

Programa de Doutorado em Matemática - UFCG/UFPB
Exame de Qualificação em Geometria Riemanniana - 2011

Estudante: _____ **Nota:** _____

1. Prove que a *aplicação antípoda* $A : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, dada por $A(p) = -p$, é uma isometria da esfera unitária $\mathbb{S}^n$. Use este fato para introduzir uma métrica Riemanniana no espaço projetivo real $\mathbb{RP}^n$ tal que a projeção canônica $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ seja uma isometria local.

2. Seja R o tensor curvatura de uma variedade Riemanniana n -dimensional M^n . Demostre a *Segunda Identidade de Bianchi*:

$$\nabla R(X, Y, Z, W, T) + \nabla R(X, Y, W, T, Z) + \nabla R(X, Y, T, Z, W) = 0,$$

para quaisquer $X, Y, Z, W, T \in \mathfrak{X}(M)$.

3. Seja $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana conexa M^n no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ munido de sua métrica canônica. Mostre que, se ψ é totalmente umbílica, então $\psi(M)$ está contida num hiperplano ou numa esfera de $\mathbb{R}^{n+1}$.

4. Seja $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$ o espaço hiperbólico n -dimensional munido de sua métrica canônica $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$.

(a) Verifique que $\mathbb{H}^n$ tem curvatura seccional constante igual a -1 .

(b) Determine todas as geodésicas de $\mathbb{H}^n$. Conclua que $\mathbb{H}^n$ é (geodesicamente) completo.

5. Mostre que a aplicação $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$\psi(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta, \sin \theta, \cos \phi, \sin \phi), \quad (\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2,$$

é uma imersão de $\mathbb{R}^2$ na esfera unitária $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, cuja imagem $\psi(\mathbb{R}^2)$ é um toro $\mathbb{T}^2$ com curvatura seccional zero na métrica induzida.

6. Seja M^n uma variedade Riemanniana com curvatura seccional não-positiva. Prove que, para todo ponto $p \in M^n$, o lugar dos pontos conjugados $C(p)$ é vazio.

7. Enuncie e, utilizando a fórmula da segunda variação do funcional energia de uma variedade Riemanniana completa, demonstre o *Teorema de Bonnet-Myers*.