

Programa de Doutorado em Matemática - UFPB/UFCG
Exame de Qualificação em Álgebra Comutativa - 1º Semestre/2012

Aluno(a): _____ **Matrícula:** _____

Em toda esta prova, todos os anéis são comutativos com unidade (com $1 \neq 0$).

1. (1,5 ponto) Seja A um anel. Mostre que:
 - a) Se $\text{Spec}(A)$ é um espaço de Hausdorff, então $\dim(A) = 0$.
 - b) Se A é um anel noetheriano, então o conjunto dos subconjuntos abertos de $\text{Spec}(A)$ satisfaz a condição de cadeia ascendente.
2. (1,5 ponto) Sejam A um anel e M um A -módulo. Mostre que:
 - a) Se N_1 e N_2 são submódulos de M tais que M/N_1 e M/N_2 são noetherianos, então $M/(N_1 \cap N_2)$ é também noetheriano.
 - b) Se S é um subconjunto multiplicativamente fechado de A (com $1 \in S$ e $0 \notin S$), então $S^{-1}A \otimes M \simeq S^{-1}M$ (como A -módulos).
3. (1,5 ponto) Enuncie precisamente e demonstre o *Lema de Nakayama*. (Dica: trabalhe com um conjunto gerador de tamanho mínimo.)
4. (1,5 ponto) Sejam A um anel e I um ideal finitamente gerado de A . Supondo que todo ideal de A contido em I admite decomposição primária, mostre que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = \{x \in A \mid x \in xI\}.$$

(Dica: se $I \subseteq r(J)$ (radical de J), então $I^m \subseteq J$ para algum $m \in \mathbb{N}$.)

5. (1,0 ponto) Sejam A um anel e D um subanel de A tais que D é um domínio de integridade e A é inteiro sobre D . Mostre que A é domínio de integridade se, e somente se, $P \cap D \neq \{0\}$ para todo ideal primo P não nulo de A .
6. (1,5 ponto) Sejam A um anel noetheriano e I um ideal de A . Mostre que:
 - a) Se todo ideal primo de A que contém I é maximal, então para cada $a \in A$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in I + (a^{n+1})$.
 - b) Se todo ideal de A é principal, então $\dim(A) \leq 1$.
7. (1,5 ponto) Enuncie precisamente as versões algébrica e geométrica do *Teorema dos Zeros de Hilbert*. Use o Lema de Normalização de Noether para demonstrar a versão algébrica.

BOA SORTE!