

Programa de Doutorado em Matemática - UFCG/UFPB
Exame de Qualificação em Geometria Riemanniana - 2012

Estudante: _____ **Nota:** _____

1. Resolva os seguintes itens:

- (a) Defina *métrica Riemanniana*, *conexão afim* e *conexão Riemanniana*.
- (b) Enuncie e demonstre o *Teorema de Levi-Civita*.

2. Seja M^n uma variedade Riemanniana conexa, com $n \geq 3$. Suponha M^n é *isotrópica*, isto é, para cada $p \in M^n$, a curvatura seccional $K(p, \sigma)$ não depende do subespaço $\sigma \subset T_p M$. Prove que M^n tem curvatura seccional constante, isto é, $K(p, \sigma)$ também não depende de p .

3. Seja M^n uma variedade Riemanniana n -dimensional. Prove que a curvatura escalar $S(p)$ em $p \in M^n$ é dada por:

$$S(p) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} Ric_p(x) d\sigma,$$

onde ω_{n-1} é a área da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1} \subset T_p M$, $Ric_p(x)$ é a curvatura de Ricci de M^n em p na direção $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $d\sigma$ é o elemento de área de $\mathbb{S}^{n-1}$.

4. Seja M^n uma variedade Riemanniana com curvatura seccional identicamente nula. Mostre que, para todo $p \in M^n$, a aplicação exponencial $\exp_p : B_\varepsilon(0) \subset T_p M \rightarrow B_\varepsilon(p)$ é uma isometria, onde $B_\varepsilon(p)$ é uma bola normal centrada em p .

5. Uma variedade Riemanniana é dita *homogênea* se, dados quaisquer $p, q \in M^n$, existe uma isometria $\phi : M^n \rightarrow M^n$ tal que $\phi(p) = q$. Prove que toda variedade Riemanniana homogênea é completa.

6. Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa. Suponha que, para cada $p \in M^n$, o lugar $C(p)$ dos primeiros pontos conjugados de p se reduz a um único ponto $q \neq p$, e que $d(p, C(p)) = \pi$. Prove que, se a curvatura seccional K de M^n satisfaz $K \leq 1$, então M^n é isométrica à esfera unitária Euclidiana $\mathbb{S}^n$.

7. Enuncie e demonstre o *Teorema de Cartan* sobre a determinação da métrica pelo tensor curvatura de uma variedade Riemanniana.