etapa que existe $r > 0$ ($r = 1 + M$) tal que $B_1(z_n) \subset B_r(0) \equiv B_r$. Logo,

$$0 \leq \int_{B_1(z_n)} |u_n - u_0|^2 dx \leq \int_{B_r} |u_n - u_0|^2 dx,$$

e, como $u_n - u_0 \to 0$ em $L^2(B_r)$, concluímos da desigualdade acima que

$$\int_{B_1(z_n)} |u_n - u_0|^2 dx \to 0,$$

o que contradiz (1.33). Portanto $|z_n| \to \infty$ e o 1º caso fica provado.

<u>2ºcaso</u>: $|z_n - y_n^k| \to \infty$ para todo $1 \leq k \leq m$.
A prova desse caso é análoga a do caso anterior. Suponha, por contradição que, existe $k' \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\{z_n - y_n^{k'}\} \subset \mathbb{R}^N$ é limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $|z_n - y_n^{k'}| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para $k \neq k'$, obtemos

$$\begin{aligned} &|z_n| = |y_n^{k'} + z_n - y_n^{k'}| \geq |y_n^{k'}| - |z_n - y_n^{k'}| \geq |y_n^{k'}| - M, \\ &|z_n - y_n^k| = |z_n - y_n^{k'} + y_n^{k'} - y_n^k| \geq |y_n^{k'} - y_n^k| - |z_n - y_n^{k'}| \geq |y_n^{k'} - y_n^k| - M. \end{aligned}$$

e como, por hipótese, $|y_n^k| \to \infty$ para todo $1 \le k \le m$ e $|y_n^k - y_n^{k'}| \to \infty$ se $k \neq k'$ (quando $n \to \infty$), temos

$$\begin{aligned} &|z_n| \to \infty, \\ &|z_n - y_n^k| \to \infty \quad \text{para todo} \quad k \neq k'. \end{aligned}$$

Note ainda que por **(2)**

$$\int_{B_1(z_n)} |u_n(x) - u_0(x) - w^{k'}(x - y_n^{k'}) - \sum_{k=1}^{k'-1} w^k(x - y_n^k) - \sum_{k=k'+1}^{m} w^k(x - y_n^k)|^2 dx \to d > 0,$$

e fazendo a mudança de variável $z = x - y_n^{k'}$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_1(z_n - y_n^{k'})} &|u_n(z + y_n^{k'}) - u_0(z + y_n^{k'}) - w^{k'}(z) \\ &- \sum_{k=1}^{k'-1} w^k(z + y_n^{k'} - y_n^k) - \sum_{k=k'+1}^{m} w^k(z + y_n^{k'} - y_n^k)|^2 dz \to d > 0. \end{aligned}$$

Definindo, $\widehat{w}^k(\cdot) = w^k(\cdot + y_n^{k'} - y_n^k)$, $\widehat{u}_n(\cdot) = u_n(\cdot + y_n^{k'})$ e $\widehat{u}_0(\cdot) = u_0(\cdot + y_n^{k'})$, segue do resultado acima que

$$\|\widehat{u}_n - \widehat{u}_0 - w^{k'} - \sum_{k=1}^{k'-1} \widehat{w}^k - \sum_{k=k'+1}^{m} \widehat{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} \to d^{1/2} > 0,$$

e considerando, $v_n = \widehat{u}_n - \widehat{u}_0 - w^{k'} - \sum_{k=1}^{k'-1} \widehat{w}^k - \sum_{k=k'+1}^{m} \widehat{w}^k$, temos

$$\|v_n\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} \to d^{1/2} > 0 \tag{1.34}$$

e

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} \le\ & \|\widehat{u}_n - w^{k'}\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} + \|\widehat{u}_0\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} \\ & + \sum_{k=1}^{k'-1} \|\widehat{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} + \sum_{k=k'+1}^{m} \|\widehat{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \|\widehat{u}_n - w^{k'}\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} \ge\ & - \sum_{k=1}^{k'-1} \|\widehat{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} - \sum_{k=k'+1}^{m} \|\widehat{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} \\ & + \|v_n\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} - \|\widehat{u}_0\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))}. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Analogamente ao caso anterior, usando a definição de $\widehat{w}^k$ e fazendo a mudança de variável $x = z + y_n^{k'} - y_n^k$, obtemos

$$\|\widehat{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} = \|w^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^k))}$$

e como, $w^k \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e, neste 2º caso, já foi provado que $|z_n - y_n^k| \to \infty$ se $k \neq k'$, segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (análogo ao exposto no item(ii) da terceira etapa) que

$$\|\widehat{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} = \|w^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^k))} \to 0 \quad \text{para todo} \quad k \neq k' \, (1 \le k \le m).$$

Portanto,

$$\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{k'-1}\|\widehat{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n-y_n^{k'}))}\to 0,\\ \sum_{k=k'+1}^{m}\|\widehat{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n-y_n^{k'}))}\to 0.\end{array}\tag{1.36}$$

Segue também pela definição de $\widehat{u}_0$ e pela mudança de variável $z = x - y_n^{k'}$ (veja caso anterior) que

$$\|\widehat{u}_0\|_{L^2(B_1(z_n-y_n^{k'}))} = \|u_0\|_{L^2(B_1(z_n))}.$$

Novamente, como na prova do item(ii) da terceira etapa, usando o fato que $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e que $|z_n| \to \infty$ (provado acima, para este 2º caso), concluímos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\|\widehat{u}_0\|_{L^2(B_1(z_n-y_n^{k'}))} = \|u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} \to 0.\tag{1.37}$$

Desta forma, combinando (1.34)−(1.37), segue que existe $\delta > 0$ (para $n$ suficientemente grande) tal que

$$\|\widehat{u}_n - w^{k'}\|_{L^2(B_1(z_n-y_n^{k'}))} > \delta,$$

ou, equivalentemente,

$$\int_{B_1(z_n-y_n^{k'})}|\widehat{u}_n - w^{k'}|^2dx > \delta^2 > 0.\tag{1.38}$$

Como estamos supondo $|z_n - y_n^{k'}| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue como no item (i) da terceira etapa que existe $r > 0$ ($r = 1 + M$) tal que $B_1(z_n - y_n^{k'}) \subset B_r(0) \equiv B_r$. Logo,

$$0 \leq \int_{B_1(z_n-y_n^{k'})}|\widehat{u}_n - w^{k'}|^2dx \leq \int_{B_r}|u_n - u_0|^2dx.$$

Por outro lado, temos por hipótese $\widehat{u}_n(\cdot) = u_n(\cdot + y_n^k) \rightharpoonup w^k \neq 0$ para todo $1 \leq k \leq m$, donde segue que $\widehat{u}_n - w^{k'} \to 0$ em $L^2(B_r)$. Assim, concluímos da desigualdade acima que

$$\int_{B_1(z_n-y_n^{k'})}|\widehat{u}_n - w^{k'}|^2dx \to 0,$$

o que contradiz (1.38). Portanto, $|z_n - y_n^k| \to \infty$ para todo $1 \leq k \leq m$ o que conclui o 2º caso e assim (i) está provado.

A prova de (ii) será análoga a que foi feita na terceira etapa (item (ii)). Continuemos denotando, $\widetilde{w}^k(\cdot) = w^k(\cdot - y_n^k)$ e $\xi_n = u_n - u_0 - \sum_{k=1}^m w^k(\cdot - y_n^k)$. Desde que $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $|z_n| \to \infty$ (provado em (i) desta etapa), segue como na prova de (ii) da terceira etapa que

$$\|u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} \to 0.\tag{1.39}$$

Observe que por **(2)**

$$\|\xi_n\|_{L^2(B_1(z_n))} \to d^{1/2} > 0.\tag{1.40}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\|\xi_n\|_{L^2(B_1(z_n))} &= \|u_n - u_0 - \sum_{k=1}^m w^k(\cdot - y_n^k)\|_{L^2(B_1(z_n))}\\ &\leq \|u_n\|_{L^2(B_1(z_n))} + \|u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} + \sum_{k=1}^m \|\widetilde{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n))},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u_n\|_{L^2(B_1(z_n))} \geq \|\xi_n\|_{L^2(B_1(z_n))} - \|u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} - \sum_{k=1}^{m} \|\widetilde{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n))}. \tag{1.41}$$

Desde que $w^k \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $|z_n - y_n^k| \to \infty$ (provado em (i) desta etapa) segue como na prova do item (i) (1º caso) que

$$\sum_{k=1}^{m} \|\widetilde{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n))} \to 0. \tag{1.42}$$

Portanto, combinando (1.39)−(1.42), temos, para $n$ suficientemente grande, a existência de um $\delta > 0$ tal que

$$\|u_n\|_{L^2(B_1(z_n))} \geq \delta$$

ou, equivalentemente, usando a mudança de variável $x = y + z_n$,

$$\int_{B_1(0)} |u_n(\cdot + z_n)|^2 dy = \int_{B_1(z_n)} |u_n|^2 dx \geq \delta^2 > 0. \tag{1.43}$$

Consideremos agora, $\widetilde{u}_n(\cdot) = u_n(\cdot + z_n)$. Já vimos na prova da terceira etapa (item (ii)) que $\{\widetilde{u}_n\} \subset H$ é limitada. Assim, a menos de subsequência, temos

$$\widetilde{u}_n \rightharpoonup w^{m+1}.$$

Afirmamos que $w^{m+1} \neq 0$. Com efeito, se $w^{m+1} = 0$, teríamos $\widetilde{u}_n \to w^{m+1} = 0$ em $L^2(B_1(0))$, isto é,

$$\int_{B_1(0)} |u_n(\cdot + z_n)|^2 dy = \int_{B_1(0)} |\widetilde{u}_n|^2 dx \to 0,$$

contradizendo assim (1.43). Portanto, $u_n(\cdot + z_n) \rightharpoonup w^{m+1} \neq 0$, o que conclui a prova de (ii).

Para provar (iii), consideramos $\widetilde{u}_n(\cdot) = u_n(\cdot + z_n)$ e observe que, de modo análogo ao que foi feita na primeira etapa, temos

$$I^{\infty\prime}(\widetilde{u}_n)\varphi - I^{\infty\prime}(w^{m+1})\varphi \to 0 \quad \text{para qualquer} \quad \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Assim, para provar que $I^{\infty\prime}(w^{m+1}) = 0$, é suficiente mostrar que

$$I^{\infty\prime}(\widetilde{u}_n)\varphi \to 0 \text{ para qualquer } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ fixada,}$$

e isto é feito analogamente como no item (iii) da terceira etapa. Logo, a quarta etapa está concluída.

**5ª etapa:** *Conclusão.* Pela primeira etapa temos $u_n \rightharpoonup u_0$ com $I'(u_0) = 0$ e assim (i) do Teorema 1.19 fica provado. Além disso, se a hipótese da segunda etapa ocorre, então $u_n \to u_0$ em $H$ e o Teorema 1.19 ocorre com $l = 0$. Caso contrário, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(z)} |v_n^1|^2 dx \geq \varepsilon_0 \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N},$$

e assim, pela definição de supremo, existe $\{z_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_1(z_n)} |v_n^1|^2 dx \geq \varepsilon_0 \quad \text{o que implica que} \quad \int_{B_1(z_n)} |v_n^1|^2 dx \to d > 0.$$

Portanto, se a hipótese da segunda etapa não ocorre, a hipóse da terceira etapa deve ocorrer. Desse modo, fazendo $\{y_n^1\} = \{z_n\}$ e $w^1 = w$ a tese da terceira etapa nos coloca nas hipóses da quarta etapa no caso $m = 1$. Assim, se (1) da quarta etapa ocorre obtemos (ii)-(iv) do Teorema 1.19 (com $m = 1$). Se não (analogamente ao que foi feito caso a hipóse da segunda etapa não ocoresse), (2) da quarta etapa deve ocorrer e fazendo $\{y_n^2\} = \{z_n\}$ e $w^{1+1} = w^2$ a tese de (2) da quarta etapa nos coloca novamente nas hipóteses da quarta etapa com $m = 2$, e assim, repetimos a quarta etapa. Obviamente tudo que temos de fazer para concluir a prova de (ii)-(iv) do Teorema 1.19 é mostrar que (1) da quarta etapa deve ocorrer após um numero finito de repetições. Para isto mostremos primeiro o seguinte resultado:

**Afirmação 1:** Para todo $m \geq 1$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \sum_{k=1}^{m} \|w^k\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0 - \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \geq 0.$$

Provada a afirmação, desde que $I^{\infty\prime}(w^k) = 0$ para $1 \leq k \leq m$ e $w^k \neq 0$, usando a Observação 1.22, o fato que $\{u_n\} \subset H$ é limitada e a equivalência das normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, segue que existem $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ e $\rho_0 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} C_1 &\geq \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \geq \|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \sum_{k=1}^{m} \|w^k\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\ &\geq \sum_{k=1}^{m} \|w^k\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \geq C_2 \sum_{k=1}^{m} \|w^k\|^2 \geq C_2 \rho_0 m, \end{aligned}$$

isto é,

$$m \leq \frac{C_1}{C_2 \rho_0}.$$

Portanto, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que (1) da quarta etapa deve ocorrer.

Passemos agora a prova da nossa afirmação. Como o funcional $I^\infty$ esta associado a um problema autônomo e $w^k$ são pontos críticos não-triviais de $I^\infty$ para todo $1 \leq k \leq m$ segue que $w^k$ tem decaimento exponencial no infinito (veja Teorema 1 em Berestycki-Lions [1]) e consequentemente,

$$\lim_{|x|\to\infty} w^k(x) = 0 \quad \text{para todo} \;\; 1 \leq k \leq m.$$

Definamos $\widetilde{w}_n^k(\cdot) = w^k(\cdot - y_n^k)$. Fazendo a mudança de variável $z = \cdot - y_n^k$, temos claramente $\|\widetilde{w}_n^k\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|w^k\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, e como, as normas $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes, segue que $\{\widetilde{w}_n\} \subset H$ é limitada. Assim, tomando uma subsequência se necessário, temos

$$w^k(\cdot - y_n^k) = \widetilde{w}_n^k \rightharpoonup \widetilde{w}^k \quad \text{e} \quad w^k(x - y_n^k) = \widetilde{w}_n^k(x) \to \widetilde{w}^k(x) \quad \text{q.t.p. em} \;\; \mathbb{R}^N.$$

Desde que $|y_n^k| \to \infty$ para todo $1 \leq k \leq m$, temos, para $x \in \mathbb{R}^N$ fixado, $|x - y_n^k| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Consequentemente, usando as convergências acima, obtemos

$$\widetilde{w}^k(x) = \lim_{n\to\infty} w^k(x - y_n^k) = \lim_{|x - y_n^k|\to\infty} w^k(x - y_n^k) = 0.$$

Desta forma,

$$w^k(\cdot - y_n^k) = \widetilde{w}_n^k \rightharpoonup \widetilde{w}^k = 0 \quad \text{para todo} \;\; 1 \leq k \leq m. \tag{1.44}$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned}
&\|u_n - u_0 - \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 \\
&\quad = \|u_n - u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 - 2\langle u_n - u_0, \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)\rangle_H + \|\sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 \\
&\quad = \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 - 2\langle u_n, u_0\rangle_H + \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 - 2\langle u_n, \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)\rangle_H \\
&\qquad + 2\langle u_0, \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)\rangle_H + \|\sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2.
\end{aligned}$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u_0$ (veja primeira etapa), temos $\langle u_n, u_0\rangle_H \to \langle u_0, u_0\rangle_H = \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2$. Além disso, usando (1.44), temos

$$\langle u_0, \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)\rangle_H \to 0.$$

Portanto, para provar nossa afirmação, é suficiente mostrar que

**(a)** $\langle u_n, \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)\rangle_H \to \sum_{k=1}^{m} \|w^k\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2$,

**(b)** $\|\sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 \to \sum_{k=1}^{m} \|w^k\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2$,

onde os produtos internos acima representam o produto interno de $H \equiv H^1(\mathbb{R}^N)$.

Primeiro, fazendo a mudança de variável $z = \cdot - y_n^k$ (para cada $k \in \{1, 2, \dots, m\}$), um cálculo direto nos dá

$$\langle u_n, w^k(\cdot - y_n^k)\rangle_H = \langle u_n(\cdot + y_n^k), w^k\rangle_H \quad \text{para cada} \;\; k \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Assim, usando o fato que $u_n(\cdot + y_n^k) \rightharpoonup w^k \neq 0$ para todo $1 \leq k \leq m$ (veja quarta etapa), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle u_n, \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)\rangle_H &= \langle u_n, w^1(\cdot - y_n^1)\rangle_H + \cdots + \langle u_n, w^m(\cdot - y_n^m)\rangle_H \\
&= \langle u_n(\cdot + y_n^1), w^1\rangle_H + \cdots + \langle u_n(\cdot + y_n^m), w^m\rangle_H \\
&\to \|w^1\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 + \cdots + \|w^m\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 = \sum_{k=1}^{m} \|w^k\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2,
\end{aligned}$$

e isto nos fornece **(a)**. Para provar **(b)** observemos inicialmente que

$$\begin{aligned}
\|\sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 &= \langle \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k), \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)\rangle_H \\
&= \sum_{k=1}^{m} \langle w^k(\cdot - y_n^k), w^k(\cdot - y_n^k)\rangle_H \\
&\quad + \sum_{\substack{k,k'=1 \\ k \neq k'}}^{m} \langle w^k(\cdot - y_n^k), w^{k'}(\cdot - y_n^{k'})\rangle_H.
\end{aligned}$$

Fazendo as mudanças de variáveis $z = \cdot - y_n^k$ (para cada $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$) e $y = \cdot - y_n^{k'}$ (para $k \neq k'$ e $k, k' \in \{1, 2, \ldots, m\}$), temos

$$\begin{aligned}\langle w^k(\cdot - y_n^k), w^k(\cdot - y_n^k)\rangle_H &= \langle w^k, w^k\rangle_H = \|w^k\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)},\\ \langle w^k(\cdot - y_n^k), w^{k'}(\cdot - y_n^{k'})\rangle_H &= \langle w^k(\cdot + y_n^{k'} - y_n^k), w^{k'}\rangle_H\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\|\sum_{k=1}^m w^k(\cdot - y_n^k)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \sum_{k=1}^m \|w^k\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \sum_{\substack{k,k'=1\\ k\neq k'}}^m \langle w^k(\cdot + y_n^{k'} - y_n^k), w^{k'}\rangle_H.$$

Logo, tudo que temos de fazer para provar **(b)** é mostrar que

$$\sum_{\substack{k,k'=1\\ k\neq k'}}^m \langle w^k(\cdot + y_n^{k'} - y_n^k), w^{k'}\rangle_H \to 0,$$

ou ainda,

$$\langle w^k(\cdot + y_n^{k'} - y_n^k), w^{k'}\rangle_H \to 0 \quad \text{se} \quad k \neq k'.$$

Desde que $|y_n^k - y_n^{k'}| \to \infty$ se $k \neq k'$ (veja quarta etapa), segue de modo análogo ao que foi feito para obter (1.44) que

$$w^k(\cdot + y_n^{k'} - y_n^k) = w^k(\cdot - (y_n^k - y_n^{k'})) \rightharpoonup 0 \quad \text{se} \quad k \neq k', \tag{1.45}$$

donde obtemos

$$\langle w^k(\cdot + y_n^{k'} - y_n^k), w^{k'}\rangle_H \to 0 \quad \text{se} \quad k \neq k',$$

como desejávamos. Portanto nossa afirmação está provada.

Para concluir a prova do Teorema 1.19 resta somente provar (v), ou seja, mostrar que

$$I(u_n) \to I(u_0) + \sum_{k=1}^l I^\infty(w^k).$$

Escrevendo $u_n = u_0 + (u_n - u_0)$, afirmamos inicialmente que

$$I(u_n) - I^\infty(u_n - u_0) \to I(u_0). \tag{1.46}$$

De fato,

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [\,|\nabla(u_0 + (u_n - u_0))|^2 + V(x)(u_0 + (u_n - u_0))^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla(u_n - u_0)dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n - u_0)|^2 dx\\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_0^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_0(u_n - u_0)dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_n - u_0)^2 dx\\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$
\begin{aligned}
I(u_n) = I(u_0) + I^{\infty}(u_n - u_0) &+ \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla (u_n - u_0) dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_0 (u_n - u_0) dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V(\infty))(u_n - u_0)^2 dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n - u_0) dx + \int_{\mathbb{R}^N} F(u_0) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) dx.
\end{aligned} \tag{1.47}
$$

Por outro lado, desde que $u_n \rightharpoonup u_0$ então $u_n - u_0 \rightharpoonup 0$. Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla (u_n - u_0) dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_0 (u_n - u_0) dx \to 0.$$

Além disso, usando $(V_2)$, a limitação do potencial $V$ (veja item (iv) da Observação 1.2), a imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ e a limitação da sequência $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V(\infty))(u_n - u_0)^2 dx \right| \\
&\quad \le \int_{B_R} |(V(x) - V(\infty))(u_n - u_0)^2| dx + \int_{B_R^C} |(V(x) - V(\infty))(u_n - u_0)^2| dx \\
&\quad \le K \int_{B_R} (u_n - u_0)^2 dx + \varepsilon \int_{B_R^C} (u_n - u_0)^2 dx \le K \|u_n - u_0\|_{L^2(B_R)}^2 + \varepsilon \|u_n - u_0\|_2^2 \\
&\quad \le K \|u_n - u_0\|_{L^2(B_R)}^2 + C_1 \varepsilon \|u_n - u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 \le K \|u_n - u_0\|_{L^2(B_R)}^2 + C_2 \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Desde que, a menos de subsequência, $u_n - u_0 \to 0$ em $L^2(B_R)$, concluímos, da desigualdade acima, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V(\infty))(u_n - u_0)^2 dx \to 0.$$

Desta forma, usando (1.47), tudo que temos de fazer para provar (1.46) é mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [F(u_n - u_0) + F(u_0) - F(u_n)] dx \to 0,$$

ou ainda, escrevendo $g_n = u_n - u_0$, é suficiente verificar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [F(g_n + u_0) - F(g_n) - F(u_0)] dx \to 0. \tag{1.48}$$

Passemos então a prova deste resultado. Primeiro, observemos que

$$F(g_n + u_0) - F(g_n) = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(g_n + t u_0) dt = \int_0^1 f(g_n + t u_0) u_0 dt.$$

Em virtude da Observação 1.21, dado $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(s)| \le \varepsilon |s| + C_\varepsilon |s|^p \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}, \tag{1.49}$$

aqui estamos usando o fato que $f(s) = 0$ sempre que $s \leq 0$. Consequentemente, usando os dois resultados acima, obtemos

$$\begin{aligned} |F(g_n+u_0)-F(g_n)| &\leq \int_0^1 |f(g_n+tu_0)||u_0|dt \\ &\leq \int_0^1 (\varepsilon|g_n+tu_0|+C_\varepsilon|g_n+tu_0|^p)|u_0|dt \\ &\leq \int_0^1 [\varepsilon(|g_n|+t|u_0|)|u_0|+C_\varepsilon 2^p(|g_n|^p+t^p|u_0|^p)|u_0|]dt \\ &\leq \varepsilon|g_n||u_0|+\frac{\varepsilon}{2}|u_0|^2+C_\varepsilon 2^p|g_n|^p|u_0|+C_\varepsilon\frac{2^p}{p+1}|u_0|^{p+1}. \end{aligned}$$

Além disso, usando (1.49), temos que

$$|F(u_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|u_0|^2+\frac{C_\varepsilon}{p+1}|u_0|^{p+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |F(g_n+u_0)-F(g_n)-F(u_0)| &\leq |F(g_n+u_0)-F(g_n)|+|F(u_0)| \\ &\leq \varepsilon|g_n||u_0|+\varepsilon|u_0|^2+C_1(\varepsilon)|g_n|^p|u_0|+C_2(\varepsilon)|u_0|^{p+1} \\ &\leq C(|g_n||u_0|+|u_0|^2+|g_n|^p|u_0|+|u_0|^{p+1}), \end{aligned}$$

onde estamos considerando $\varepsilon = 1$ e $C = \max\{1, C_1, C_2\}$. Agora, usando a desigualdade de Young, para cada $\epsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned} |g_n||u_0| &\leq \epsilon|g_n|^2+C_\epsilon|u_0|^2, \\ |g_n|^p|u_0| &\leq \epsilon(|g_n|^p)^{\frac{p+1}{p}}+C_\epsilon|u_0|^{p+1}=\epsilon|g_n|^{p+1}+C_\epsilon|u_0|^{p+1}, \end{aligned}$$

onde $C_\epsilon = (\epsilon r)^{-s/r}s^{-1}$, $r = s = 2$ na primeira desigualdade e $r = (p+1)/p$, $s = p+1$ na segunda. Desta forma, obtemos

$$\begin{aligned} &|F(g_n+u_0)-F(g_n)-F(u_0)| \\ &\quad\leq C[(\epsilon|g_n|^2+C_\epsilon|u_0|^2)+|u_0|^2+(\epsilon|g_n|^{p+1}+C_\epsilon|u_0|^{p+1})+|u_0|^{p+1}] \\ &\quad= C[(\epsilon|g_n|^2+\widetilde{C}_\epsilon|u_0|^2)+(\epsilon|g_n|^{p+1}+\widetilde{C}_\epsilon|u_0|^{p+1})]. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Definamos agora

$$f_{\epsilon,n}(x) = \max\{(|F(g_n+u_0)-F(g_n)-F(u_0)|)(x)-C\epsilon(|g_n|^2)(x)-C\epsilon(|g_n|^{p+1})(x),0\}.$$

Desde que $g_n = u_n - u_0$ e $u_n \rightharpoonup u_0$, a menos de subsequência, temos $g_n \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ o que implica que $F(g_n+u_0)-F(g_n)-F(u_0) \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Desse modo, pela definição de $f_{\epsilon,n}$, segue que

**(i)** $f_{\epsilon,n}(x) \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Além disso, usando a definição de $f_{\epsilon,n}$ e (1.50), temos

**(ii)** $0 \leq f_{\epsilon,n}(x) \leq C_3(|u_0|^2)(x)+C_4(|u_0|^{p+1})(x) =: h(x)$ com $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$, já que $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $2 < p+1 < \infty$ se $N = 1, 2$ e $2 < p+1 < 2^*$ se $N \geq 3$ e temos a imersão continua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq q < \infty$ se $N = 1, 2$ e para $2 \leq q \leq 2^*$ se $N \geq 3$.

Portanto, usando **(i)** e **(ii)** juntamente com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_{\epsilon,n}(x)dx \to 0 \quad \text{quando} \;\; n \to \infty. \tag{1.51}$$

Observe ainda pela definição de $f_{\epsilon,n}$ que

$$|F(g_n + u_0) - F(g_n) - F(u_0)| - C\epsilon|g_n|^2 - C\epsilon|g_n|^{p+1} \leq f_{\epsilon,n},$$

ou ainda,

$$|F(g_n + u_0) - F(g_n) - F(u_0)| \leq C\epsilon|g_n|^2 + C\epsilon|g_n|^{p+1} + f_{\epsilon,n}.$$

Consequentemente, usando a imersão contínua dada acima e a limitação da sequência $g_n$ ($g_n = u_n - u_0$, com $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ limitada), temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |F(g_n + u_0) - F(g_n) - F(u_0)|dx \\
&\qquad \leq \;\; C\epsilon\|g_n\|_2^2 + C\epsilon\|g_n\|_{p+1}^{p+1} + \int_{\mathbb{R}^N} f_{\epsilon,n}(x)dx \\
&\qquad \leq \;\; C_5\epsilon\|g_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 + C_6\epsilon\|g_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^{p+1} + \int_{\mathbb{R}^N} f_{\epsilon,n}(x)dx \\
&\qquad \leq \;\; \widetilde{C}\epsilon + \int_{\mathbb{R}^N} f_{\epsilon,n}(x)dx,
\end{aligned}$$

donde segue por (1.51) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(g_n + u_0) - F(g_n) - F(u_0)|dx \to 0,$$

como desejávamos.

Agora, usando (1.46), tudo que nos resta para provar o item (v) do Teorema 1.19 é mostrar que

$$I^\infty(u_n - u_0) \to \sum_{k=1}^{l} I^\infty(w^k). \tag{1.52}$$

Para isto, observemos inicialmente que, usando $(V_5)$ e o item (v) da Observação 1.2, temos $V(\infty) > 0$ e, consequentemente, a norma

$$\|u\|_\infty^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(\infty)u^2\right) dx$$

é equivalente a norma usual do espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$. Desse modo, podemos reescrever $I^\infty(u)$ do seguinte modo:

$$I^\infty(u) = \|u\|_\infty^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx.$$

Note que, fazendo $\xi_n = u_n - u_0$ e $\chi_n = \sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\|\xi_n\|_\infty^2 - \|\chi_n\|_\infty^2\right| &= |(\|\xi_n\|_\infty - \|\chi_n\|_\infty)(\|\xi_n\|_\infty + \|\chi_n\|_\infty)| \\
&\leq \|\xi_n - \chi_n\|_\infty(\|\xi_n\|_\infty + \|\chi_n\|_\infty).
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Além disso, usando o item **(iv)** deste Teorema (provado acima) e a equivalência das normas $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, temos

$$\|\xi_n - \chi_n\|_\infty = \|u_n - u_0 - \sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k)\|_\infty \to 0. \tag{1.54}$$

Por outro lado, fazendo a mudança de variável $z = x - y_n^k$ para $1 \leq k \leq l$, segue que $\|w^k(x - y_n^k)\|_\infty = \|w^k\|_\infty$ e, consequentemente, $\{\chi_n\} \subset H$ é limitada. Temos também que $\{\xi_n\} \subset H$ é limitada, pois $\{u_n\} \subset H$ é limitada. Daí, usando (1.53), concluímos que

$$\|\xi_n\|_\infty^2 - \|\chi_n\|_\infty^2 \to 0,$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2}\|u_n - u_0\|_\infty^2 - \frac{1}{2}\|\sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k)\|_\infty^2 \to 0.$$

Agora, usando argumentos semelhantes aos utilizados para provar o item **(b)** da Afirmação 1, obtemos

$$\|\sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k)\|_\infty^2 \to \sum_{k=1}^{l} \|w^k\|_\infty^2.$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{2}\|u_n - u_0\|_\infty^2 \to \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l} \|w^k\|_\infty^2,$$

ou, equivalentemente,

$$I^\infty(u_n - u_0) + \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n - u_0)dx \to \sum_{k=1}^{l} I^\infty(w^k) + \sum_{k=1}^{l} \int_{\mathbb{R}^N} F(w^k)dx. \tag{1.55}$$

Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[F(u_n - u_0) - F\left(\sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k)\right)\right] dx \to 0. \tag{1.56}$$

De fato, considerando (novamente) $\xi_n = u_n - u_0$ e $\chi_n = \sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k)$, temos

$$F(\xi_n) - F(\chi_n) = \int_0^1 \frac{d}{dt}F(\chi_n + t(\xi_n - \chi_n))dt = \int_0^1 f(\chi_n + t(\xi_n - \chi_n))(\xi_n - \chi_n)dt.$$

Daí, usando (1.49), obtemos

$$\begin{aligned}
&|F(\xi_n) - F(\chi_n)| \\
&\quad \leq \int_0^1 |f(\chi_n + t(\xi_n - \chi_n))||\xi_n - \chi_n|dt \\
&\quad \leq \int_0^1 (\varepsilon|\chi_n + t(\xi_n - \chi_n))| + C_\varepsilon|\chi_n + t(\xi_n - \chi_n))|^p)|\xi_n - \chi_n|dt \\
&\quad \leq \int_0^1 [\varepsilon(|\chi_n| + t|\xi_n - \chi_n|)|\xi_n - \chi_n| + C_\varepsilon 2^p(|\chi_n|^p + t^p|\xi_n - \chi_n|^p)|\xi_n - \chi_n|]dt \\
&\quad \leq \varepsilon|\chi_n||\xi_n - \chi_n| + \frac{\varepsilon}{2}|\xi_n - \chi_n|^2 + C_\varepsilon 2^p|\chi_n|^p|\xi_n - \chi_n| + C_\varepsilon \frac{2^p}{p+1}|\xi_n - \chi_n|^{p+1}.
\end{aligned}$$

Logo, usando a desigualdade de Hölder, as imersões contínuas de Sobolev, a limitação da sequência $\{\chi_n\} \subset H$ e a equivalência das normas $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |F(\xi_n) - F(\chi_n)|dx \leq\ & C_1(\varepsilon)\|\chi_n\|_2\|\xi_n - \chi_n\|_2 + C_2(\varepsilon)\|\xi_n - \chi_n\|_2 \\ & + C_3(\varepsilon)\|\chi_n\|_{p+1}^p\|\xi_n - \chi_n\|_{p+1} + C_4(\varepsilon)\|\xi_n - \chi_n\|_{p+1} \\ \leq\ & \widetilde{C}_1(\varepsilon)\|\xi_n - \chi_n\|_\infty + \widetilde{C}_2(\varepsilon)\|\xi_n - \chi_n\|_\infty \\ & + \widetilde{C}_3(\varepsilon)\|\xi_n - \chi_n\|_\infty + \widetilde{C}_4(\varepsilon)\|\xi_n - \chi_n\|_\infty \\ \leq\ & C_5(\varepsilon)\|\xi_n - \chi_n\|_\infty,\end{aligned}$$

onde $C_5(\varepsilon) = \max\{\widetilde{C}_1(\varepsilon), \widetilde{C}_2(\varepsilon), \widetilde{C}_3(\varepsilon), \widetilde{C}_4(\varepsilon)\} > 0$. Portanto, segue de (1.54) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(\xi_n) - F(\chi_n)|dx \to 0,$$

e assim obtemos (1.56). Agora, combinando (1.55) e (1.56), temos que

$$I^\infty(u_n - u_0) + \int_{\mathbb{R}^N} F\left(\sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k)\right) dx \to \sum_{k=1}^{l} I^\infty(w^k) + \sum_{k=1}^{l} \int_{\mathbb{R}^N} F(w^k)dx,$$

ou ainda,

$$I^\infty(u_n - u_0) + \int_{\mathbb{R}^N} \left[F\left(\sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k)\right) - \sum_{k=1}^{l} F(w^k)\right] dx \to \sum_{k=1}^{l} I^\infty(w^k).$$

Desta forma, para provar (1.52) é suficiente mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[F\left(\sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k)\right) - \sum_{k=1}^{l} F(w^k)\right] dx \to 0.$$

Para melhor entendimento, provaremos o resultado acima para o caso $l = 3$, pois o caso $l$ geral é feito analogamente (de forma indutiva). Inicialmente, fazendo a mudança de variável $z = x - y_n^1$ e escrevendo $g_n^1 = w^2(\cdot + y_n^1 - y_n^2) + w^3(\cdot + y_n^1 - y_n^3)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} F\left(\sum_{k=1}^{3} w^k(\cdot - y_n^k)\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} F(w^1(x - y_n^1) + w^2(x - y_n^2) + w^3(x - y_n^3))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} F(w^1 + g_n^1)dz,\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} F\left(\sum_{k=1}^{3} w^k(\cdot - y_n^k)\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(w^1)dx \\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}^N} \left[F(w^1 + g_n^1) - F(w^1) - F(g_n^1)\right] dx + \int_{\mathbb{R}^N} F(g_n^1)dx.\end{aligned}$$

Em virtude de (1.45) temos que $g_n^1 \rightharpoonup 0$ e assim, usando argumentos análogos aos utilizados para obter (1.48), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[F(w^1 + g_n^1) - F(w^1) - F(g_n^1)\right] dx \to 0.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} F\left(\sum_{k=1}^{3} w^k(\cdot - y_n^k)\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(w^1)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(w^2)dx \\
&\quad = o(1) + \int_{\mathbb{R}^N} F(g_n^1) - \int_{\mathbb{R}^N} F(w^2)dx \qquad (1.57)\\
&\quad = o(1) + \int_{\mathbb{R}^N} F(w^2(\cdot + y_n^1 - y_n^2) + w^3(\cdot + y_n^1 - y_n^3))dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(w^2)dx.
\end{aligned}$$

Além disso, fazendo a mudança de variável $z = x + y_n^1 - y_n^2$ e escrevendo $g_n^2 = w^3(\cdot + y_n^2 - y_n^3)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(w^2(\cdot + y_n^1 - y_n^2) + w^3(\cdot + y_n^1 - y_n^3))dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(w^2 + g_n^2)dz$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} F(w^2(\cdot + y_n^1 - y_n^2) + w^3(\cdot + y_n^1 - y_n^3))dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(w^2)dx \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^N} \left[F(w^2 + g_n^2)dx - F(w^2) - F(g_n^2)\right] dx + \int_{\mathbb{R}^N} F(g_n^2)dx.
\end{aligned}$$

Novamente, em virtude de (1.45), temos que $g_n^2 \rightharpoonup 0$ e como em (1.48), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[F(w^2 + g_n^2)dx - F(w^2) - F(g_n^2)\right] dx \to 0.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(w^2(\cdot + y_n^1 - y_n^2) + w^3(\cdot + y_n^1 - y_n^3))dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(w^2)dx = o(1) + \int_{\mathbb{R}^N} F(g_n^2)dx$$

Daí, usando (1.57) e fazendo a mudança de variável $z = x + y_n^2 - y_n^3$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} F\left(\sum_{k=1}^{3} w^k(\cdot - y_n^k)\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(w^1)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(w^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(w^3)dx \\
&\quad = o(1) + \int_{\mathbb{R}^N} F(g_n^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(w^3)dx \\
&\quad = o(1) + \int_{\mathbb{R}^N} F(w^3(\cdot + y_n^2 - y_n^3))dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(w^3)dx \\
&\quad = o(1) + \int_{\mathbb{R}^N} F(w^3)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(w^3)dx \\
&\quad = o(1),
\end{aligned}$$

como desejávamos. ■

# Capítulo 2

# Um problema elíptico assintoticamente linear e autônomo no infinito

O principal objetivo deste capítulo é apresentar alguns resultados de existência de solução fraca não-negativa não-trivial, que podem ser encontrados em Jeanjean-Tanaka [9], para o problema elíptico semilinear

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \tag{2.1}$$

onde $N \geq 2$ e assumimos que o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ seja contínuo e satisfaça as seguintes condições:

$(W_1)$ Existe $\alpha > 0$ tal que $V(x) \geq \alpha$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

$(W_2)$ $\lim\limits_{|x| \to \infty} V(x) = V(\infty) \in (0, \infty)$.

A respeito da não-linearidade $f(u)$ pedimos que $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ seja contínua e satisfaça as seguintes hipóteses:

$(g_1)$ $\lim\limits_{s \to 0^+} f(s)s^{-1} = 0$;

$(g_2)$ Existe $a \in (0, \infty)$ tal que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s} = a > \inf \sigma(-\Delta + V(x)),$$

onde $\sigma(-\Delta + V(x))$ denota o espectro do operador auto-adjunto

$$-\Delta + V(x) : H^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N).$$

**Observação 2.1** **(i)** *Como estamos buscando soluções não-negativas não-trivias para o prolema* (2.1)*, podemos assumir sem restrição que* $f(s) = 0$ *para todo* $s \leq 0$*. Consequentemente,* $F(s) = \int_0^s f(t)dt = 0$ *para todo* $s \leq 0$*.*

**(ii)** *Segue imediatamente da continuidade de* $V$ *e por* $(W_2)$ *que o potencial* $V$ *é limitado, isto é, existe* $M > 0$ *tal que* $|V(x)| \leq M$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$*. Usaremos este fato ao longo* *deste capítulo.*

**(iii)** *As principais características do prolema dado em* (2.1) *são que o problema associado no "infinito" é autônomo e que a não-linearidade $f$ é assintoticamente linear.*

**(iv)** *Desde que* $F(s) = \int_0^s f(t)dt \to +\infty$ *quando* $s \to +\infty$, *segue por* $(g_2)$ *que*

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{F(s)}{s^2} = \lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{2s} = \frac{1}{2}a.$$

**(v)** *Como* $F(0) = 0$, *segue por* $(g_1)$ *que*

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{F(s)}{s^2} = \lim_{s\to 0^+} \frac{f(s)}{2s} = 0.$$

Os seguintes teoremas contém os resultados principais deste capítulo:

**Teorema 2.2** *Suponha que* $(W_1)$, $(W_2)$, $(g_1)$, $(g_2)$ *ocorram e que* $F(s)$ *satisfaça a condição:*
$(g_3)$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\frac{2F(s)}{s^2} \le V(\infty) - \delta \quad \textit{para todo} \;\; s \in \mathbb{R}^+.$$

*Então* (2.1) *tem uma solução não-negativa não-trivial.*

**Teorema 2.3** *Assuma* $(W_1)$, $(W_2)$, $(g_1)$, $(g_2)$ *e que as condições, abaixo, sejam satisfeitas:*
$(W_3)$ $V(x) \le V(\infty)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$;
$(g_4)$ *Definindo* $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *por* $G(s) = \frac{1}{2}f(s)s - F(s)$,
(i) $G(s) \ge 0$ *para todo* $s \ge 0$;
(ii) *Existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\frac{2F(s)}{s^2} \ge V(\infty) - \delta \Rightarrow G(s) \ge \delta.$$

*Então* (2.1) *tem uma solução não-negativa não-trivial.*

**Observação 2.4** **(i)** *A condição* $G(s) \ge 0$ *para todo* $s \ge 0$ *implica que* $2F(s)s^{-2}$ *é uma função não-decrescente para* $s > 0$. *Logo, como um caso especial,* $(g_3)$ *ocorre sob as condições:* $G(s) \ge 0$, *para todo* $s \ge 0$ *e* $a < V(\infty)$. *Com efeito,*

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{2F(s)}{s^2}\right) = \frac{2f(s)s^2 - 2F(s)2s}{s^4} = \frac{4s(\frac{1}{2}f(s)s - F(s))}{s^4} = 4\frac{G(s)}{s^3} \ge 0$$

*para todo* $s > 0$, *implicando que* $2F(s)s^{-2}$ *é uma função não-decrescente para* $s > 0$, *como desejávamos. Além disso, pelo item (iv) da* Observação 2.1, *temos que*

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{2F(s)}{s^2} = a,$$

*ou seja, dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $s_0 > 0$ *tal que*

$$\frac{2F(s)}{s^2} < a + \varepsilon \quad \textit{sempre que} \;\; s > s_0.$$

*Portanto, assumindo que $a < V(\infty)$ e tomando $\varepsilon = (V(\infty) - a)/2 > 0$, existe $\delta > 0$ $(0 < \delta \leq (V(\infty) - a) - \varepsilon)$ tal que*

$$\frac{2F(s)}{s^2} < a + \varepsilon \leq V(\infty) - \delta \quad \textit{sempre que} \ \ s > s_0. \tag{2.2}$$

*Por outro lado, se assumirmos que $G(s) \geq 0$ para todo $s \geq 0$, já vimos que $2F(s)s^{-2}$ é uma função não-decrescente para $s > 0$. Assim, tomando $s_1 > s_0$, segue por (2.2) que*

$$\frac{2F(s)}{s^2} \leq \frac{2F(s_0)}{s_0^2} \leq \frac{2F(s_1)}{s_1^2} < V(\infty) - \delta \quad \textit{sempre que} \ \ 0 < s \leq s_0.$$

*Portanto,*

$$\frac{2F(s)}{s^2} \leq V(\infty) - \delta \quad \textit{para todo} \ \ s \in \mathbb{R}^+$$

*o que nos fornece $(g_3)$.*

**(ii)** *A condição $(g_4)$ ocorre se $f(s)s^{-1}$ é uma função crescente para $s > 0$. Com efeito, assuma que $f(s)s^{-1}$ é uma função crescente para $s > 0$ e observe que, se $0 < s < t$ então*

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_0^t f(\tau)d\tau = \int_0^s f(\tau)d\tau + \int_s^t f(\tau)d\tau \\
&= F(s) + \int_s^t \tau\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau < F(s) + \frac{f(t)}{t}\int_s^t \tau\, d\tau \\
&= F(s) + \frac{f(t)}{t}\left[\frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2}\right] = F(s) + \frac{1}{2}f(t)t - \frac{f(t)}{t}\frac{s^2}{2} \\
&< F(s) + \frac{1}{2}f(t)t - \frac{f(s)}{s}\frac{s^2}{2} = F(s) + \frac{1}{2}f(t)t - \frac{1}{2}f(s)s
\end{aligned}$$

*ou, equivalentemente,*

$$G(s) = \frac{1}{2}f(s)s - F(s) < \frac{1}{2}f(t)t - F(t) = G(t).$$

*Desta forma, $G(s)$ é uma função crescente para $s > 0$. Em particular, $G(s) > 0$ para todo $s > 0$ e isto nos fornece $(g_4)$(i), já que $G(0) = 0$. Para mostrar $(g_4)$(ii), argumentamos por contradição. Suponha que $(g_4)$(ii) não seja válida, então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $s_n > 0$ tal que*

$$\frac{2F(s_n)}{s_n^2} \geq V(\infty) - \frac{1}{n}\,, \tag{2.3}$$

*com*

$$G(s_n) < \frac{1}{n}$$

*isto é, $G(s_n) \to 0$. Neste caso, necessariamente, $s_n \to 0^+$. De fato, se $s_n \nrightarrow 0^+$, então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $n > n_0$ satisfazendo $s_n \geq \varepsilon_0$, e como, $G(s)$ é uma função crescente para $s > 0$ e, em particular, satisfaz $G(s) > 0$ para todo $s > 0$, obtemos*

$$G(s_n) \geq G(\varepsilon_0) > 0,$$

*o que contradiz o fato de* $G(s_n) \to 0$. *Assim, usando* (2.3) *e o item (v) da* Observação 2.1, *temos*

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{2F(s_n)}{s_n^2} \geq V(\infty),$$

*o que é um absurdo, pois* $V(\infty) \in (0,\infty)$ *(veja hipótese* $(W_2)$*). Portanto,* $(g_4)$(ii) *é satisfeita.*

**(iii)** *Sob as hipóteses do* Teorema 2.3, *podemos também mostrar a existência de uma solução de energia mínima para* (2.1). *Veja, neste caso, o* Teorema 2.15 *da* Seção 2.5.

**(iv)** *Na hipótese* $(g_4)$(ii) *do* Teorema 2.3 *podemos assumir, sem perda de generalidade, que* $V(\infty) - \delta \geq 0$. *De fato, por* $(g_4)$(ii), *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\frac{2F(s)}{s^2} \geq V(\infty) - \delta \Rightarrow G(s) \geq \delta. \tag{2.4}$$

*Logo, tomando* $0 < \widetilde{\delta} \leq \delta$, *obtemos*

$$\frac{2F(s)}{s^2} \geq V(\infty) - \widetilde{\delta} \geq V(\infty) - \delta.$$

*Consequentemente, usando* (2.4), *temos*

$$G(s) \geq \delta \geq \widetilde{\delta},$$

*isto é, a hipótese* $(g_4)$(ii) *continua válida para todo* $\widetilde{\delta} > 0$ *tal que* $\widetilde{\delta} \leq \delta$. *Em particular, podemos escolher* $0 < \widetilde{\delta}_1 \leq \delta$ *tal que* $V(\infty) - \widetilde{\delta}_1 \geq 0$, *pois* $V(\infty) > 0$ *(veja hipótese* $(W_2)$*).*

Uma classe de exemplos para o potencial $V(x)$, que satisfaz as hipóteses $(W_1)$, $(W_2)$ e $(W_3)$ dos Teoremas 2.2 e 2.3, é dada por:

$$V(x) = \frac{k|x|}{1+|x|} + \alpha,$$

onde $k$ e $\alpha$ são constantes positivas adequadas.

Por outro lado, usando os itens (i) e (ii) da Observação anterior, podemos exibir os seguintes exemplos de funções $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ que satisfazem as hipóteses $(g_1)$, $(g_2)$, $(g_3)$ e $(g_4)$ dos Teoremas 2.2 e 2.3:

$$f(s) = \frac{\widetilde{k}s^2}{1+s}$$

onde $\widetilde{k}$ é uma constante positiva adequada.

Os Teoremas 2.2 e 2.3 serão provados usando métodos variacionais, isto é, associamos a (2.1) o funcional energia $I : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx$$

e almejamos encontrar pontos críticos para $I$, que serão as soluções de (2.1).

Nosso espaço ambiente será $H^1(\mathbb{R}^N) \equiv H$ munido com a norma

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx,$$

a qual é equivalente a norma padrão de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Com efeito, por $(W_1)$, temos

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \alpha \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \\ &\geq \min\{1,\alpha\} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2)dx = C_1 \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)},\end{aligned}$$

e pelo item (ii) da Observação 2.1, existe $M > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + M \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \\ &\leq \max\{1,M\} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2)dx = C_2 \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Usaremos também a notação

$$\|u\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{para todo } \ p \in [1,\infty).$$

Para provarmos os Teoremas 2.2 e 2.3, mostraremos que o funcional $I$ associado ao problema (2.1) possui uma geometria do Passo da Montanha. Assim, obtemos, por Ekeland [6], a existência de uma sequência de Cerami no nível c do Passo da Montanha. Em seguida, mostraremos que essa sequência é limitada (usando o princípio de concentração de compacidade dado por Lions [15, 16]) e que, a menos de subsequência, converge fracamente para um ponto crítico não-trivial do funcional $I$.

**Definição 2.5** *Dizemos que $\{u_n\} \subset H$ é uma sequência de Cerami para o funcional $I$ no nível $c$, se*

$$I(u_n) \to c \quad e \quad \|I'(u_n)\|_{H'}(1 + \|u_n\|) \to 0 \quad quando \ \ n \to \infty,$$

*onde $H'$ denota o espaço dual de $H$. Em particular,*

$$I(u_n) \to c \quad e \quad I'(u_n) \to 0,$$

*isto é, $\{u_n\} \subset H$ é uma Sequência de Palais-Smale para $I$ no nível $c$. Note ainda que se $\{u_n\}$ é uma sequência de Cerami então*

$$I'(u_n)u_n \to 0.$$

## 2.1 Geometria do Passo da Montanha para o funcional $I$

Nesta seção, provaremos que, sob as hipóteses $(W_1)$, $(g_1)$ e $(g_2)$, o funcional $I$ tem uma geometria do Passo da Montanha. Visto que $I(0) = 0$, este resultado é uma consequência imediata dos dois seguintes lemas:

**Lema 2.6** *Suponha que $(W_1)$, $(g_1)$ e $(g_2)$ ocorram. Então*

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + o(\|u\|^2) \quad e \quad I'(u)u = \|u\|^2 + o(\|u\|^2)$$

*quando $u \to 0$ em $H$.*

**Prova.** Desde que

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \quad \text{e} \quad I'(u)u = \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx,$$

então, para provarmos o Lema, é suficiente mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx = o(\|u\|^2) \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx = o(\|u\|^2).$$

Para isto, fixemos $2 < p < 2^*$ se $N \geq 3$ e $2 < p < \infty$ se $N = 2$. Analogamente ao item (i) da Observação 1.3 do Capítulo 1, sob as hipóteses $(g_1)$ e $(g_2)$, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq \varepsilon|s| + C_\varepsilon|s|^{p-1} \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

e, ainda,

$$|F(s)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + \frac{C_\varepsilon}{p}|s|^p \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Agora, como a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ é contínua para $2 \leq q \leq 2^*$ se $N \geq 3$ e $2 \leq q < \infty$ se $N = 2$, usando (2.6) e a equivalência das normas $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ e $\|\cdot\|$, obtemos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_2^2 + \frac{C_\varepsilon}{p}\|u\|_p^p \leq C_1\frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 + C_2\frac{C_\varepsilon}{p}\|u\|^p,$$

e desde que $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx = o(\|u\|^2) \quad \text{quando} \quad u \to 0 \text{ em } H.$$

Analogamente, usando (2.5), temos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx\right| \leq C_3\frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 + C_4\frac{C_\varepsilon}{p}\|u\|^p,$$

e assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx = o(\|u\|^2) \quad \text{quando} \quad u \to 0 \text{ em } H,$$

o que conclui nossa demonstração. ■

**Corolário 2.7** *Assuma $(W_1)$, $(g_1)$ e $(g_2)$. Então existe $\rho_0 > 0$ tal que*

(i) *para qualquer ponto crítico não-trivial $u$ de $I$, temos*

$$\|u\| \geq \rho_0;$$

(ii) *para qualquer sequência de Palais-Smale* $\{u_n\} \subset H$ *para* $I$ *no nível* $b \neq 0$, *temos*

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n\| \geq \rho_0.$$

**Prova.** Provemos inicialmente (i). Suponha, por contradição, que existe uma sequência $\{u_n\} \subset H$ de pontos críticos não-triviais de $I$ com $u_n \to 0$ em $H$. Assim, pelo Lema 2.6, obtemos

$$0 = \frac{I'(u_n)u_n}{\|u_n\|^2} = 1 + \frac{o(\|u_n\|^2)}{\|u_n\|^2},$$

o que é um absurdo, já que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o(\|u_n\|^2)}{\|u_n\|^2} = 0.$$

Passemos, agora, a prova de (ii). Suponha, por contradição, que exista uma sequência de Palais-Smale $\{u_n\} \subset H$ para $I$ no nível $b \neq 0$ tal que $\liminf_{n\to\infty} \|u_n\| = 0$. Assim, existe uma subsequência $\{v_n\}$ de $\{u_n\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|v_n\| = 0$, donde segue, pelo Lema 2.6, que

$$b = \lim_{n\to\infty} I(v_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\|v_n\|^2 + o(\|v_n\|^2)\right) = 0,$$

o que é uma contradição. ∎

**Lema 2.8** *Suponha que* $(W_1)$, $(g_1)$ *e* $(g_2)$ *ocorram. Então, dado* $\rho > 0$, *existe* $v \in H$, $\|v\| > \rho$ *tal que* $I(v) < 0$.

**Prova.** Visto que o operador $-\Delta + V(x)$ é auto-adjunto, o ínfimo do seu espectro pode ser caracterizado da seguinte forma (veja Brezis [4]):

$$\inf \sigma(-\Delta + V(x)) = \inf_{u\in H:\|u\|_2=1} \langle -\Delta u + V(x)u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \inf_{u\in H:\|u\|_2=1} \|u\|^2.$$

Além disso, por $(g_2)$, $\inf \sigma(-\Delta + V(x)) < a$. Logo, a caracterização acima juntamente com a definição de ínfimo nos permite achar $\widetilde{u} \in H$ tal que $\|\widetilde{u}\|_2 = 1$ e $\|\widetilde{u}\|^2 < a$. Podemos supor sem restrição que $\widetilde{u} \geq 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ (basta substituir, se necessário, $\widetilde{u}$ por $|\widetilde{u}|$).

Afirmamos inicialmente que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(t\widetilde{u})}{t^2} dx = \frac{1}{2}a.$$

Para provar nossa afirmação, analisaremos dois casos: $\widetilde{u}(x) > 0$ e $\widetilde{u}(x) = 0$.

<u>1º caso</u>: Seja $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $\widetilde{u}(x) > 0$. Por $(g_2)$ (veja o item (iv) da Observação 2.1), temos

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{F(t\widetilde{u}(x))}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{F(t\widetilde{u}(x))}{(t\widetilde{u}(x))^2}(\widetilde{u}(x))^2 = \frac{1}{2}a(\widetilde{u}(x))^2.$$

<u>2º caso</u>: Seja $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $\widetilde{u}(x) = 0$. Como $F(0) = 0$, obtemos

$$\frac{F(t\widetilde{u}(x))}{t^2} = 0 = \frac{1}{2}a(\widetilde{u}(x))^2 \quad \text{para todo } \; t > 0.$$

Portanto, segue dos dois casos acima que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{F(t\widetilde{u}(x))}{t^2} = \frac{1}{2}a(\widetilde{u}(x))^2 \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{2.7}$$

Por outro lado, por $(g_1)$ e $(g_2)$, existe $C > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(s)}{s}\right| \leq C \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \tag{2.8}$$

e, assim,

$$\left|\frac{F(s)}{s^2}\right| \leq \frac{C}{2} \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{2.9}$$

Com efeito, por $(g_1)$, para $\varepsilon = 1$ exite $\eta > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(s)}{s}\right| < 1 \quad \text{sempre que} \quad 0 < s < \eta,$$

e por $(g_2)$, exite $R > \eta$ tal que

$$\left|\frac{f(s)}{s}\right| < 1 + a \quad \text{sempre que} \quad s > R.$$

Além disso, pela continuidade de $f$, existe $K > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(s)}{s}\right| \leq K \quad \text{sempre que} \quad \eta \leq s \leq R,$$

e, como $f(s) = 0$ para todo $s \leq 0$, tomando $C = \max\{a + 1, K\} > 0$, temos

$$\left|\frac{f(s)}{s}\right| \leq C \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Consequentemente,

$$|F(s)| = \left|\int_0^s f(t)dt\right| \leq \int_0^s |f(t)|dt \leq C\int_0^s |t|dt = C\frac{|s|^2}{2} \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

pois $f(s) = 0$ quando $s \leq 0$.
Desse modo, por (2.9), temos

$$\left|\frac{F(t\widetilde{u}(x))}{t^2}\right| \leq \frac{C}{2}(\widetilde{u}(x))^2 \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{2.10}$$

Além disso, como $u \in H$ então $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, donde segue que $g := \frac{C}{2}u^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Assim, usando (2.7) e (2.10), segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(t\widetilde{u})}{t^2}dx = \frac{1}{2}a\int_{\mathbb{R}^N}\widetilde{u}^2dx = \frac{1}{2}a \quad \text{pois} \quad \|\widetilde{u}\|_2 = 1,$$

o que prova nossa afirmação. Agora, usando este resultado, obtemos

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{I(t\widetilde{u})}{t^2} = \frac{1}{2}\|\widetilde{u}\|^2 - \lim_{t\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(t\widetilde{u})}{t^2}dx = \frac{1}{2}(\|\widetilde{u}\|^2 - a) < 0,$$

já que $\|\widetilde{u}\|^2 < a$. Logo, existe $t_0 > 0$ tal que $\|t_0\widetilde{u}\| > \rho$ e

$$\frac{I(t_0\widetilde{u})}{t_0^2} < 0,$$

e tomando $v = t_0\widetilde{u} \neq 0$, temos $\|v\| > \rho$ e $I(v) < 0$, como desejávamos. ∎

## 2.2 Existência de uma sequência de Cerami $\{u_n\}$ limitada em $H$

O objetivo desta seção é mostrar a existência de uma sequência de Cerami $\{u_n\}$ para $I$, no nível $c$ do passo da montanha, limitada em $H$. Inicialmente, segue como consequência dos Lemas 2.6 e 2.8 que o funcional $I$ possui uma geometria do Passo da Montanha. Assim, por Ekeland [6], garantimos a existência de uma sequência de Cerami para $I$ no nível $c$ do Passo da Montanha, ou seja, existe $\{u_n\} \subset H$ tal que

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \|I'(u_n)\|_{H'}(1 + \|u_n\|) \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Em particular, temos

$$I'(u_n) \to 0 \quad \text{e} \quad I'(u_n)u_n \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

O nosso próximo passo será mostrar que a sequência de Cerami $\{u_n\} \subset H$, acima obtida, é limitada. Almejando uma contradição, vamos assumir, durante toda esta seção, que $\{u_n\}$ não é limitada, isto é, que existe uma subsequência de $\{u_n\}$ (denotada ainda por $\{u_n\}$) satisfazendo $\|u_n\| \to \infty$. Considerando $w_n = u_n\|u_n\|^{-1}$, temos que $\{w_n\} \subset H$ é limitada ($\|w_n\| = 1$) e, a menos de subsequência, ocorre uma das seguintes alternativas:

1. **(anulamento)** Para todo $R > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} w_n^2 dx = 0.$$

2. **(não-anulamento)** Existem $d > 0$, $0 < R < \infty$ e $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} w_n^2 dx \geq d > 0.$$

Mostraremos, a partir dos lemas a seguir, que nenhum dos dois casos podem ocorrer, gerando assim nossa contradição.

**Lema 2.9** *Assuma $(W_1)$, $(W_2)$, $(g_1)$, $(g_2)$ e suponha que $(g_3)$ ou $(g_4)$ ocorra. Então o anulamento de $\{w_n\}$ é impossível.*

**Prova.** Suponha, por contradição, que ocorra o anulamento de $\{w_n\}$. Note que, por $(W_2)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $R_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V(\infty)) w_n^2 dx \right| \\
&\qquad \leq \int_{B_{R_0}} |V(x) - V(\infty)| w_n^2 dx + \int_{B_{R_0}^C} |V(x) - V(\infty)| w_n^2 dx \\
&\qquad \leq C_1 \int_{B_{R_0}} w_n^2 dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} w_n^2 dx \leq C_1 \int_{B_{R_0}} w_n^2 dx + \varepsilon C_2,
\end{aligned}$$

pois, o potencial $V$ é limitado e $\|w_n\| = 1$. Visto que estamos assumindo o anulamento de $\{w_n\}$, então, para todo $R > 0$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} w_n^2 dx = 0.$$

Em particular, para $B_{R_0} = B_{R_0}(0)$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_{R_0}} w_n^2 dx = 0,$$

e assim, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, a desigualdade acima nos fornece

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V(\infty))w_n^2 dx = 0.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_n|^2 + V(\infty)w_n^2)dx \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (V(\infty) - V(x))w_n^2 dx + \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_n|^2 + V(x)w_n^2)dx \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \|w_n\|^2 = 1.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$V(\infty) \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} w_n^2 dx \le \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_n|^2 + V(\infty)w_n^2)dx = 1,$$

ou ainda

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} w_n^2 dx \le \frac{1}{V(\infty)}. \tag{2.11}$$

Além disso, desde que $\|u_n\| \to \infty$ e $I(u_n) \to c$, segue que $I(u_n)\|u_n\|^{-2} \to 0$ e como

$$\frac{I(u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(u_n)}{\|u_n\|^2} dx \quad \text{e} \quad w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|},$$

obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(u_n)}{u_n^2} w_n^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(u_n)}{\|u_n\|^2} dx = \frac{1}{2}. \tag{2.12}$$

Agora, observe que (2.11) e (2.12) nos fornecem uma contradicão quando $(g_3)$ ocorre. De fato, se $(g_3)$ ocorre então existe $\delta > 0$ tal que

$$2\frac{F(s)}{s^2} \le V(\infty) - \delta \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}^+.$$

Por outro lado, como $V(\infty) > 0$ e $f(s) = 0$ quando $s < 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$2\frac{F(s)}{s^2} = 0 < V(\infty) - \delta_1 \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}^-.$$

Logo, tomando $\widetilde{\delta} = \min\{\delta, \delta_1\} > 0$, obtemos

$$2\frac{F(s)}{s^2} \le V(\infty) - \widetilde{\delta} \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

implicando, por (2.11) e (2.12), que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(u_n)}{u_n^2}w_n^2dx \le \frac{1}{2}(V(\infty)-\widetilde{\delta})\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} w_n^2dx\\ &\le \frac{1}{2}(V(\infty)-\widetilde{\delta})\frac{1}{V(\infty)} = \frac{1}{2}-\frac{\widetilde{\delta}}{2V(\infty)},\end{aligned}$$

o que é uma contradição.

Agora, suponha que $(g_4)$ ocorre e definamos para $\delta > 0$ dado em $(g_4)$ os conjuntos

$$\Omega_n = \left\{x\in\mathbb{R}^N; \frac{F(u_n(x))}{u_n(x)^2} \le \frac{1}{2}(V(\infty)-\delta)\right\}.$$

Note que se $u_n(x) < 0$ então $F(u_n(x)) = 0$. Por outro lado, se $u_n(x) > 0$, segue pelo item (i) da Observação 2.4 que $F(u_n(x)) \ge 0$ (pois estamos assumindo que $(g_4)$ ocorre). Portanto,

$$0 \le \frac{F(u_n(x))}{u_n(x)^2} \le \frac{1}{2}(V(\infty)-\delta) \quad \text{para todo } x\in\Omega_n.$$

Por outro lado, para todo $n\in\mathbb{N}$, segue pela definição de $\Omega_n$ que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(u_n)}{u_n^2}w_n^2dx &= \int_{\Omega_n}\frac{F(u_n)}{u_n^2}w_n^2dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n}\frac{F(u_n)}{u_n^2}w_n^2dx\\ &\le \frac{1}{2}(V(\infty)-\delta)\int_{\Omega_n} w_n^2dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n}\frac{F(u_n)}{u_n^2}w_n^2dx\\ &\le \frac{1}{2}(V(\infty)-\delta)\int_{\mathbb{R}^N} w_n^2dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n}\frac{F(u_n)}{u_n^2}w_n^2dx.\end{aligned}$$

Tomando o lim inf na desigualdade acima e usando o fato que $V(\infty)-\delta \ge 0$ (veja item (iv) da Observeção 2.4), segue por (2.11) e (2.12) que

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}(V(\infty)-\delta)\frac{1}{V(\infty)} + \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n}\frac{F(u_n)}{u_n^2}w_n^2dx,$$

ou ainda

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n}\frac{F(u_n)}{u_n^2}w_n^2dx \ge \frac{\delta}{2V(\infty)} > 0. \tag{2.13}$$

Afirmamos agora que

$$\limsup_{n\to\infty}|\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n| = \infty.$$

De fato, almejando uma contradição assumimos que $\limsup_{n\to\infty}|\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n| < \infty$. Como $\{w_n\}\subset H$ é limitada ($\|w_n\| = 1$) e estamos assumindo o anulamento de $\{w_n\}$, usando o Lema de Lions (Lema B.6 do Apêndice B), temos $\|w_n\|_q \to 0$ para todo $q\in(2,2^*)$. Assim, tomando $r$ e $s$ tais que

$$2 < 2r < 2^*, \text{ isto é, } 1 < r < \frac{2^*}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{r}+\frac{1}{s} = 1,$$

podemos usar a desigualdade de Hölder, juntamente com a hipótese de

$$\limsup_{n\to\infty}|\mathbb{R}^N\setminus\Omega_n| < \infty,$$

para obter

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} w_n^2 dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} w_n^{2r} dx \right)^{\frac{1}{r}} \left( \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} dx \right)^{\frac{1}{s}} \leq K \|w_n\|_{2r}^2.$$

Consequentemente, como $\|w_n\|_{2r} \to 0$, segue da desigualdade anterior que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} w_n^2 dx = 0.$$

Por outro lado, usando (2.9), temos

$$0 \leq \left| \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} \frac{F(u_n)}{u_n^2} w_n^2 dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} \left| \frac{F(u_n)}{u_n^2} w_n^2 \right| dx \leq \frac{C}{2} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} w_n^2 dx,$$

implicando, pelo limite acima, que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} \frac{F(u_n)}{u_n^2} w_n^2 dx = 0,$$

o que contradiz (2.13) e isto prova nossa afirmação.

Agora observe que, por $(g_4)$ (item (i)), $G(s) \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}^+$. Mais ainda, pelo item (ii) de $(g_4)$, temos $G(u_n(x)) \geq \delta$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_n$, e assim

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u_n) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} G(u_n) dx \geq \delta |\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n|.$$

Portanto, usando nossa afirmação (provada anteriormente), deduzimos da desigualdade acima que

$$\limsup_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} G(u_n) dx = +\infty.$$

Neste momento o fato que $\{u_n\}$ é uma sequência de Cerami para o funcional $I$ no nível $c$ do Passo da Montanha é de fundamental importância para gerarmos nossa contradição, pois, neste caso, a sequência $\{u_n\}$ satisfaz

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \|I'(u_n)\|_{H'}(1 + \|u_n\|) \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Em particular, da segunda convergência, temos que $I'(u_n)u_n \to 0$ (a necessidade desta condição não nos permite trabalharmos apenas com $\{u_n\}$ sendo uma sequência de Palais-Smale para I, pois não sabemos se a sequência $\{u_n\}$ é limitada). Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} G(u_n) dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) dx \\ &= I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n) u_n \to c, \end{aligned}$$

e esta contradição prova o lema. ■

Provaremos agora que o não-anulamento de $\{w_n\}$ também não pode ocorrer. Para isto, iremos supor (nos próximos dois lemas), por contradição, que corre o não-anulamento de $\{w_n\}$, isto é, existem $d > 0$, $R < \infty$ e $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tais que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{B_R(y_n)} w_n^2 dx \geq d > 0$$

e analisaremos dois casos: $\{y_n\}$ é limitada ou ilimitada (ou seja, a menos de subsequência $|y_n| \to \infty$).

**Lema 2.10** *Assuma $(W_1)$, $(W_2)$, $(g_1)$, $(g_2)$ e suponha que $\{y_n\}$ é limitada. Então o não-anulamento de $\{w_n\}$ é impossível.*

**Prova.** Suponha, por contradição, que ocorre o não-anulamento de $\{w_n\}$. Desde que $\{w_n\}$ é limitada ($\|w_n\| = 1$), então a menos de subsequência

$$\begin{aligned}
&w_n \rightharpoonup w \in H,\\
&w_n \to w \text{ em } L^q_{\text{loq}}(\mathbb{R}^N) \text{ para } q \in [2, 2^*[ \text{ se } N \geq 3 \text{ e para } q \geq 2 \text{ se } N = 2,\\
&w_n(x) \to w(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.
\end{aligned}$$

**Afirmação 1:** O limite fraco $w$ é não-negativo.

De fato, como $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ é limitada, é fácil ver que existe $R_0 > 0$ tal que $B_R(y_n) \subset B_{R_0}(0) \equiv B_{R_0}$, e assim

$$0 < d \leq \lim_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} w_n^2 dx \leq \lim_{n\to\infty} \int_{B_{R_0}} w_n^2 dx = \int_{B_{R_0}} w^2 dx,$$

donde segue que $w \neq 0$.

Além disso, como $\{u_n\}$ é uma sequência de Cerami, temos $\|I'(u_n)\|_{H^{-1}}(1 + \|u_n\|) \to 0$ e em particular, $\|I'(u_n)\|_{H'} \to 0$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla v + V(x) u_n v) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) v dx \to 0 \quad \text{para todo } \ v \in H.$$

Consequentemente, usando o fato que $\|u_n\| \to \infty$, obtemos

$$\frac{1}{\|u_n\|}\left[\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla v + V(x) u_n v) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) v dx\right] \to 0,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla w_n \nabla v + V(x) w_n v) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_n)}{u_n} w_n v dx \to 0 \quad \text{para todo } \ v \in H, \tag{2.14}$$

visto que, $w_n = u_n \|u_n\|^{-1}$.

Consideremos, agora, $w_n^- \equiv \max\{-w_n, 0\}$. Note que $\{w_n^-\}$ é limitada (pois $\{w_n\}$ é limitada) e que

$$\frac{f(u_n)}{u_n} w_n w_n^- = 0,$$

pois se $w_n > 0$ então, por definição, $w_n^- = 0$ e se $u_n \|u_n\|^{-1} = w_n \leq 0$ então $u_n < 0$, e assim, pelo item (i) da Observação 2.1, $f(u_n) = 0$.

Logo, fazendo $v = w_n^-$ em (2.14), obtemos

$$\|w_n^-\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_n^-|^2 + V(x)|w_n^-|^2) dx \to 0,$$

e portanto $\|w_n^-\| \to 0$. Desse modo, como $w_n(x) \to w(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e $w = w^+ - w^-$ (onde $w^+ \equiv \max\{w_n, 0\}$), segue que

$$w(x) = \lim_{n\to\infty} w_n(x) = \lim_{n\to\infty} (w_n^+(x) - w_n^-(x)) = \lim_{n\to\infty} w_n^+(x) \geq 0 \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

como desejávamos.

**Afirmação 2:** $w$ é um autovetor do operador $-\Delta + V(x)$ associado ao autovalor $a$.

De fato, como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H$, para provar que $-\Delta w + V(x)w = aw$ é suficiente verificar que, para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla w \nabla \varphi + V(x) w \varphi) dx = a \int_{\mathbb{R}^N} w \varphi dx. \tag{2.15}$$

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ fixa, porém arbitrária. Então segue por (2.14) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla w_n \nabla \varphi + V(x) w_n \varphi) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_n)}{u_n} w_n \varphi dx \to 0.$$

Além disso, como $w_n \rightharpoonup w$ em $H$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla w_n \nabla \varphi + V(x) w_n \varphi) dx \to \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla w \nabla \varphi + V(x) w \varphi) dx.$$

Portanto, usando as duas convergências acima, para provar (2.15), é suficiente mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_n)}{u_n} w_n \varphi dx \to a \int_{\mathbb{R}^N} w \varphi dx.$$

Afirmamos inicialmente que

$$\frac{f(u_n)}{u_n} w_n \varphi \to a w \varphi \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{2.16}$$

Com efeito, analisaremos dois casos: $w(x) = 0$ e $w(x) \neq 0$.

<u>1º caso</u>: Seja $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $w(x) = 0$. Por (2.8), temos

$$0 \leq \left| \frac{f(u_n(x))}{u_n(x)} w_n(x) \varphi(x) \right| \leq C |w_n(x)| |\varphi(x)|$$

e como $w_n(x) \to w_(x) = 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, segue pela desigualdade acima que

$$\frac{f(u_n(x))}{u_n(x)} w_n(x) \varphi(x) \to 0 = a w(x) \varphi(x).$$

<u>2º caso</u>: Seja $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $w(x) \neq 0$. Neste caso, temos necessariamente $u_n(x) \to +\infty$ pois

$$\frac{u_n(x)}{\|u_n\|} = w_n(x) \to w(x) \neq 0 \quad \text{e} \quad \|u_n\| \to \infty.$$

Logo, por $(g_2)$,

$$\frac{f(u_n(x))}{u_n(x)} \to a,$$

e, consequentemente,

$$\frac{f(u_n(x))}{u_n(x)} w_n(x) \varphi(x) \to a w(x) \varphi(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

o que conclui a prova de (2.16).

Consideremos, agora, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado tal que Supp$\varphi \subseteq \Omega$. Como $H^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^2(\Omega)$ e $\{w_n\} \subset H$ é limitada, temos $w_n \to w$ fortemente em $L^2(\Omega)$. Em particular, tomando uma subsequência se necessário, existe $h \in L^2(\Omega)$ tal que

$$|w_n(x)| \leq h(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \quad \text{para todo } \; n \in \mathbb{N}.$$

Desta forma, por (2.8), obtemos

$$\left| \frac{f(u_n(x))}{u_n(x)} w_n(x)\varphi(x) \right| \leq C|w_n(x)||\varphi(x)| \leq Ch(x)|\varphi(x)| \quad \text{q.t.p. em } \; \Omega, \tag{2.17}$$

com $g := h|\varphi| \in L^1(\Omega)$ pois, $h \in L^2(\Omega)$ e pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\int_\Omega g dx = \int_\Omega h|\varphi| dx \leq \|h\|_2 \|\varphi\|_2 < \infty.$$

Portanto, usando (2.16) e (2.17), segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_n)}{u_n} w_n \varphi dx = \int_\Omega \frac{f(u_n)}{u_n} w_n \varphi dx \to a \int_\Omega w\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} w\varphi dx,$$

como desejávamos.

**Afirmação 3:** Quando $a > \inf \sigma(-\Delta + V(x))$, o operador $-\Delta + V(x)$ não possui autovetor não-negativo associado ao autovalor $a$.

De fato, suponha, por contradição, que exista $u \in H$ não-negativa ($u \not\equiv 0$) tal que

$$-\Delta u + V(x)u = au \quad \text{em } \; \mathbb{R}^N. \tag{2.18}$$

Desde que $\inf \sigma(-\Delta + V(x)) < a$, existe uma constante $A$ satisfazendo

$$\inf \sigma(-\Delta + V(x)) < A < a.$$

Além disso, pela caracterização variacional de $\inf \sigma(-\Delta + V(x))$ (dada no Lema 2.8), existe $v \in H$ tal que

$$\frac{\|v\|^2}{\|v\|_2^2} < A.$$

Mais ainda, como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H$, podemos assumir que $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Com efeito, existe $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi_n \to v$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e, consequentemente, $\|\varphi_n\|^2 \to \|v\|^2$. Em particular, usando a imersão contínua de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$, também, temos que $\|\varphi_n\|_2^2 \to \|v\|_2^2$. Daí, obtemos

$$\frac{\|\varphi_n\|^2}{\|\varphi_n\|_2^2} \to \frac{\|v\|^2}{\|v\|_2^2} < A.$$

Assim, para $n = N$ suficientemente grande, considerando $\widetilde{v} := \varphi_N \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos que

$$\frac{\|\widetilde{v}\|^2}{\|\widetilde{v}\|_2^2} = \frac{\|\varphi_N\|^2}{\|\varphi_N\|_2^2} < A,$$

donde concluímos o resultado desejado.

Agora, seja $R > 0$ tal que $\operatorname{Supp} v \subset B_R \equiv B_R(0)$ e consideremos o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = au & \text{em} \quad B_R \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_R \end{cases}$$

Tome $\beta$ como sendo o ínfimo do espectro de $-\Delta + V(x)$ em $B_R$. Como no Lema 2.8, podemos caracterizar $\beta$ da seguinte forma:

$$\beta = \inf_{u \in H_0^1(B_R): \|u\|_{L^2(B_R)}=1} \langle -\Delta u + V(x)u, u\rangle_{L^2(B_R)} = \inf_{u \in H_0^1(B_R): \|u\|_{L^2(B_R)}=1} \|u\|^2.$$

Note que, por construção,

$$\beta \leq \frac{\|v\|^2}{\|v\|_2^2} < A < a. \tag{2.19}$$

Por outro lado, $\beta$ é um autovalor de $-\Delta + V(x)$ associado a um autovetor $v_R > 0$ em $B_R$ (este resultado é análogo ao encontrado para o problema de Dirichlet para o operador $-\Delta$ em $\Omega$ (dominio limitado), dado, por exemplo, em Evans [7]), isto é,

$$-\Delta v_R + V(x)v_R = \beta v_R \quad \text{em} \quad B_R.$$

Observe, ainda, que $\frac{\partial v_R}{\partial \eta} \leq 0$, pois dado $x_0 \in \partial B_R$, temos

$$\frac{\partial v_R}{\partial \eta}(x_0) = \lim_{t \to 0^-} \frac{v_R(x_0 + t\eta) - v_R(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0^-} \frac{v_R(x_0 + t\eta)}{t} \leq 0,$$

já que $v_R(x_0) = 0$ em $\partial B_R$ e $v_R > 0$. Assim, usando a fórmula de Green em $B_R$, obtemos

$$\begin{aligned}
\beta \int_{B_R} u v_R dx &= \int_{B_R} u(\beta v_R)dx = \int_{B_R} u(-\Delta v_R + V(x)v_R)dx \\
&= \int_{B_R} (-\Delta v_R)udx + \int_{B_R} V(x)v_R udx \\
&= \int_{B_R} \nabla v_R \nabla udx - \int_{\partial B_R} \frac{\partial v_R}{\partial \eta} ud\sigma + \int_{B_R} V(x)v_R udx \\
&\geq \int_{B_R} \nabla v_R \nabla udx + \int_{B_R} V(x)v_R udx \\
&= \int_{B_R} (-\Delta u)v_R dx + \int_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial \eta} v_R d\sigma + \int_{B_R} V(x)v_R udx \\
&= \int_{B_R} (-\Delta u)v_R dx + \int_{B_R} V(x)v_R udx \\
&= \int_{B_R} (-\Delta u + V(x)u)v_R dx = a \int_{B_R} u v_R dx,
\end{aligned}$$

pois $u$ é não-negativa e satisfaz (2.18). Além disso, como $u \geq 0$, $u \not\equiv 0$ e $v_R > 0$, temos $\int_{B_R} u v_R dx > 0$ e a desigualdade acima nos garante que $\beta \geq a$, o que contradiz (2.19). Isto conclui a prova da afirmação 3.

Por fim, visto que estamos assumindo $(g_2)$, temos

$$a > \inf \sigma(-\Delta + V(x)).$$

Por outro lado, combinando as Afirmações 1 e 2, segue que $w$ é um autovetor não-negativo associado ao autovalor $a$, contradizendo assim a afirmação 3. Desta forma, o Lema 2.10 está provado. ■

**Lema 2.11** *Assuma $(W_1)$, $(W_2)$, $(g_1)$, $(g_2)$ e suponha que, a menos de subsequência, $|y_n| \to \infty$. Então o não-anulamento de $\{w_n\}$ é impossível.*

**Prova.** Suponha, por contradição, que o não-anulamento de $\{w_n\}$ ocorre e definamos $\widetilde{u}_n(x) = u_n(x + y_n)$ e $\widetilde{w}_n(x) = w_n(x + y_n)$. Fazendo a mudança de variável $z = x + y_n$, temos claramente $\|\widetilde{w}_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|w_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, e como $\|w_n\| = 1$ e as normas $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes, segue que $\{\widetilde{w}_n\} \subset H$ também é limitada. Assim, tomando uma subsequência se necessário, temos

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{w}_n \rightharpoonup \widetilde{w} \in H,\\
&\widetilde{w}_n \to \widetilde{w} \quad \text{em } L^q_{\text{loq}}(\mathbb{R}^N) \text{ para } q \in [2, 2^*[ \text{ se } N \geq 3 \text{ e para } q \geq 2 \text{ se } N = 2,\\
&\widetilde{w}_n(x) \to \widetilde{w}(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.
\end{aligned}
$$

Além disso, fazendo a mudança de variável $x = z - y_n$, isto é, $z = x + y_n$ segue do não-anulamento de $\{w_n\}$ que

$$
\begin{aligned}
0 < d &\leq \lim_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} (w_n(z))^2 dz = \lim_{n\to\infty} \int_{B_R} (w_n(x + y_n))^2 dx\\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{B_R} (\widetilde{w}_n(x))^2 dx = \int_{B_R} (\widetilde{w}(x))^2 dx,
\end{aligned}
$$

e assim $\widetilde{w} \neq 0$.

Mostraremos, agora, que $\widetilde{w}$ satisfaz

$$
-\Delta \widetilde{w} + V(\infty)\widetilde{w} = a\widetilde{w},
$$

e como o operador $-\Delta$ não possui autovetor em $\mathbb{R}^N$ (veja Corolário B.8 do Apêndice B), isto nos dará uma contradição, donde concluímos a prova do lema.

Para provar que $-\Delta \widetilde{w} + V(\infty)\widetilde{w} = a\widetilde{w}$ é suficiente verificar que para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos

$$
\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla \widetilde{w} \nabla \varphi + V(\infty)\widetilde{w}\varphi) dx = a \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{w}\varphi dx. \tag{2.20}
$$

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ fixa, porém arbitrária. Como $\{u_n\}$ é uma sequência de Cerami, temos, em particular, $\|I'(u_n)\|_{H^{-1}} \to 0$. Consequentemente, definindo $\varphi_n(x) := \varphi(x - y_n)$ e fazendo a mudança de variável $z = x - y_n$, é imediato que $\|\varphi_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, isto é, $\varphi(\cdot - y_n)$ é limitada e assim $I'(u_n)\varphi(\cdot - y_n) \to 0$, ou seja,

$$
\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla \varphi(x - y_n) + V(x) u_n \varphi(x - y_n)) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)\varphi(x - y_n) dx \to 0.
$$

Daí, usando o fato que $\|u_n\| \to \infty$, obtemos

$$
\frac{1}{\|u_n\|} \left[ \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla \varphi(x - y_n) + V(x) u_n \varphi(x - y_n)) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)\varphi(x - y_n) dx \right] \to 0,
$$

ou ainda,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla w_n \nabla \varphi(x-y_n) + V(x) w_n \varphi(x-y_n))dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_n)}{u_n} w_n \varphi(x-y_n)dx \to 0,$$

visto que $w_n = u_n \|u_n\|^{-1}$. Assim, usando mudança de variável e as definições de $\widetilde{u}_n$ e de $\widetilde{w}_n$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla \widetilde{w}_n \nabla \varphi + V(x+y_n)\widetilde{w}_n \varphi)dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\widetilde{u}_n)}{\widetilde{u}_n} \widetilde{w}_n \varphi dx \to 0.$$

Além disso, como $\widetilde{w}_n \rightharpoonup \widetilde{w}$ em $H$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \widetilde{w}_n \nabla \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \widetilde{w} \nabla \varphi dx.$$

Por outro lado, como na prova do Lema 2.10 (usando argumentos semelhantes), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\widetilde{u}_n)}{\widetilde{u}_n} \widetilde{w}_n \varphi dx \to a \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{w} \varphi dx,$$

onde as convergências acima são todas quando $n \to \infty$.

Portanto, usando as três convergências acima, para provar (2.20) é suficiente mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x+y_n)\widetilde{w}_n \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} V(\infty)\widetilde{w}\varphi dx.$$

Consideremos, então, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado tal que Supp$\varphi \subseteq \Omega$. Como $H^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^2(\Omega)$ e $\{\widetilde{w}_n\} \subset H$ é limitada, temos $\widetilde{w}_n \to \widetilde{w}$ fortemente em $L^2(\Omega)$. Em particular, tomando uma subsequência se necessário, existe $h \in L^2(\Omega)$ tal que
**(a)** $\widetilde{w}_n(x) \to \widetilde{w}(x)$ q.t.p. em $\Omega$,
**(b)** $|\widetilde{w}_n(x)| \leq h(x)$ q.t.p. em $\Omega$.
Por outro lado, desde que $|y_n| \to \infty$, temos para $x \in \mathbb{R}^N$ fixo, $|x+y_n| \to \infty$ e por $(W_2)$, segue que

$$V(x+y_n) \to V(\infty) \quad \text{q.t.p. em } \Omega \quad \text{quando } \; n \to \infty,$$

donde obtemos

$$V(x+y_n)\widetilde{w}_n(x)\varphi(x) \to V(\infty)\widetilde{w}(x)\varphi(x) \quad \text{q.t.p. em } \; \Omega.$$

Agora, usando o fato que o potencial V é limitado (veja item (ii) da Observação 2.1), temos

$$|V(x+y_n)\widetilde{w}_n(x)\varphi(x)| \leq Mh(x)|\varphi(x)| =: g(x).$$

Além disso, $g \in L^1(\Omega)$. Com efeito, desde que $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $h \in L^2(\Omega)$, pela desigualdade de Hölder, concluímos que

$$\int_\Omega |g(y)|dy \leq K \int_\Omega |h(y)||\varphi(y)|dy = M\|h\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} < \infty.$$

Desta forma, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x+y_n)\widetilde{w}_n\varphi dx = \int_\Omega V(x+y_n)\widetilde{w}_n\varphi dx \to \int_\Omega V(\infty)\widetilde{w}\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(\infty)\widetilde{w}\varphi dx,$$

como desejávamos. ■

**Observação 2.12** *A prova que $\{u_n\}$ é limitada continua válida (com pequenas adaptações) para qualquer sequência de Cerami, isto é, para qualquer sequência $\{u_n\} \subset H$ tal que $\{I(u_n)\}$ é limitada e $\|I'(u_n)\|_{H'}(1+\|u_n\|) \to 0$.*

## 2.3 Um ponto crítico não-trivial para $I$

Nesta seção, mostraremos que, a menos de subsequência, a sequência de Cerami limitada $\{u_n\}$, obtida na seção anterior, converge fracamente para um ponto crítico não-trivial do funcional $I$. Para isto, usaremos alguns resultados clássicos de problemas autônomos fornecidos em nosso apêndice A.

Consideremos o "problema no infinito" associado a (2.1), isto é, o problema autônomo:

$$-\Delta u + V(\infty)u = f(u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \tag{2.21}$$

Associamos a (2.21) o funcional $I^\infty : H \to \mathbb{R}$, definido por

$$I^\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(\infty)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx, \quad \text{onde} \quad F(s) = \int_0^s f(t)dt.$$

É fácil ver que, se $u$ é solução de (2.21) então $u$ é não-negativa (a prova desse fato é análoga a apresentada no item (iii) da Observação 1.3). Assim, podemos encarar as soluções de (2.21) como soluções do problema autônomo (A.1) (veja apêndice A) com

$$h(s) = \begin{cases} -V(\infty)s + f(s), & \text{se} \quad s \geq 0, \\ -h(-s), & \text{se} \quad s < 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

Desse modo, uma solução de energia mínima de (A.1)−que podemos assumir positiva− é também uma solução de energia mínima de (2.21) e a recíproca também é verdadeira.

**Proposição 2.13** *Assuma $(g_1)$-$(g_3)$. Então $I^\infty$ não tem ponto crítico não-trivial.*

**Prova.** Suponha, por contradição, que $I^\infty$ tem um ponto crítico não-trivial. Observe que $h$, definida como em (2.22), é ímpar e contínua, pois $f$ é contínua. Além disso, como na prova do Lema 1.12 do Capítulo 1, sob as hipóteses $(g_1)$ e $(g_2)$, $h$ definida como em (2.22), satisfaz as hipotéses do Teorema A.2 do Apêndice A. Desta forma, pelo Teorema A.2 (item (i)), existe $s_0 > 0$ tal

$$-V(\infty)\frac{s_0^2}{2} + F(s_0) = \int_0^{s_0} h(t)dt = H(s_0) > 0,$$

ou ainda,

$$V(\infty) < \frac{2F(s_0)}{s_0^2}.$$

Portanto, para todo $\delta > 0$, temos

$$V(\infty) - \delta < V(\infty) < \frac{2F(s_0)}{s_0^2},$$

o que contradiz $(g_3)$. ■

**Lema 2.14** *Assuma $(W_1)$,$(W_2)$, $(g_1)$ e $(g_2)$. Seja $\{u_n\} \subset H$ uma sequência de Palais-Smale limitada para $I$ no nível $c$ do Passo da Montanha. Então, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u \neq 0$ com $I'(u) = 0$ se uma das seguintes condições ocorrem:*
(i) $(g_3)$ *é satisfeita;*
(ii) $(g_4)$ *ocorre e*

$$V(x) \leq V(\infty) \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N \;\; \textit{e} \;\; V(x) \not\equiv V(\infty). \tag{2.23}$$

**Prova.** Desde que $\{u_n\} \subset H$ é limitada temos, a menos de subsequência, que $u_n \rightharpoonup u$. Além disso, para provar que $I'(u) = 0$ é suficiente mostrar que $I'(u)\varphi = 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, pois $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H$. Dada $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, observe que

$$\begin{aligned} I'(u_n)\varphi - I'(u)\varphi = & \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n - u)\nabla\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_n - u)\varphi dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n) - f(u))\varphi dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $u_n - u \rightharpoonup 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n - u)\nabla\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_n - u)\varphi \to 0,$$

e assim

$$I'(u_n)\varphi - I'(u)\varphi + \int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n) - f(u))\varphi dx \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Desde que $\{u_n\} \subset H$ é uma sequência (PS) para $I$, temos $I'(u_n)\varphi \to 0$. Portanto, pelo resultado acima, para provar que $I'(u)\varphi = 0$, basta mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n) - f(u))\varphi dx = 0,$$

e isto é feito analogamente como na prova do Teorema 1.19 (primeira etapa) usando, neste caso, a condição dada em (2.5).

Neste momento, se $u \neq 0$ então o lema está provado. Suponha, por contradição, que $u = 0$. Afirmamos, neste caso, que $\{u_n\}$ é uma sequência de Palais-Smale no nível $c$ para o funcional $I^\infty$. Com efeito, por $(W_2)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que $|V(\infty) - V(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in B_R^C$. Consequentemente, usando as limitações de $\{u_n\}$ e do potencial $V$ (veja item (ii) da Observação 2.1), a imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ e a equivalência das normas $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ e $\|\cdot\|$, obtemos

$$\begin{aligned} |I^\infty(u_n) - I(u_n)| &= \left| \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V(\infty) - V(x))u_n^2 dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{B_R} |V(\infty) - V(x)|u_n^2 dx + \frac{1}{2} \int_{B_R^C} |V(\infty) - V(x)|u_n^2 dx \\ &\leq \frac{C_1}{2} \int_{B_R} u_n^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{B_R^C} u_n^2 dx \leq \frac{C_1}{2} \|u_n\|_{L^2(B_R)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u_n\|_2^2 \\ &\leq \frac{C_1}{2} \|u_n\|_{L^2(B_R)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} C_2 \|u_n\|^2 \leq \frac{C_1}{2} \|u_n\|_{L^2(B_R)}^2 + \varepsilon C_3. \end{aligned}$$

Além disso, como $u_n \to u = 0$ em $L^q_{\text{loq}}(\mathbb{R}^N)$ para $q \in [2, 2^*)$ se $N \geq 3$ e para $q \geq 2$ se $N = 2$, segue pela desigualdade anterior que

$$\lim_{n\to+\infty} I^\infty(u_n) = \lim_{n\to+\infty} I(u_n) = c,$$

Analogamente, usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
|I^{\infty\prime}(u_n)v - I'(u_n)v| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} (V(\infty) - V(x))u_n v dx\right| \\
&\leq \int_{B_R} |V(\infty) - V(x)||u_n||v|dx + \int_{B_R^C} |V(\infty) - V(x)||u_n||v|dx \\
&\leq C_1 \int_{B_R} |u_n||v|dx + \varepsilon \int_{B_R^C} |u_n||v|dx \leq C_1\|u_n\|_{L^2(B_R)}\|v\|_{L^2(B_R)} + \varepsilon\|u_n\|_2\|v\|_2 \\
&\leq C_4\|u_n\|^2_{L^2(B_R)}\|v\| + \varepsilon C_5\|v\| = (C_4\|u_n\|^2_{L^2(B_R)} + \varepsilon C_5)\|v\|,
\end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}
\sup_{\|v\|\leq 1} |(I^{\infty\prime}(u_n) - I'(u_n))v| &\leq \sup_{\|v\|\leq 1} [(C_4\|u_n\|^2_{L^2(B_R)} + \varepsilon C_5)\|v\|] \\
&\leq C_4\|u_n\|^2_{L^2(B_R)} + \varepsilon C_5.
\end{aligned}$$

Novamente, usando que $u_n \to u = 0$ em $L^2(B_R)$ e que $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue pela desigualdade acima que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\|v\|\leq 1} |(I^{\infty\prime}(u_n) - I'(u_n))v| = 0,$$

donde obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} I^{\infty\prime}(u_n) = \lim_{n\to+\infty} I'(u_n) = 0 \quad \text{no espaço dual } H' \text{ de } H,$$

como desejávamos.

Afirmamos, agora, que ocorre o não-anulamento de $\{u_n\}$. De fato, suponha por contradição, que ocorre o anulamento de $\{u_n\}$, ou seja, para todo $R > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} u_n^2 dx = 0.$$

Desse modo, como $\{u_n\}$ é limitada, segue pelo Lema B.6 do Apêndice B (Lema de Lions) que $\|u_n\|_q \to 0$ para $q \in (2, 2^*)$ se $N \geq 3$ e $2 < q < \infty$ se $N = 2$. Além disso, por (2.5), dado $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(u)u|dx \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = \varepsilon\|u\|_2^2 + C_\varepsilon\|u\|_p^p, \quad \forall u \in H.$$

Consequentemente, usando a imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$, a limitação de $\{u_n\}$ e a equivalência das normas $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ e $\|\cdot\|$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(u_n)u_n|dx \leq \varepsilon\|u_n\|_2^2 + C_\varepsilon\|u_n\|_p^p \leq \varepsilon C_6\|u_n\|^2 + C_\varepsilon\|u_n\|_p^p \leq \varepsilon C_7 + C_\varepsilon\|u_n\|_p^p.$$

Logo, como pelo Lema de Lions $\|u_n\|_p \to 0$, segue da desigualdade acima que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx = 0.$$

Por outro lado, desde que $\{u_n\}$ é uma sequência de Palais-Smale limitada para $I$, temos $I'(u_n)u_n \to 0$, ou ainda,

$$\|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx = I'(u_n)u_n \to 0 \quad \text{quando} \;\; n \to +\infty.$$

Assim, usando as duas convergências acima, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\| = 0,$$

o que é uma contradição com o item (ii) do Corolário 2.7.

Portanto, ocorre, de fato, o não-anulamento de $\{u_n\}$, isto é, existem $d > 0$, $0 < R < \infty$ e $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} u_n^2 dx \geq d > 0. \tag{2.24}$$

Defina $\widetilde{u}_n(x) = u_n(x + y_n)$. Afirmamos que $\{\widetilde{u}_n\} \subset H$ é, também, uma sequência de Palais-Smale limitada para $I^\infty$ no nível $c$ do Passo da Montanha. Com efeito, fazendo a mudança de variável $y = x + y_n$, temos claramente

$$\|\widetilde{u}_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C,$$

e assim $\{\widetilde{u}_n\}$ é limitada.

Agora, consideremos $v \in H$ tal que $\|v\|_H \leq 1$. Definindo $v_n(z) = v(z - y_n)$ e fazendo a mudança de variável $x = z - y_n$ temos $\|v_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, isto é, a sequência $\{v_n\} \subset H$ é limitada. Logo, desde que $\{u_n\}$ é uma sequência de Palais-Smale no nível $c$ para o funcional $I^\infty$, concluímos que $I^{\infty\prime}(u_n)v(\cdot - y_n) \to 0$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(z)\nabla v(z - y_n) + V(\infty)u_n(z)v(z - y_n)dz - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n(z))v(z - y_n)dz \to 0.$$

Consequentemente, fazendo a mudança de variável $z = x + y_n$, segue da definição de $\widetilde{u}_n$ que

$$I^{\infty\prime}(\widetilde{u}_n)v = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\widetilde{u}_n\nabla v + V(\infty)\widetilde{u}_n v dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(\widetilde{u}_n)v dx \to 0,$$

ou ainda, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então

$$|I^{\infty\prime}(\widetilde{u}_n)v| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para toda} \;\; v \in H \;\; \text{tal que} \;\; \|v\| \leq 1.$$

Daí, obtemos

$$\|I^{\infty\prime}(\widetilde{u}_n)\|_{H'} = \sup_{\|v\|_H \leq 1} |I^{\infty\prime}(\widetilde{u}_n)v| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

e consequentemente,

$$\lim_{n\to+\infty} I^{\infty\prime}(\widetilde{u}_n) = 0 \quad \text{no espaço dual } H' \text{ de } H.$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} I^\infty(\widetilde{u}_n) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\widetilde{u}_n(x)|^2 + V(\infty)(\widetilde{u}_n(x))^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(\widetilde{u}_n(x))dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n(x + y_n)|^2 + V(\infty)(u_n(x + y_n))^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n(x + y_n))dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n(z)|^2 + V(\infty)(u_n(z))^2)dz - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n(z))dz = I^\infty(u_n) \to c, \end{aligned}$$

como desejávamos.

Desta forma, como $\{\widetilde{u}_n\} \subset H$ é uma sequência de Palais-Smale limitada para $I^\infty$ no nível $c$, segue, de modo análogo ao que foi feito para a sequência $\{u_n\}$, que $\widetilde{u}_n \rightharpoonup \widetilde{u}$ (a menos de subsequência) com $I^{\infty\prime}(\widetilde{u}) = 0$. Além disso, desde que $\widetilde{u}_n \to \widetilde{u}$ fortemente em $L^q_{\text{loq}}(\mathbb{R}^N)$ para $q \in [2, 2^*)$ se $N \geq 3$ e para $q \geq 2$ se $N = 2$, usando (2.24) e fazendo a mudança de variável $z = x + y_n$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 < d &\leq \lim_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} (u_n(z))^2 dz = \lim_{n\to\infty} \int_{B_R} (u_n(x+y_n))^2 dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{B_R} (\widetilde{u}_n(x))^2 dx = \int_{B_R} (\widetilde{u}(x))^2 dx, \end{aligned}$$

donde se conclui que $\widetilde{u} \neq 0$.

Assim, $\widetilde{u}$ é um ponto crítico não-trivial do funcional $I^\infty$. Note que se (i) é satisfeita, isto é, se $(g_3)$ ocorre, segue pela Proposição 2.13 que $I^\infty$ não tem ponto crítico não-trivial, o que é uma contradição. Por outro lado, se (ii) ocorre, temos $G(s) \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}^+$. Desse modo, $G(\widetilde{u}_n(x)) \geq 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Além disso, usando (2.5), (2.6), a limitação de $\{\widetilde{u}_n\}$, a imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ (para $q \in [2, 2^*]$ se $N \geq 3$ e para $q \geq 2$ se $N = 2$) e a equivalência das normas $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ e $\|\cdot\|$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} G(\widetilde{u}_n) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |G(\widetilde{u}_n)| dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{1}{2} f(\widetilde{u}_n)\widetilde{u}_n - F(\widetilde{u}_n) \right| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |f(\widetilde{u}_n)\widetilde{u}_n| dx + \int_{\mathbb{R}^N} |F(\widetilde{u}_n)| dx \\ &\leq \widetilde{C}_7 \varepsilon \|\widetilde{u}_n\|_2^2 + \widetilde{C}_\varepsilon \|\widetilde{u}_n\|_p^p \leq C_8 \|\widetilde{u}_n\|^2 + C_9 \|\widetilde{u}_n\|^p \leq C_{10}. \end{aligned}$$

Logo, a sequência $\{G(\widetilde{u}_n)\}$ satisfaz as hipóteses do lema de Fatou e portanto

$$\begin{aligned} c &= \liminf_{n\to+\infty} \left[ I^\infty(\widetilde{u}_n) - \frac{1}{2} I^{\infty\prime}(\widetilde{u}_n)\widetilde{u}_n \right] = \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} G(\widetilde{u}_n) dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} G(\widetilde{u}) dx = I^\infty(\widetilde{u}) - \frac{1}{2} I^{\infty\prime}(\widetilde{u})\widetilde{u} = I^\infty(\widetilde{u}), \end{aligned}$$

visto que $\{\widetilde{u}_n\}$ é uma sequência de Palais-Smale limitada para $I^\infty$ no nível $c$ e $I^{\infty\prime}(\widetilde{u}) = 0$.

Desta forma, $\widetilde{u} \neq 0$ é um ponto crítico de $I^\infty$ tal que $I^\infty(\widetilde{u}) \leq c$. Além disso, já vimos que as soluções de (2.21) são não-negativas e assim $\widetilde{u} \geq 0$. Afirmamos que $\widetilde{u}(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. De fato, suponha, por contradição, que existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $\widetilde{u}(x_0) = 0$. Como estamos admitindo que $(g_4)$ ocorre, usando a Observação 2.4 (item (i)), temos $F(s) \geq 0$ para todo $s \geq 0$ e desde que

$$\frac{1}{2} f(s)s - F(s) = G(s) \geq 0,$$

isto é, $f(s)s \geq 2F(s) \geq 0$, segue que $f(s) \geq 0$ para todo $s \geq 0$. Assim, $\widetilde{u}$ satisfaz

$$-\Delta \widetilde{u} + V(\infty)\widetilde{u} = f(\widetilde{u}) \geq 0.$$

Logo, aplicando o princípio do máximo forte para uma bola arbitrária centrada em $x_0$, podemos concluir que $\widetilde{u} \equiv 0$, o que é uma contradição. Portanto, $\widetilde{u}(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Por outro lado, da prova da Proposição 2.13, segue que $h$, definida em (2.22), satisfaz as hipotéses do Teorema A.2 do Apêndice A (isto é, satisfaz $(h_0)$-$(h_2)$) e assim existe $s_0 > 0$ tal que $H(s_0) > 0$. Então, pela Proposição A.7 do Apêndice A, existe um caminho $\gamma \in \mathcal{C}([0,1], H)$ tal que $\gamma(t)(x) > 0$ para todo $(t,x) \in (0,1] \times \mathbb{R}^N$, $\gamma(0) = 0$, $I^\infty(\gamma(1)) < 0$, $\widetilde{u} \in \gamma([0,1])$ e

$$\max_{t\in[0,1]} I^\infty(\gamma(t)) = I^\infty(\widetilde{u}).$$

Desde que estamos assumindo (2.23), podemos proceder como na prova do Lema 1.12 do Capítulo 1 e obter que

$$I(\gamma(t)) < I^\infty(\gamma(t)) \quad \text{para todo } t \in (0,1].$$

Consequentemente,

$$c \le \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) < \max_{t\in[0,1]} I^\infty(\gamma(t)) = I^\infty(\widetilde{u}) \le c,$$

o que é uma contradição. Desta forma, concluímos que $u \neq 0$. ■

## 2.4 Demonstração dos resultados principais

Exceto para o caso especial $V(x) \equiv V(\infty)$ no Teorema 2.3, os Teoremas 2.2 e 2.3 seguem diretamente do Lema 2.14. Consideremos, agora, o caso $V(x) \equiv V(\infty)$. Observando, neste caso, que o espectro $\sigma(-\Delta + V(\infty))$ é apenas a translação por $V(\infty)$ do espectro do operador $-\Delta$ e como $\sigma(-\Delta) = [0, +\infty)$ (veja Teorema 4.1 em Berezin-Shubin [3]), segue que $\sigma(-\Delta + V(\infty)) = [V(\infty), +\infty)$. Desta forma, usando $(g_2)$, temos $a > V(\infty)$. Além disso, considerando $h$ como em (2.22), temos

$$H(s) = \int_0^s h(\tau)d\tau = \int_0^s (-V(\infty)\tau + f(\tau))d\tau = -V(\infty)\frac{s^2}{2} + F(s).$$

Logo, usando o item (iv) da Observação 2.1, conluímos que

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{2H(s)}{s^2} = \lim_{s\to+\infty} \left(-V(\infty) + \frac{2F(s)}{s^2}\right) = -V(\infty) + a > 0.$$

Portanto, existe $s_0 > 0$, suficientemente grande, tal que $H(s_0) > 0$. Além disso, $h$ definida como em (2.22) é ímpar, contínua (pois $f$ é contínua) e como na prova do Lema 1.12 do Capítulo 1, sob as hipóteses $(g_1)$ e $(g_2)$, $h$ satisfaz as hipotéses do Teorema A.2 do Apêndice A, donde concluímos que existe uma solução não-negativa não-trivial para (2.1).

## 2.5 Uma solução de energia mínima

O objetivo desta seção é mostrar a existência de uma solução de energia mínima de (2.1) sob as hipóteses do Teorema 2.3. Este resultado está contido no seguinte teorema:

**Teorema 2.15** *Sob as hipóteses do* Teorema 2.3, (2.1) *tem uma solução de energia mínima. Mais precisamente, existe uma solução $w \in H$ tal que $I(w) = m$, onde*

$$m = \inf\{I(u) \,|\, u \in H\backslash\{0\} \text{ e } I'(u) = 0\}.$$

**Prova.** Afirmamos inicialmente que $m = \inf\{I(u) \,|\, u \in H\backslash\{0\} \text{ e } I'(u) = 0\}$ satisfaz

$$0 \leq m \leq c,$$

onde $c$ é o nível do Passo da Montanha para $I$. Com efeito, por $(g_4)$(i), para qualquer ponto crítico $u$ de $I$, temos

$$I(u) = I(u) - \frac{1}{2}I'(u)u = \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx \geq 0.$$

Consequentemente, segue pela definição de ínfimo que $m \geq 0$. Por outro lado, no Lema 2.14 obtemos um ponto crítico $u \neq 0$ para o funcional $I$ como um limite fraco de uma sequência de Palais-Smale limitada $\{u_n\}$ para $I$ no nível $c$. Desta forma, usando novamente $(g_4)$(i) e argumentos semelhantes aos utilizados na prova do Lema 2.14, concluímos que a sequência $\{G(u_n)\}$ satisfaz as hipóteses do lema de Fatou e portanto

$$\begin{aligned} m &\leq I(u) = I(u) - \frac{1}{2}I'(u)u = \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} G(u_n)dx \\ &= \liminf_{n\to+\infty} \left[I(u_n) - \frac{1}{2}I'(u_n)u_n\right] = c, \end{aligned}$$

como desejávamos.

Seja, agora, $\{v_n\} \subset H$ uma sequência de pontos críticos não-triviais para $I$ satisfazendo

$$I(v_n) \to m \in [0, c].$$

Desde que $\{I(v_n)\}$ é limitada e $I'(v_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\{v_n\}$ é uma sequência de Cerami para $I$. Desse modo, repetindo os argumentos da Seção 2.2 (veja Observação 2.12) segue que $\{v_n\} \subset H$ é limitada. Além disso, pelo Corolário 2.7(i), temos $\liminf_{n\to+\infty} \|v_n\| \geq \rho_0 > 0$. Agora, observando que $\{v_n\}$ é uma sequência de Palais-Smale limitada para o funcional $I$ e que $I(v_n) \to m \in [0, c]$, podemos usar os mesmos argumentos da prova do Lema 2.14 (fazendo algumas adaptações e usando o fato que $\liminf_{n\to+\infty} \|v_n\| \geq \rho_0 > 0$) para obter que, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup w \neq 0$ com $I'(w) = 0$. Portanto, pela definição de $m$, temos $m \leq I(w)$. Por outro lado, usando $(g_4)$(i) e a limitação de $\{v_n\}$ , segue novamente, como na prova do Lema 2.14, que a sequência $\{G(v_n)\}$ satisfaz as hipóteses do Lema de Fatou e portanto

$$\begin{aligned} I(w) &= I(w) - \frac{1}{2}I'(w)w = \int_{\mathbb{R}^N} G(w)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} G(v_n)dx \\ &= \liminf_{n\to+\infty} \left[I(v_n) - \frac{1}{2}I'(v_n)v_n\right] = m. \end{aligned}$$

Assim, $I(w) = m$ e o teorema está provado. ∎

# Apêndice A

# Problemas autonômos

Neste apêndice, vamos recordar alguns resultados a respeito de problemas autonômos da forma

$$-\Delta u = h(u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \tag{A.1}$$

onde assumimos que $h(s)$ satisfaz as seguintes condições:

$(h_0)$ $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e ímpar;

$(h_1)$ $-\infty < \liminf_{s\to 0^+} h(s)/s \leq \limsup_{s\to 0^+} h(s)/s = -\nu < 0$ para $N \geq 3$, $\lim_{s\to 0^+} h(s)/s = -\nu \in (-\infty, 0)$ para $N = 2$;

$(h_2)$ Quando $N \geq 3$, $\lim_{s\to +\infty} |h(s)|/s^{(N+2)/(N-2)} = 0$. Quando $N = 2$, para qualquer $\alpha > 0$ existe $C_\alpha > 0$ tal que

$$|h(s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2} \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Associamos à equação (A.1) o funcional energia $J : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(u) dx,$$

onde $H(s) = \int_0^s h(\tau)d\tau$.

**Definição A.1** *Uma solução $v \in H$ de* (A.1) *é dita uma solução de energia mínima se, e somente se,*

$$J(v) = m \quad \textit{onde} \quad m = \inf\{J(u) \,|\, u \in H\backslash\{0\} \ \textit{e} \ J'(u) = 0\}.$$

Os seguintes resultados são devido a Berestycki-Lions [1] para $N \geq 3$ e Berestycki-Gallouët-Kavian [2] para $N = 2$.

**Teorema A.2** *Assuma $(h_0)$-$(h_2)$. Então o funcional $J$ está bem definido e é de classe $\mathcal{C}^1$. Além disso, temos*

(i) (A.1) *tem uma solução não-trivial se, e somente se, $H(s_0) > 0$ para algum $s_0 > 0$;*

(ii) *se* $H(s_0) > 0$ *para algum* $s_0 > 0$, *então* $m > 0$ *e existe uma solução de energia mínima* $\omega$ *de* (A.1), *que é uma solução clássica estritamente positiva em* $\mathbb{R}^N$ *e, como qualquer ponto crítico de* $J$, *vale a identidade de Pohozaev (veja* Lema B.7*)*

$$(N-2)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\omega|^2dx = 2N\int_{\mathbb{R}^N}H(\omega)dx.$$

Em Jeanjean-Tanaka [11, 12], estes autores complementaram o resultado anterior da seguinte forma:

**Teorema A.3** *Assuma* $(h_0)$-$(h_2)$ *e* $H(s_0) > 0$ *para algum* $s_0 > 0$. *Então tomando*

$$\Gamma_J = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)) \,|\, \gamma(0) = 0, J(\gamma(1)) < 0\},$$

*temos* $\Gamma_J \neq \emptyset$ *e* $m = b$ *sendo*

$$b = \inf_{\gamma\in\Gamma_J}\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) > 0.$$

*Além disso, para qualquer solução de energia mínima* $\omega$ *de* (A.1), *existe um caminho* $\gamma \in \Gamma_J$ *tal que* $\gamma(t)(x) > 0$ *para todo* $(t,x) \in (0,1] \times \mathbb{R}^N$, $\omega \in \gamma([0,1])$ *e*

$$\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) = b.$$

**Observação A.4** *Em* Jeanjean-Tanaka [11, 12] *foi também provado que, sob* $(h_1)$ *e* $(h_2)$, *existem* $C_1 > 0$ *e* $\delta_0 > 0$ *tais que*

$$J(u) \geq C_1\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \quad \text{quando} \quad \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \delta_0.$$

**Lema A.5** *Seja* $v_t(x) = v(x/t)$ *para* $t > 0$, *onde* $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *é um ponto crítico não-trivial de* $J$, *então*
(i) $\|\nabla v_t\|_2^2 = t^{N-2}\|\nabla v\|_2^2$;
(ii) *Para qualquer função contínua* $F$ *satisfazendo* $\limsup_{s\to0^+}|F(s)|/s^2 < \infty$, *temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N}F(v_t)dx = t^N\int_{\mathbb{R}^N}F(v)dx;$$

(iii) $\|v_t\|_q^q = t^N\|v\|_q^q$ *para todo* $q \in [2,\infty)$.

**Prova.** Desde que $\nabla v_t(x) = \frac{1}{t}\nabla v(\frac{x}{t})$, fazendo a mudança de variável $y = x/t$, obtemos

$$\|\nabla v_t\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_t(x)|^2dx = \frac{1}{t^2}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla v(\frac{x}{t})\right|^2dx = \frac{t^N}{t^2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v(y)|^2dy = t^{N-2}\|\nabla v\|_2^2,$$

e assim temos (i). Para provar (ii), observemos inicialmente que

$$\int_{\mathbb{R}^N}F(v)dx < \infty.$$

De fato, desde que $F$ é contínua e $\limsup_{s\to0^+}|F(s)|/s^2 < \infty$ se $s \in [-M,M]$, $M > 0$, então, para algum $C > 0$, temos

$$\frac{|F(s)|}{s^2} \leq C \tag{A.2}$$

Além disso, como $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é solução do problema autônomo (A.1), $v$ tem decaimento exponencial no infinito (veja Teorema 1 em Berestycki-Lions [1]) o que implica que $|v(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e para algum $M > 0$. Assim, por (A.2), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(v(x))dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|F(v(x))|}{(v(x))^2}(v(x))^2 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} (v(x))^2 dx < \infty.$$

Agora, usando a mesma mudança de variável anterior, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(v_t(x))dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(v(\frac{x}{t}))dx = t^N \int_{\mathbb{R}^N} F(v(y))dy,$$

o que nos garante (ii). A prova de (iii) é uma consequência imediata de (ii), tomando neste caso, $F = |\cdot|^q$. ■

**Lema A.6** *Assuma $N = 2$ e seja $v_t(x) = v(x/t)$ para $t > 0$, onde $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é um ponto crítico não-trivial de $J$. Então, para qualquer $t > 0$, temos*
(i) $\|\nabla v_t\|_2^2 = \|\nabla v\|_2^2$;
(ii) *Para qualquer função contínua $F$ satisfazendo* $\limsup_{s\to 0^+} |F(s)|/s^2 < \infty$, *temos*

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(v_t)dx = t^2 \int_{\mathbb{R}^2} F(v)dx;$$

(iii) $\int_{\mathbb{R}^2} H(v_t)dx = 0$;
(iv) $J(v_t) = J(v)$;
(v) $\int_{\mathbb{R}^2} h(v_t)v_t dx = t^2\|\nabla v\|_2^2$.

**Prova.** Note que (i)-(ii) são casos especiais de (i)-(ii) do Lema A.5. Da identidade de Pohozaev, temos $\int_{\mathbb{R}^2} H(v)dx = 0$. Consequentemente, pelo item (ii), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} H(v_t)dx = t^2 \int_{\mathbb{R}^2} H(v)dx = 0,$$

o que nos garante (iii). Usando agora (i) e (iii), segue que

$$J(v_t) = \frac{1}{2}\|\nabla v_t\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^2} H(v_t)dx = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^2} H(v)dx = J(v),$$

pois $\int_{\mathbb{R}^2} H(v)dx = 0$, e assim temos o item (iv). Por fim, como $v$ é ponto crítico de $J$, temos $J'(v)v = 0$ ou, equivalentemente,

$$\|\nabla v\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^2} h(v)v dx.$$

Logo, como um caso especial de (ii), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(v_t)v_t dx = t^2 \int_{\mathbb{R}^2} h(v)v dx = t^2\|\nabla v\|_2^2$$

e isto prova (v). ■

**Proposição A.7** *Assuma* $(h_0)$-$(h_2)$ *e* $H(s_0) > 0$ *para algum* $s_0 > 0$. *Seja* $v$ *um ponto crítico do funcional* $J$ *associado ao problema* (A.1) *com* $v(x) > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$. *Então, existe um caminho* $\gamma \in \mathcal{C}([0,1], H)$ *tal que* $\gamma(t)(x) > 0$ *para todo* $(t, x) \in (0,1] \times \mathbb{R}^N$, $\gamma(0) = 0$, $J(\gamma(1)) < 0$, $v \in \gamma([0,1])$ *e*

$$\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) = J(v).$$

*Em particular, para qualquer solução de energia mínima* $\omega$ *de* (A.1), *temos*

$$\inf_{\gamma\in\Gamma_J} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \leq J(\omega).$$

**Prova.** A prova será dividida em 2 casos: $N \geq 3$ e $N = 2$.
**1º caso:** Assuma $N \geq 3$.
Visto que $v$ é ponto crítico de $J$, pela identidade de Pohozaev, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(v)dx = \frac{N-2}{2N}\|\nabla v\|_2^2.$$

Consequentemente, usando os itens (i) e (ii) do Lema A.5, obtemos

$$\begin{aligned} J(v_t) &= \frac{1}{2}\|\nabla v_t\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^2} H(v_t)dx = \frac{t^{N-2}}{2}\|\nabla v\|_2^2 - t^N \int_{\mathbb{R}^2} H(v)dx \\ &= \left(\frac{1}{2}t^{N-2} - \frac{N-2}{2N}t^N\right)\|\nabla v\|_2^2. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Afirmamos que
(1) $\max_{t>0} J(v_t) = J(v)$;
(2) $\lim_{t\to+\infty} J(v_t) = -\infty$;
(3) $\|v_t\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 = \|\nabla v_t\|_2^2 + \|v_t\|_2^2 = t^{N-2}\|\nabla v\|_2^2 + t^N\|v\|_2^2$. Em particular,

$$\lim_{t\to 0} \|v_t\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

De fato, usando (A.3), temos

$$\frac{d}{dt}J(v_t) = \left(\frac{N-2}{2}t^{N-3} - \frac{N-2}{2}t^{N-1}\right)\|\nabla v\|_2^2.$$

Assim, se $\dfrac{d}{dt}J(v_t) = 0$ então $t = 1$. Além disso,

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=1} J(v_t) &= \left.\frac{N-2}{2}[(N-3)t^{N-4} - (N-1)t^{N-2}]\|\nabla v\|_2^2\right|_{t=1} \\ &= -(N-2)\|\nabla v\|_2^2 < 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\max_{t>0} J(v_t) = J(v_1) = J(v)$ e isto prova (1). Desde que $N \geq 3$, a prova de (2) segue imediatamente de (A.3). Por fim, a prova de (3) é uma consequência dos itens (i) e (iii) do Lema A.5 e assim nossa afirmação está provada. Desta forma, podemos escolher $t_0 > 1$ tal que $J(v_{t_0}) < 0$. Além disso, definindo $\gamma(t) = v_{t_o t}$ para $t \in (0,1]$ e $\gamma(0) = 0$, afirmamos que $\gamma : [0,1] \to H^1(\mathbb{R}^N)$ é o caminho desejado da proposição. Com efeito, por (A.3), temos

$$J(v_t) = t^{N-2}\left(\frac{1}{2} - \frac{N-2}{2N}t^2\right).$$

Assim, para $t$ suficientemente pequeno, segue que $J(v_t) > 0$. Consequentemente, usando o item (1) acima, obtemos

$$\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) = \max_{t\in(0,1]} J(v_{t_o t}) = J(v),$$

pois $t_0 > 1$ implica que $t_0 t > 1$ para algum $t \in (0,1]$. Além disso, por construção, temos

$$J(\gamma(1)) = J(v_{t_0}) < 0 \quad \text{e} \quad \gamma\left(\frac{1}{t_0}\right) = v_1 = v \quad (\text{isto é, } v \in \gamma([0,1])),$$

já que $1/t_0 \in (0,1]$. Mais ainda, como por hipótese $v(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\gamma(t)(x) = v_{t_o t}(x) = v\left(\frac{x}{t_0 t}\right) > 0 \quad \text{para todo} \quad (t,x) \in (0,1] \times \mathbb{R}^N.$$

Finalmente, a continuidade da aplicação $\gamma$ no ponto 0 segue imediatamente do item (3) acima, e como $v$ é solução do problema autônomo (A.1), temos que $v \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ (veja Teorema 1 em Berestycki-Lions [1]) e, consequentemente, $\gamma \in \mathcal{C}([0,1], H)$.

**2º caso:** Assuma $N = 2$.
Observe que usando $(h_0)$-$(h_2)$ podemos encontrar constantes $\alpha, C > 0$ tais que

$$|h(s)| \leq Ce^{\alpha s^2}|s| \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}. \tag{A.4}$$

De fato, por $(h_1)$, dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|h(s)| < (1+\nu)|s| \quad \text{sempre que} \quad 0 < s < \delta.$$

Consequentemente, se $\alpha > 0$ temos $\alpha s^2 > 0$ e portanto

$$|h(s)| < (1+\nu)|s| < (1+\nu)e^{\alpha s^2}|s| \quad \text{sempre que} \quad 0 < s < \delta.$$

Além disso, tomando $R = \max\{\delta, 1\}$ e usando $(h_2)$, existe $C_\alpha > 0$ tal que

$$|h(s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2} \leq C_\alpha e^{\alpha s^2}|s| \quad \text{sempre que} \quad s > R.$$

Por outro lado, pela continuidade de $h$ (dada em $(h_0)$), existe $K_\varepsilon > 0$ tal que

$$|h(s)| \leq K_\varepsilon e^{\alpha s^2}|s| \quad \text{sempre que} \quad \delta \leq s \leq R.$$

Desta forma, tomando $C = \max\{1+\nu, C_\alpha, K_\varepsilon\} > 0$ e usando o fato que $h$ é ímpar (hipótese $(h_0)$), obtemos

$$|h(s)| \leq Ce^{\alpha s^2}|s| \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R},$$

como desejávamos.

Agora, consideremos $\theta \in [0,1]$ e observemos que

$$J(\theta v_t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\theta v_t)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} H(\theta v_t)dx = \frac{\theta^2}{2}\|\nabla v_t\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^2} H(\theta v_t)dx.$$

Logo, usando (A.4) e os itens (i) e (ii) do Lema A.6, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}J(\theta v_t) &= \theta\|\nabla v_t\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^2} h(\theta v_t)v_t dx \geq \theta\|\nabla v_t\|_2^2 - \theta C\int_{\mathbb{R}^2} e^{\alpha\theta^2 v_t^2} v_t^2 dx \\ &\geq \theta\|\nabla v_t\|_2^2 - \theta C\int_{\mathbb{R}^2} e^{\alpha v_t^2} v_t^2 dx = \theta\left(\|\nabla v\|_2^2 - Ct^2\int_{\mathbb{R}^2} e^{\alpha v^2} v^2 dx\right), \end{aligned}$$

onde usamos, para obter a segunda desigualdade, o fato que a exponencial é uma função crescente (e que $\alpha\theta^2(v_t(x))^2 \leq \alpha(v_t(x))^2$ com $x \in \mathbb{R}^2$).

Desse modo, escolhendo $t_0 \in (0,1)$ suficientemente pequeno tal que

$$\|\nabla v\|_2^2 - Ct_0^2\int_{\mathbb{R}^2} e^{\alpha v^2} v^2 dx > 0$$

temos, para este $t_0$,

$$\frac{d}{d\theta}J(\theta v_{t_0}) \geq 0 \quad \text{para todo} \quad \theta \in [0,1],$$

donde segue que $J(\theta v_{t_0})$ é uma função não-decrescente para $\theta \in [0,1]$ e, assim,

$$J(\theta v_{t_0}) \leq J(v_{t_0}) = J(v) \quad \text{para todo} \quad \theta \in [0,1], \tag{A.5}$$

onde a igualdade acima é decorrente do item (iv) do Lema A.6.

Observe também que fixando $t_1 > 1$ e usando os itens (i) e (v) do Lema A.6, obtemos

$$\left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=1} J(\theta v_{t_1}) = \theta\|\nabla v_{t_1}\|_2^2 - \left.\int_{\mathbb{R}^2} h(\theta v_{t_1})v_{t_1}dx\right|_{\theta=1} = \|\nabla v\|_2^2 - t_1^2\|\nabla v\|_2^2 < 0$$

e

$$\left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=1}\int_{\mathbb{R}^2} H(\theta v_t)dx = \left.\int_{\mathbb{R}^2} h(\theta v_{t_1})v_{t_1}dx\right|_{\theta=1} = t_1^2\|\nabla v\|_2^2 > 0.$$

Assim, para um $\theta_1 \in (1,\infty)$ suficientemente próximo de 1, temos

$$\begin{aligned} J(\theta v_{t_1}) &\leq J(v_{t_1}) = J(v) \quad \text{para todo} \quad \theta \in [1,\theta_1], \\ \int_{\mathbb{R}^2} H(\theta_1 v_{t_1})dx &> \int_{\mathbb{R}^2} H(v_{t_1})dx = 0, \end{aligned} \tag{A.6}$$

onde usamos para obter as igualdades acima os itens (iv) e (iii) do Lema A.6, respectivamente.

Considerando, agora, $(\theta_1 v_{t_1})_t = \theta_1 v_{t_1 t}$ para $t \geq 1$ e usando, mais uma vez, os itens (i) e (ii) do Lema A.6, obtemos

$$\begin{aligned} J(\theta_1 v_{t_1 t}) &= J((\theta_1 v_{t_1})_t) = \|\nabla(\theta_1 v_{t_1})_t\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^2} H((\theta_1 v_{t_1})_t)dx \\ &= \|\nabla(\theta_1 v_{t_1})\|_2^2 - t^2\int_{\mathbb{R}^2} H(\theta_1 v_{t_1})dx \\ &= \frac{\theta_1^2}{2}\|\nabla v_{t_1}\|_2^2 - t^2\int_{\mathbb{R}^2} H(\theta_1 v_{t_1})dx. \end{aligned}$$

Consequentemente, $J(\theta_1 v_{t_1 t}) \to -\infty$ quando $t \to \infty$ e, desse modo, existe $t_2 > 1$ suficientemente grande tal que

$$J(\theta_1 v_{t_1 t_2}) < 0. \tag{A.7}$$

Mais ainda,

$$\frac{d}{dt} J(\theta_1 v_{t_1 t}) = -2t \int_{\mathbb{R}^2} H(\theta_1 v_{t_1}) dx < 0 \quad \text{para todo} \;\; t \geq 1,$$

onde usamos o segundo resultado de (A.6) para obter a desigualdade acima.

Portanto, $J(\theta_1 v_{t_1 t})$ é uma função decrescente para $t \geq 1$ e usando a primeira desigualdade em (A.6), obtemos

$$J(\theta_1 v_{t_1 t}) \leq J(\theta_1 v_{t_1}) \leq J(v) \quad \text{para todo} \;\; t \geq 1. \tag{A.8}$$

Finalmente, como $v$ é solução do problema autônomo (A.1), segue que $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ (veja Berestycki-Gallouët-Kavian [2]) e assim podemos considerar os caminhos

$$\gamma_1 : [0,1] \to H^1(\mathbb{R}^2),\ \gamma_2 : [t_0, t_1] \to H^1(\mathbb{R}^2),\ \gamma_3 : [1, \theta_1] \to H^1(\mathbb{R}^2) \;\text{ e }\; \gamma_4 : [1, t_2] \to H^1(\mathbb{R}^2),$$

definidos por

$$\gamma_1(\theta) = \theta v_{t_0},\ \gamma_2(t) = v_t,\ \gamma_3(\theta) = \theta v_{t_1} \;\text{ e }\; \gamma_4(t) = \theta_1 v_{t_1 t}.$$

Além disso, por meio de reparametrizações, podemos considerar, ainda, os caminhos $\widetilde{\gamma}_2, \widetilde{\gamma}_3, \widetilde{\gamma}_4 : [0,1] \to H^1(\mathbb{R}^2)$ tais que

$$\widetilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2((1-t)t_0 + tt_1),\ \widetilde{\gamma}_3(t) = \gamma_3((1-t) + t\theta_1) \text{ e } \widetilde{\gamma}_4(t) = \gamma_4((1-t) + tt_2).$$

Afirmamos que $\gamma : [0,1] \to H^1(\mathbb{R}^2)$ definido por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(4t), & \text{se} \;\; 0 \leq t \leq 1/4, \\ \widetilde{\gamma}_2(4t-1), & \text{se} \;\; 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ \widetilde{\gamma}_3(4t-2), & \text{se} \;\; 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ \widetilde{\gamma}_4(4t-3), & \text{se} \;\; 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

é o caminho desejado da proposição. De fato, note que $\gamma(0) = \gamma_1(0) = 0$ e, por (A.7), $J(\gamma(1)) = J(\widetilde{\gamma}_4(1)) = J(\theta_1 v_{t_1 t_2}) < 0$. Por outro lado, considerando

$$t_3 = \frac{1 + t_1 - 2t_0}{4(t_1 - t_0)},$$

$t_3$ satisfaz $1/4 < t_3 < 1/2$. Com efeito, desde que $t_1 - t_0 > 0$ (pois $t_0 < 1 < t_1$), temos

$$1/4 < t_3 \Leftrightarrow 1 < \frac{1 + t_1 - 2t_0}{t_1 - t_0} \Leftrightarrow t_0 < 1$$

e, analogamente, $t_3 < 1/2$ se, e somente se, $1 < t_1$. Observe também que

$$4t_3 - 1 = \frac{1 + t_1 - 2t_0}{t_1 - t_0} - 1 = \frac{1 - t_0}{t_1 - t_0}.$$

Assim, tomando $0 < t_4 := \frac{1-t_0}{t_1-t_0} < 1$, temos

$$\gamma(t_3) = \widetilde{\gamma}_2(4t_3 - 1) = \widetilde{\gamma}_2(t_4) = \gamma_2((1-t_4)t_0 + t_4 t_1) = \gamma_2(1) = v_1 = v,$$

isto é, $v \in \gamma([0,1])$. Observe ainda que:
**(a)** Para $0 \leq t \leq 1/4$, usando (A.5), obtemos

$$J(\gamma(t)) = J(\gamma_1(4t)) = J(4tv_{t_0}) \leq J(v).$$

Além disso, como por hipótese $v(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\gamma(t)(x) = 4tv_{t_0}(x) = 4tv\left(\frac{x}{t_0}\right) > 0 \quad \text{com} \quad t \neq 0.$$

**(b)** Para $1/4 \leq t \leq 1/2$, fazendo, $0 < \overline{t} := 4t - 1 < 1$ e $0 < t_0 < \widehat{t} := (1 - \overline{t}\,)t_0 + \overline{t}t_1 < t_1$, segue, pelo item (iv) do Lema A.6, que

$$J(\gamma(t)) = J(\widetilde{\gamma}_2(\,\overline{t}\,)) = J(\gamma_2((1-\overline{t}\,)t_0 + \overline{t}t_1)) = J(\gamma_2(\,\widehat{t}\,)) = J(v_{\widehat{t}}) = J(v).$$

Mais ainda,

$$\gamma(t)(x) = v_{\widehat{t}}(x) = v\left(\frac{x}{\widehat{t}}\right) > 0.$$

**(c)** Para $1/2 \leq t \leq 3/4$, considerando, $0 < \overline{\theta} := 4t - 2 < 1$ e $1 < \widehat{\theta} := (1 - \overline{\theta}\,) + \overline{\theta}\theta_1 < \theta_1$, segue, da primeira desigualdade em (A.6), que

$$J(\gamma(t)) = J(\widetilde{\gamma}_3(\,\overline{\theta}\,)) = J(\gamma_3(1-\overline{\theta}\,) + \overline{\theta}\theta_1)) = J(\gamma_3(\,\widehat{\theta}\,)) = J(\widehat{\theta}v_{t_1}) \leq J(v).$$

Temos também

$$\gamma(t)(x) = \widehat{\theta}v_{t_1}(x) = \widehat{\theta}v\left(\frac{x}{t_1}\right) > 0.$$

**(d)** Para $3/4 \leq t \leq 1$, tomando, $0 < s := 4t - 3 < 1$ e $1 < \widetilde{t} := (1-s) + st_2 < t_2$, segue, por (A.8), que

$$J(\gamma(t)) = J(\widetilde{\gamma}_4(s)) = J(\gamma_4((1-s) + st_2)) = J(\gamma_4(\,\widetilde{t}\,)) = J(\theta_1 v_{t_1\widetilde{t}}) \leq J(v).$$

Além disso,

$$\gamma(t)(x) = \theta_1 v_{t_1\widetilde{t}}(x) = (\theta_1 v_{t_1})_{\widetilde{t}}(x) = \theta_1 v_{t_1}\left(\frac{x}{\widetilde{t}}\right) = \theta_1 v\left(\frac{x}{t_1\widetilde{t}}\right) > 0.$$

Portanto, combinando **(a)**, **(b)**, **(c)** e **(d)**, obtemos

$$\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) = J(v) \quad \text{e} \quad \gamma(t)(x) > 0 \quad \text{para todo} \quad (t,x) \in (0,1] \times \mathbb{R}^N,$$

donde concluímos nossa afirmação e, consequentemente, a prova da proposição. ∎

# Apêndice B

# Resultados complementares

O objetivo deste apêndice é apresentar as demonstrações de alguns resultados utilizados no decorrer do nosso trabalho.

**Definição B.1** *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. No espaço $L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega)$ definimos a norma*

$$\|u\|_{r\wedge s} = \|u\|_r + \|u\|_s.$$

*e no espaço $L^r(\Omega) + L^s(\Omega)$, definimos a norma*

$$\|u\|_{r\vee s} = \inf\{\|v\|_r + \|w\|_s \,:\, v \in L^r(\Omega), w \in L^s(\Omega), u = v + w\}.$$

**Lema B.2** *Assuma que $1 \leq r, s, \alpha, \beta < \infty$, $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ e*

$$|f(x,u)| \leq C(|u|^{r/\alpha} + |u|^{s/\beta}).$$

*Então, para qualquer $u \in L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega)$, $f(\cdot, u) \in L^\alpha(\Omega) + L^\beta(\Omega)$ e o operador*

$$\begin{array}{rrcl} A: & L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega) & \longrightarrow & L^\alpha(\Omega) + L^\beta(\Omega) \\ & u & \longmapsto & f(x,u) \end{array}$$

*é contínuo.*

**Prova.** Ver Teorema A.4 de Willem [21]. ∎

**Lema B.3** *Assuma as condições $(f_1)$, $(f_2)$, $(V_3)$ e $(V_5)$ do* Capítulo 1. *Então os funcionais $\Phi, \Psi : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidos por*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + V(x)u^2]dx \quad e \quad \Psi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx,$$

*onde $F(s) = \displaystyle\int_0^u f(\tau)d\tau$, pertencem a $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e possuem derivadas dadas por*

$$\Phi'(u) \cdot v = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla v + V(x)uv]dx \quad e \quad \Psi'(u) \cdot v = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx.$$

*Em particular, o funcional*

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + V(x)u^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx$$

*pertence a $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.*

**Prova.** De acordo com o Lema 1.15 de Schwartz [19], é suficiente mostrar que as seguintes condições são satisfeitas:
(i) $\Phi$, $\Psi : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ são Gateaux diferenciáveis;
(ii) $\Phi'(u)$, $\Psi'(u) : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ são lineares limitadas;
(iii) $\Phi'(u_n) \to \Phi'(u)$ e $\Psi'(u_n) \to \Psi'(u)$ em $H'$ quando $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Verifiquemos inicialmente (i). Sejam $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $t \in \mathbb{R}$. Observe que

$$\begin{aligned}
&\frac{\Phi(u+tv)-\Phi(u)}{t}\\
&= \frac{1}{2t}\left(\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla(u+tv)|^2+V(x)(u+tv)^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla u|^2+V(x)u^2]dx\right)\\
&= \frac{1}{t}\left(t\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla v dx + \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2dx + t\int_{\mathbb{R}^N}V(x)uvdx + \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)v^2dx\right)
\end{aligned}$$

e assim

$$\Phi'(u)\cdot v = \lim_{t\to 0}\frac{\Phi(u+tv)-\Phi(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N}[\nabla u\nabla v + V(x)uv]dx$$

ou seja, $\Phi$ é Gateaux diferenciável. Para mostrar que $\Psi$ é Gateaux diferenciável consideremos $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in [0,1]$. Defina $\eta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\eta(s) = F(u(x) + stv(x)).$$

Temos, $\eta(0) = F(u(x))$ e $\eta(1) = F(u(x)+tv(x))$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$\frac{F(u(x)+tv(x))-F(u(x))}{t} = f(u(x)+\lambda tv(x))v(x) \to f(u(x))v(x) \ \text{ quando } t\to 0,$$

de modo que

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(u(x)+tv(x))-F(u(x))}{t} = f(u(x))v(x) \ \text{ q. t. p. em } \mathbb{R}^N$$

Além disso, usando o item (i) da Observação 1.3 do Capítulo 1, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(u(x)+tv(x))-F(u(x))}{t}\right| &= |f(u(x)+\lambda tv(x))v(x)|\\
&\le [C_\varepsilon|u(x)+\lambda tv(x)| + \varepsilon|u(x)+\lambda tv(x)|^p]v(x)\\
&\le [C_\varepsilon(|u(x)|+|v(x)|) + 2^p\varepsilon(|u(x)|^p+|v(x)|^p)]|v(x)|\\
&= C_\varepsilon(|u(x)v(x)|+|v(x)|^2) + 2^p\varepsilon(|u(x)|^p|v(x)|+|v(x)|^{p+1}) =: h(x)
\end{aligned}$$

Desde de que $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, usando a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, para $2 \le q < \infty$ se $N = 2$ e $2 \le q \le 2^*$ se $N \ge 3$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}|h(x)|dx &= C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}(|u(x)v(x)|+|v(x)|^2)dx + 2^p\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}(|u(x)|^p|v(x)|+|v(x)|^{p+1})dx\\
&\le C_\varepsilon\|u\|_2\|v\|_2 + C_\varepsilon\|v\|_2^2 + 2^p\varepsilon\|u\|_{p+1}^p\|v\|_{p+1} + 2^p\varepsilon\|v\|_{p+1}^{p+1}\\
&\le C_1\|u\|_2\|v\|_2 + C_1\|v\|_2^2 + C_2\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^p\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + C_3\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^{p+1} < \infty,
\end{aligned}$$

já que $1 < p < \infty$ se $N = 2$, $1 < p < (N+2)/(N-2)$ se $N \geq 3$ (veja $(f_2)$).

Desta forma, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir que

$$\begin{aligned}
\Psi'(u) \cdot v &= \lim_{t \to 0} \frac{\Psi(u+tv) - \Psi(u)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(u(x)+tv(x)) - F(u(x))}{t} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{t \to 0} \frac{F(u(x)+tv(x)) - F(u(x))}{t} dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u(x))v(x)dx.
\end{aligned}$$

Passemos agora a verificação de (ii). Observe que para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ fixado, temos

$$|\Phi'(u) \cdot v| = |\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\|,$$

onde

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx$$

é o produto interno associado a norma

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx,$$

que por $(V_2)$ e $(V_5)$ é equivalente a norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, usando novamente o item (i) da Observação 1.3 do Capítulo 1, a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, para $2 \leq q < \infty$ se $N = 2$ e para $2 \leq q \leq 2^*$ se $N \geq 3$, obtemos

$$\begin{aligned}
|\Psi'(u) \cdot v| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(u)||v|dx \leq C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u||v|dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p|v|dx \\
&\leq C_\varepsilon ||u||_2||v||_2 + \varepsilon \|u\|_{p+1}^p \|v\|_{p+1} \\
&\leq C_4\|u\|\|v\| + C_5\|u\|^p\|v\| = (C_4\|u\| + C_5\|u\|^p)\|v\|,
\end{aligned}$$

para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ fixado, donde concluímos que as aplicações $\Phi'(u)$, $\Psi'(u) : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ são lineares limitadas. Por fim, verifiquemos (iii). Suponha que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então

$$\begin{aligned}
\|\Phi'(u_n) - \Phi'(u)\|_{H'} &= \sup_{\|v\| \leq 1} |\Phi'(u_n) \cdot v - \Phi'(u) \cdot v| \\
&= \sup_{\|v\| \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n - u)\nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_n - u)v dx \right| \\
&= \sup_{\|v\| \leq 1} |\Phi'(u_n - u) \cdot v| \leq \\
&\leq \|u_n - u\|\|v\| \to 0 \ \text{ quando } u_n \to u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).
\end{aligned}$$

Mostremos agora a continuidade de $\Psi'$ em $H^{-1}$. Admitindo que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e usando a imersão continua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ concluímos que $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Utilizando mais uma vez a Observação 1.3 (item (i)) do Capítulo 1, temos

$$|f(u)| \leq C_\varepsilon|u| + \varepsilon|u|^p \leq C(|u| + |u|^p) = C(|u|^{2/2} + |u|^{s/\beta}),$$

onde $s = p+1$, $\beta = (p+1)/p$ e $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{\beta} = 1$. Como $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, então, pelo Lema B.2, para todo $u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^s(\mathbb{R}^N)$ temos $f(u) \in L^2(\mathbb{R}^N) + L^\beta(\mathbb{R}^N)$ e $f(u_n) \to f(u)$ em $L^2(\mathbb{R}^N) + L^\beta(\mathbb{R}^N)$ (já que $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$). Observe, ainda, que

$$|(\Psi'(u_n) - \Psi'(u)) \cdot v| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(u_n) - f(u)||v|dx.$$

Como $f(u_n)$, $f(u) \in L^2(\mathbb{R}^N) + L^\beta(\mathbb{R}^N)$, temos por definição

$$\begin{aligned} \|f(u_n)\|_{2\vee\beta} &= \inf\{\|h_1\|_2 + \|w_1\|_\beta \,:\, h_1 \in L^2(\Omega), w_1 \in L^\beta(\Omega), f(u_n) = h_1 + w_1\}, \\ \|f(u)\|_{2\vee\beta} &= \inf\{\|h_2\|_2 + \|w_2\|_\beta \,:\, h_2 \in L^2(\Omega), w_2 \in L^\beta(\Omega), f(u) = h_2 + w_2\}. \end{aligned}$$

Além disso, como $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, utilizando a imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, segue que $v \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Assim, temos, por definição, que

$$\|v\|_{2\wedge s} = \|v\|_2 + \|v\|_s \quad \text{onde} \quad s = p+1.$$

Desta forma, utilizando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} &|(\Psi'(u_n) - \Psi'(u)) \cdot v| \\ &\quad\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(u_n) - f(u)||v|dx = \int_{\mathbb{R}^N} |(h_1 - h_2) + (w_1 - w_2)||v|dx \\ &\quad\leq \int_{\mathbb{R}^N} |h_1 - h_2||v| + \int_{\mathbb{R}^N} |w_1 - w_2||v| \leq \|h_1 - h_2\|_2\|v\|_2 + \|w_1 - w_2\|_\beta\|v\|_s \\ &\quad\leq \|h_1 - h_2\|_2(\|v\|_2 + \|v\|_s) + \|w_1 - w_2\|_\beta(\|v\|_2 + \|v\|_s) \\ &\quad= (\|h_1 - h_2\|_2 + \|w_1 - w_2\|_\beta)\|v\|_{2\wedge s} \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} |(\Psi'(u_n) - \Psi'(u)) \cdot v| &\leq \inf\{\|h_1 - h_2\|_2 + \|w_1 - w_2\|_\beta\}\|v\|_{2\wedge s} \\ &= \|(h_1 - h_2) + (w_1 - w_2)\|_{2\vee\beta}\|v\|_{2\wedge s} \\ &= \|f(u_n) - f(u)\|_{2\vee\beta}(\|v\|_2 + \|v\|_s) \\ &\leq C_6\|f(u_n) - f(u)\|_{2\vee\beta}\|v\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$||\Psi'(u_n) - \Psi'(u)||_{H'} = \sup_{\|v\|\leq 1} |(\Psi'(u_n) - \Psi'(u)) \cdot v| \leq C_6\|f(u_n) - f(u)\|_{2\vee\beta} \to 0$$

e portanto $\Psi'$ é contínua em $H'$. ■

**Observação B.4** *Os funcionais $\Phi$ e $\Psi$ estão bem definidos em virtude da equivalência das normas $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ e $\|\cdot\|$, da* Observação 1.3 (item (i)) *do Capítulo 1 e da imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, para $2 \leq q < \infty$ se $N = 2$ e $2 \leq q \leq 2^*$ se $N \geq 3$.*

**Lema B.5** *Assuma as condições $(g_1)$, $(g_2)$, $(W_1)$ e $(W_2)$ do* Capítulo 2. *Então os funcionais $\Phi, \Psi : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidos por*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + V(x)u^2]dx \quad e \quad \Psi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx,$$

*onde* $F(s) = \displaystyle\int_0^u f(\tau)d\tau$*, pertencem a* $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ *e possuem derivadas dadas por*

$$\Phi'(u)\cdot v = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla v + V(x)uv]dx \quad e \quad \Psi'(u)\cdot v = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx.$$

*Em particular, o funcional*

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla u|^2 + V(x)u^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx,$$

*pertence a* $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ *e está bem definido.*

**Prova.** Análoga ao lema e a observação anterior. ■

**Lema B.6** *Sejam* $r > 0$ *e* $2 \le p < 2^*$*. Se* $\{u_n\}$ *é uma sequência limitada em* $H^1(\mathbb{R}^N)$ *e se*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u_n|^p dx \to 0 \quad quando \ n \to \infty,$$

*então* $\|u_n\|_q \to 0$ *para* $2 < q < 2^*$ *quando* $N \ge 3$ *e para* $2 < q < \infty$ *quando* $N = 2$.

**Prova.** Consideremos o caso $N \ge 3$ (o caso $N = 2$ é análogo). Seja $p < s < 2^*$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. As desigualdades de Hölder (desigualdade de interpolação) e Sobolev implicam que

$$\begin{aligned} ||u||_{L^s(B_r(y))} &\le ||u||^{1-\alpha}_{L^p(B_r(y))}||u||^{\alpha}_{L^{2^*}(B_r(y))} \\ &\le C||u||^{1-\alpha}_{L^p(B_r(y))}\left[\int_{B_r(y)}(|u|^2 + |\nabla u|^2)dx\right]^{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

onde $\alpha = \dfrac{s-p}{2^*-p}\dfrac{2^*}{s}$, $(0 < \alpha \le 1)$. Escolhendo $\alpha = 2/s$, obtemos

$$\int_{B_r(y)} |u|^s dx \le C^s ||u||^{(1-\alpha)s}_{L^p(B_r(y))}\int_{B_r(y)}(|u|^2 + |\nabla u|^2)dx$$

Agora, considerando uma família (enumerável) de bolas $\{B_r(y)\}_{y\in\mathbb{R}^N}$ cobrindo $\mathbb{R}^N$ tal que cada ponto de $\mathbb{R}^N$ esteja contido em no um número finito $K$ de bolas, encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N}|u|^s dx &= \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_r(y_i)} |u|^s dx \le \sum_{i=1}^{\infty}\int_{B_r(y_i)}|u|^s dx \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty}\left(C^s||u||^{(1-\alpha)s}_{L^p(B_r(y_i))}\int_{B_r(y_i)}(|u|^2+|\nabla u|^2)dx\right) \\ &\le C^s \sup_{y\in\mathbb{R}^N}\left[\int_{B_r(y)}|u|^p\right]^{(1-\alpha)\frac{s}{p}}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(|u|^2+|\nabla u|^2)\chi_{B_r(y_i)}dx \\ &\le C^s \sup_{y\in\mathbb{R}^N}\left[\int_{B_r(y)}|u|^p\right]^{(1-\alpha)\frac{s}{p}}\int_{\mathbb{R}^N}(|u|^2+|\nabla u|^2)\sum_{i=1}^{\infty}\chi_{B_r(y_i)}dx \\ &\le KC^s \sup_{y\in\mathbb{R}^N}\left[\int_{B_r(y)}|u|^p\right]^{(1-\alpha)\frac{s}{p}}\int_{\mathbb{R}^N}(|u|^2+|\nabla u|^2)dx, \end{aligned}$$

onde

$$\chi_{B_r(y_i)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in B_r(y_i), \\ 0, & \text{se} \quad x \notin B_r(y_i). \end{cases}$$

(observe que a passagem do somatório para dentro da integral é uma consequência do Teorema da Convergência Monótona, já que as funções características $\chi_{B_r(y_i)}$ são mensuráveis).

Desta forma, em virtude das hipóteses do lema, concluímos que $u_n \to 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$. Além disso, usando novamente a desigualdade de interpolação e a imersão de Sobolev contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\beta(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq \beta \leq 2^*$, obtemos:
**(i)** se $2 < q \leq s$, então

$$\|u_n\|_q \leq \|u_n\|_2^\lambda \|u_n\|_s^{1-\lambda} \leq C_1 \|u_n\|_s^{1-\lambda},$$

onde $\lambda = \dfrac{s-q}{s-2}\dfrac{2}{q}$, $(0 \leq \alpha \leq 1)$;
**(ii)** se $s \leq q < 2^*$, então

$$\|u_n\|_q \leq \|u_n\|_s^\mu \|u_n\|_{2^*}^{1-\mu} \leq C_2 \|u_n\|_s^{1-\mu},$$

onde $\mu = \dfrac{s-q}{s-2}\dfrac{2}{q}$, $(0 \leq \alpha \leq 1)$.

Portanto, desde que $u_n \to 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$, temos $\|u_n\|_q \to 0$ para $2 < q < 2^*$, como desejávamos. ■

**Lema B.7 (Identidade de Pohozaev)** *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto de classe $C^1$, $g$ uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, $G$ a função primitiva de $g$ tal que $G(0) = 0$ e $u \in H_0^1(\Omega) \cap H_{loc}^2(\overline{\Omega})$ uma função satisfazendo a equação*

$$-\Delta u = g(u) \quad q.t.p. \ em \ \Omega.$$

*Se $G(u) \in L^1(\Omega)$ e $n(\sigma)$ designa a normal exterior de $\partial\Omega$, então para todo $z^* \in \mathbb{R}^N$ fixo, temos:*

$$\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma - z^*) \cdot n(\sigma) d\sigma = N \int_\Omega G(u(x)) dx$$

*Em particular, se $\Omega = \mathbb{R}^N$, temos que*

$$\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = N \int_\Omega G(u(x)) dx.$$

**Prova.** Veja, por exemplo, [17, 21] ■

**Corolário B.8** *O problema de autovalor*

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x), \quad \lambda > 0 \ e \ x \in \mathbb{R}^N \tag{B.1}$$

*não possui solução $u \neq 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$.*

**Prova.** De fato, podemos reescrever o problema acima como

$$-\Delta u = f(u)$$

onde $f(u) = \lambda u$. Desta forma,

$$F(u) = \int_0^u f(s)ds = \int_0^u \lambda s ds = \frac{\lambda u^2}{2}$$

e pela identidade de Pohozaev, temos

$$\frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx = \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$$

Por outro lado, se $u$ for solução de (B.1), obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda u^2 dx.$$

Consequentemente,

$$\lambda \frac{2^*}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx$$

o que implica que

$$\left(\frac{2^*}{2} - 1\right)\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = 0,$$

donde concluímos que $u = 0$. Portanto $u \neq 0$ não pode ser solução de (B.1). ■

Mostraremos agora uma identidade variacional similar a identidade de Pohozaev clássica (dada no Lema B.7), cuja prova será análoga a uma encontrada em Willem [21] (p.137). Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = -V(x)u + \lambda f(u), \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{B.2}$$

onde $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\Omega$ é um domínio ilimitado e "suave" de $\mathbb{R}^N$, $f(0) = 0$, $V \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ é limitado e satisfaz a hipótese $(V_4)$ do Capítulo 1. Seja $F(u) = \int_0^u f(s)ds$, então temos o seguinte resultado:

**Teorema B.9** *Seja $u \in H^2_{\text{loc}}(\overline{\Omega})$ uma solução de* (B.2) *tal que $F(u) \in L^1(\Omega)$. Então $u$ satisfaz*

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \sigma \cdot \eta dx = \int_{\Omega}\left(N\lambda F(u) - \frac{N-2}{2}|\nabla u|^2 - \frac{N}{2}V(x)u^2 - \frac{1}{2}u^2 \nabla V(x)\cdot x\right)dx,$$

*onde $\eta$ denota a normal exterior unitária à $\partial\Omega$ e daqui por diante $\cdot$ denotará o produto escalar em $\mathbb{R}^N$.*

**Prova.** Consireremos inicialmente $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ com derivada limitada tal que $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi(r) = 1$ para $r \leq 1$ e $\phi(r) = 0$ para $r \geq 2$. Defina $\phi_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por

$$\phi_n(x) := \phi(|x|^2/n^2).$$

Afirmamos que existe $C > 0$ tal que

$$\phi_n \leq C, \quad |x||\nabla \phi_n(x)| \leq C \quad \text{para todo } \; n \in \mathbb{N}. \tag{B.3}$$

De fato, desde que $0 \leq \phi \leq 1$, obtemos

$$\phi_n(x) = \phi(|x|^2/n^2) \leq 1 \quad \text{para todo } \; x \in \mathbb{R}^N.$$

Por outro lado, temos

$$|x|^2/n^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq n \quad \text{e} \quad |x|^2/n^2 \geq 2 \Leftrightarrow |x| \geq n\sqrt{2}.$$

Assim, se $|x| \leq n$ ou $|x| \geq n\sqrt{2}$ temos $\nabla \phi_n(x) = 0$ e qualquer $C > 0$ satisfaz $|x||\nabla \phi_n(x)| \leq C$. Além disso, para $i = 1, 2, \ldots N$, temos

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial x_i}(x) = \phi'(|x|^2/n^2)2\frac{x_i}{n^2} \;\text{ implicando que }\; \nabla \phi_n(x) = \frac{2}{n^2}\phi'(|x|^2/n^2)x,$$

e como $\phi$ tem derivada limitada, existe $K > 0$ tal que $|\phi'(r)| \leq K$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Desse modo, se $n < |x| < n\sqrt{2}$ segue que

$$|x||\nabla \phi_n(x)| = \frac{2}{n^2}|\phi'(|x|^2/n^2)||x|^2 < \frac{4}{n^2}Kn^2 = 4K = C_1.$$

Portanto,

$$|x||\nabla \phi_n(x)| \leq C_1 \quad \text{para todo } \; x \in \mathbb{R}^N.$$

Assim, tomando $C = \max\{1, C_1\} > 0$, obtemos

$$\phi_n \leq C, \quad |x||\nabla \phi_n(x)| \leq C \quad \text{para todo } \; n \in \mathbb{N},$$

como desejávamos.

Agora, observe que $|x|^2/n^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq n$. Assim, para $x \in \mathbb{R}^N$ fixado, temos $|x| \leq n$ para $n$ suficientemente grande. Portanto, pela definição de $\phi_n$, segue que

$$\begin{cases} \phi_n(x) \to 1 & \text{q.t.p. em } \; \Omega, \\ \nabla \phi_n(x) \to 0 & \text{q.t.p. em } \; \Omega. \end{cases} \tag{B.4}$$

Note que se $u$ é solução de (B.2) então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $u$ satisfaz

$$0 = \Delta u - V(x)u + \lambda f(u) = (\Delta u - V(x)u + \lambda f(u))\, \phi_n x \cdot \nabla u. \tag{B.5}$$

Pela definição do operador divergente, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(x\phi_n F(u)) &= \sum_{i=1}^{N} (x_i \phi_n F(u))_{x_i} = \sum_{i=1}^{N} [\phi_n F(u) + x_i((\phi_n)_{x_i} F(u) + \phi_n f(u) u_{x_i})] \\ &= N\phi_n F(u) + F(u) x \cdot \nabla \phi_n + \phi_n f(u) x \cdot \nabla u, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\lambda \phi_n f(u) x \cdot \nabla u = \operatorname{div}(x\phi_n \lambda F(u)) - N\lambda \phi_n F(u) - \lambda F(u) x \cdot \nabla \phi_n. \tag{B.6}$$

Temos também,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\nabla u\phi_n x\cdot\nabla u) &= \sum_{i=1}^N (u_{x_i}\phi_n x\cdot\nabla u)_{x_i} = \sum_{i=1}^N [u_{x_i}\phi_n\sum_{j=1}^N (x_j u_{x_j})]_{x_i}\\
&= \sum_{i=1}^N \{u_{x_ix_i}\phi_n x\cdot\nabla u + \{u_{x_i}[(\phi_n)_{x_i}x\cdot\nabla u + \phi_n(\sum_{j=1}^N x_j u_{x_j})_{x_i}]\}\\
&= \phi_n\Delta u x\cdot\nabla u + x\cdot\nabla u\nabla\phi_n\cdot\nabla u + \phi_n\sum_{i=1}^N [u_{x_i}(\sum_{j=1}^N x_j u_{x_j})_{x_i}]\\
&= \phi_n\Delta u x\cdot\nabla u + x\cdot\nabla u\nabla\phi_n\cdot\nabla u + \phi_n\sum_{i=1}^N \{u_{x_i}[u_{x_i} + \sum_{j=1}^N (x_j u_{x_jx_i})]\},
\end{aligned}$$

implicando

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\nabla u\phi_n x\cdot\nabla u) &= \phi_n\Delta u x\cdot\nabla u + x\cdot\nabla u\nabla\phi_n\cdot\nabla u\\
&\quad + \phi_n|\nabla u|^2 + \phi_n\sum_{i=1}^N [u_{x_i}\sum_{j=1}^N (x_j u_{x_jx_i})].
\end{aligned}\tag{B.7}$$

Agora, seja

$$g(x) = \frac{|\nabla u(x)|^2}{2} = \frac{u_{x_1}^2}{2} + \cdots + \frac{u_{x_N}^2}{2}.$$

Note que

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = u_{x_1}u_{x_1x_i} + \cdots + u_{x_N}u_{x_Nx_i} = \sum_{j=1}^N u_{x_j}u_{x_jx_i},$$

o que nos dá

$$x\cdot\nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right) = x\cdot\nabla g = \sum_{i=1}^N [x_i\sum_{j=1}^N (u_{x_j}u_{x_jx_i})].$$

Assim, um cálculo direto nos fornece

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N [u_{x_i}\sum_{j=1}^N (x_j u_{x_jx_i})] &= u_{x_1}\sum_{j=1}^N (x_j u_{x_jx_1}) + \cdots + u_{x_N}\sum_{j=1}^N (x_j u_{x_jx_N})\\
&= x_1\sum_{j=1}^N (u_{x_j}u_{x_1x_j}) + \cdots + x_N\sum_{j=1}^N (u_{x_j}u_{x_Nx_j})\\
&= \sum_{i=1}^N [x_i\sum_{j=1}^N (u_{x_j}u_{x_ix_j})] = \sum_{i=1}^N [x_i\sum_{j=1}^N (u_{x_j}u_{x_jx_i})]\\
&= x\cdot\nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Observe que usamos para obter a igualdade acima o fato de $u_{x_ix_j} = u_{x_jx_i}$ q.t.p. em $\Omega$. Logo, substituindo o resultado acima em (B.7), obtemos

$$\operatorname{div}(\nabla u\phi_n x\cdot\nabla u) = \phi_n\Delta u x\cdot\nabla u + x\cdot\nabla u\nabla\phi_n\cdot\nabla u + \phi_n|\nabla u|^2 + \phi_n x\cdot\nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right).$$

Segue ainda, pelas propriedades de divergente, que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(x\frac{|\nabla u|^2}{2}\phi_n\right) &= \frac{|\nabla u|^2}{2}\phi_n \operatorname{div}(x) + \nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\phi_n\right)\cdot x \\ &= \frac{N}{2}\phi_n|\nabla u|^2 + \left[\nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)\phi_n + \frac{|\nabla u|^2}{2}\nabla\phi_n\right]\cdot x \\ &= \frac{N}{2}\phi_n|\nabla u|^2 + \phi_n x\cdot\nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right) + \frac{|\nabla u|^2}{2}x\cdot\nabla\phi_n.\end{aligned}$$

Das duas igualdades anteriores, obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(\left[\nabla u\, x\cdot\nabla u - x\frac{|\nabla u|^2}{2}\right]\phi_n\right) &= \phi_n\Delta u x\cdot\nabla u + x\cdot\nabla u\nabla\phi_n\cdot\nabla u \\ &\quad + \frac{2-N}{2}\phi_n|\nabla u|^2 - \frac{|\nabla u|^2}{2}x\cdot\nabla\phi_n,\end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned}\phi_n\Delta u x\cdot\nabla u = \operatorname{div}\left(\left[\nabla u\, x\cdot\nabla u - x\frac{|\nabla u|^2}{2}\right]\phi_n\right) + \frac{N-2}{2}\phi_n|\nabla u|^2 \\ + \frac{|\nabla u|^2}{2}x\cdot\nabla\phi_n - x\cdot\nabla u\nabla\phi_n\cdot\nabla u.\end{aligned} \tag{B.8}$$

Notemos, ainda, que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(\frac{1}{2}V(x)u^2\phi_n x\right) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(V(x)u^2\phi_n x_i)_{x_i} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\{V_{x_i}u^2\phi_n x_i + V(x)[2uu_{x_i}\phi_n x_i + u^2((\phi_n)_{x_i}x_i + \phi_n)]\} \\ &= \frac{1}{2}u^2\nabla V(x)\cdot x\phi_n + V(x)u\phi_n x\cdot\nabla u \\ &\quad + \frac{1}{2}V(x)u^2\nabla\phi_n\cdot x + \frac{N}{2}V(x)u^2\phi_n,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}-V(x)u\phi_n x\cdot\nabla u = \operatorname{div}\left(-\frac{1}{2}V(x)u^2\phi_n x\right) + \frac{N}{2}V(x)u^2\phi_n \\ + \frac{1}{2}u^2\nabla V(x)\cdot x\phi_n + \frac{1}{2}V(x)u^2\nabla\phi_n\cdot x.\end{aligned} \tag{B.9}$$

Desse modo, somando-se (B.6), (B.8) e (B.9) segue por (B.5) que

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}\left(\left[\lambda x F(u) + \nabla u x\cdot\nabla u - x\frac{|\nabla u|^2}{2} - \frac{1}{2}V(x)u^2 x\right]\phi_n\right) \\ &\quad = \left(N\lambda F(u) - \frac{N-2}{2}|\nabla u|^2 - \frac{N}{2}V(x)u^2 - \frac{1}{2}u^2\nabla V(x)\cdot x\right)\phi_n \\ &\qquad + \lambda F(u)x\cdot\nabla\phi_n - \frac{|\nabla u|^2}{2}x\cdot\nabla\phi_n + x\cdot\nabla u\nabla\phi_n\cdot\nabla u - \frac{1}{2}V(x)u^2\nabla\phi_n\cdot x.\end{aligned}$$

Integrando a expressão acima por partes e usando o Teorema da Divergência, obtemos para todo $n$

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega}\left[\left(\lambda\sigma F(u)+\nabla u\sigma\cdot\nabla u-\sigma\frac{|\nabla u|^2}{2}-\frac{1}{2}V(x)u^2\sigma\right)\phi_n\right]\cdot\eta\, d\sigma\\
&\quad=\int_\Omega \operatorname{div}\left(\left[\lambda xF(u)+\nabla ux\cdot\nabla u-x\frac{|\nabla u|^2}{2}-\frac{1}{2}V(x)u^2x\right]\phi_n\right)dx\\
&\quad=\int_\Omega\left(N\lambda F(u)-\frac{N-2}{2}|\nabla u|^2-\frac{N}{2}V(x)u^2-\frac{1}{2}u^2\nabla V(x)\cdot x\right)\phi_n dx\\
&\quad\quad+\int_\Omega \lambda F(u)x\cdot\nabla\phi_n dx-\int_\Omega\frac{|\nabla u|^2}{2}x\cdot\nabla\phi_n dx\\
&\quad\quad+\int_\Omega x\cdot\nabla u\nabla\phi_n\cdot\nabla u dx-\int_\Omega\frac{1}{2}V(x)u^2\nabla\phi_n\cdot xdx
\end{aligned}$$

Como $u=0$ sobre $\partial\Omega$, temos que $F(u)=0$ em $\partial\Omega$ e a expressão anterior torna-se

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega}\left[\left(\nabla u\sigma\cdot\nabla u-\sigma\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)\phi_n\right]\cdot\eta\, d\sigma\\
&\quad=\int_\Omega\left(N\lambda F(u)-\frac{N-2}{2}|\nabla u|^2-\frac{N}{2}V(x)u^2-\frac{1}{2}u^2\nabla V(x)\cdot x\right)\phi_n dx\\
&\quad\quad+\int_\Omega \lambda F(u)x\cdot\nabla\phi_n dx-\int_\Omega\frac{|\nabla u|^2}{2}x\cdot\nabla\phi_n dx\\
&\quad\quad+\int_\Omega x\cdot\nabla u\nabla\phi_n\cdot\nabla u dx-\int_\Omega\frac{1}{2}V(x)u^2\nabla\phi_n\cdot xdx.
\end{aligned}$$

Desde que $u\in H_0^1(\Omega)$, $F(u)\in L^1(\Omega)$, $V$ é limitado e satisfaz $(V_4)$, podemos usar (B.3) e (B.4) para aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e concluir, da expressão acima, que

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega}\left[\left(\nabla u\sigma\cdot\nabla u-\sigma\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)\right]\cdot\eta\, d\sigma\\
&\quad=\int_\Omega\left(N\lambda F(u)-\frac{N-2}{2}|\nabla u|^2-\frac{N}{2}V(x)u^2-\frac{1}{2}u^2\nabla V(x)\cdot x\right)dx.
\end{aligned}$$

Por fim, como em $\partial\Omega$, $\nabla u$ é paralelo a $\eta$, obtemos $\nabla u=\nabla u\cdot\eta\,\eta$, donde segue que $|\nabla u|^2=\nabla u\cdot\nabla u=(\nabla u\cdot\eta)^2$. Daí

$$\nabla u\cdot\sigma\nabla u\cdot\eta=(\nabla u\cdot\eta\,\eta)\cdot\sigma\nabla u\cdot\eta=(\nabla u\cdot\eta)^2\sigma\cdot\eta=|\nabla u|^2\sigma\cdot\eta.$$

Consequentemente, substituindo este resultado na expressão anterior, segue que

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2\sigma\cdot\eta dx=\int_\Omega\left(N\lambda F(u)-\frac{N-2}{2}|\nabla u|^2-\frac{N}{2}V(x)u^2-\frac{1}{2}u^2\nabla V(x)\cdot x\right)dx,$$

como desjávamos. ∎

**Corolário B.10** *Sejam $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ satisfazendo as condições $(f_1)$, $(f_2)$, $(V_2)$ e $(V_4)$ do* Capítulo 1. *Se $u \in H$ é um ponto crítico de $I_\lambda$, com $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$ arbitrário, então $u$ satisfaz*

$$\begin{aligned} \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx &+ \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla V(x) \cdot x u^2 dx - N\lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx = 0, \end{aligned} \tag{B.10}$$

**Prova.** Desde que o potencial $V$ é contínuo e satisfaz $(V_2)$, segue que $V$ é limitado. Por outro lado, como $f$ satisfaz $(f_1)$ e $(f_2)$, se $u \in H$ então, pelo item (i) da Observação 1.3 do Capítulo 1, $F(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, se $u \in H \equiv H^1(\mathbb{R}^N)$ é um ponto crítico de $I_\lambda$ (com $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$ arbitrário), onde

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x) u^2) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx,$$

concluímos pelos resultados de regularização (veja Berezin-Shubin [3] e Evans [7]) que $u \in H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ e tomando $\Omega = \mathbb{R}^N$ tem-se $\partial\Omega = \emptyset$ e, pelo teorema anterior, $u$ satisfaz (B.10), o que conclui nossa prova.

■

# Referências Bibliográficas


[1] Berestycki, H., Lions, P. L., *Nonlinear Scalar Field Equations I. Existence of a Ground State*, Arch. Rational Mech. Anal. **82**, 313-345, (1983).

[2] Berestycki, H., Gallouët, T., Kavian, O., *Équations de Champs Scalaires Euclidiens non Linéaires dans le plan*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **297**, 307-310, (1983).

[3] Berezin, F. A., Shubin, M. A., *The Schrödinger Equation*, Center for Optimization and Mathematical Modelling, Institute of New Technologies, Moscow, U.S.S.R., (1991).

[4] Brezis, H., *Analyse Fonctionelle, Theorie et Applications*, Masson, Paris, (1987).

[5] Coti Zelati, V., Rabinowitz, P. H., *Homoclinic type Solutions for a Semilinear Elliptic PDE on* $\mathbb{R}^N$, Comm. Pure Appl. Math. **45**, 1217-1269, (1992).

[6] Ekeland, I., *Convexity methods in Hamiltonian Mechanics*, Springer (1999).

[7] Evans, Lawrence C., *Partial Differential Equations*, Rhode Island: American Math. Society (1999).

[8] Jeanjean, L., *On the Existence of Bounded Palais-Smale Sequences and Application to a Landesman-Lazer-type Problem set on* $\mathbb{R}^N$, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **129**, 787-809, (1999).

[9] Jeanjean, L., Tanaka, K., *A Positive Solution for an Asymptotically Linear Elliptic Problem on* $\mathbb{R}^N$ *Autonomous at Infinity*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **7**, 597-614, (2002).

[10] ———, *A Positive Solution for a Nonlinear Schrödinger Equation on* $\mathbb{R}^N$, Indiana Univ. Math. J. **54**, 443-464, (2005).

[11] ———, *A Remark on Least Energy Solutions in* $\mathbb{R}^N$, Proc. Amer. Math. Soc. **131**, 2399-2408, (2003).

[12] ———, *A Note on a Mountain Pass Characterization of Least Energy Solutions*, Adv. Nonlinear Stud. **3**, 445-455, (2003).

[13] Jeanjean, L., Toland, J. F.,*Bounded Palais-Smale Mountain-Pass Sequences*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **327**, 23-28, (1998).

[14] Liu, Z., Wang, Z.Q., *Schrödinger Equations with Concave and Convex Nonlinearities*, Z. Angew. Math. Phys. **56** (4), 609-629, (2005).

[15] Lions, J. L., *The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Locally Compact Case. Part I*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1**, 109-145, (1984).

[16] ———, *The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Locally Compact Case. Part II*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1**, 223-283, (1984).

[17] Mitidieri, E., Pohozaev, S. I., *Nonexistence of positive solutions for quasilinear elliptic problems on* $\mathbb{R}^N$, PSMI **227**, 1-32, (1999).

[18] Rabinowitz, P.H., *On a Class of Nonlinear Schrödinger Equations*, Z. Angew. Math. Phys. **43**, 270-291, (1992).

[19] Schwartz, J., *Nonlinear Funcional Analysis*, Courant Institute, NYU, (1964).

[20] Strauss, W., *Mathematical Aspects of Classical Nonlinear Field Equations. Nonlinear Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Phys*, vol. **98**, Springer, Berlin-New York, (1979).

[21] Willem, M., *Minimax Theorems*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlim, (1996).