

Programa de Doutorado em Matemática - UFPB/UFPG  
Exame de Qualificação Álgebra Comutativa - 2<sup>o</sup> Semestre/2012

Aluno:

Matrícula:

**Observação:** Todos os anéis deste texto são anéis comutativos com unidade.

**Quesito 1:** Seja  $A \subseteq B$  uma extensão integral de anéis e seja  $S \subseteq A$  um subconjunto multiplicativamente fechado. Prove que  $S^{-1}B$  é integral sobre  $S^{-1}A$ .

**Quesito 2:** Seja  $R$  um anel Artiniano e  $J$  o radical de Jacobson de  $R$ . Prove que o anel  $R/J$  é isomorfo a um produto cartesiano finito de corpos.

**Quesito 3:** Seja  $R$  um anel Noetheriano e  $I$  um ideal de  $R$ . Prove que  $I = \sqrt{I}$  se, e somente se,  $I$  é uma interseção finita de ideais primos.

**Quesito 4:** Seja  $M$  um  $R$ -módulo e  $u : M \rightarrow M$  um homomorfismo de módulos.

- (a) Se  $M$  é Noetheriano e  $u$  é sobrejetiva, prove que  $u$  é um isomorfismo.
- (b) Se  $M$  é Artiniano e  $u$  é injetiva, prove que  $u$  é um isomorfismo.

**Quesito 5:** Sejam  $R$  um anel Noetheriano local e  $\mathfrak{m}$  o seu ideal maximal. Seja  $I$  um ideal de  $R$ . Defina  $J := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (I : \mathfrak{m}^n)$ .

- (a) Prove que  $J$  é um ideal de  $R$  e que  $I \subseteq J$ .
- (b) Prove que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $J = (I : \mathfrak{m}^N)$ .
- (c) Prove que  $\ell_R(J/I) < \infty$ , onde  $\ell_R(J/I)$  é o comprimento do  $R$ -módulo  $J/I$ .

**Quesito 6:** Sejam  $R$  um anel local e  $\mathfrak{m}$  o seu ideal maximal. Dizemos que  $R$  é *regular* se a dimensão de  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  como espaço vetorial sobre  $K = R/\mathfrak{m}$  é igual à dimensão de Krull de  $R$ . Mostre que se  $R$  é um anel Artiniano e regular, então  $R$  é um corpo.