

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Estudo de uma Classe de Equações de Schrödinger com Potencial Constante

por

Diogo de Santana Germano

sob a orientação do

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Janeiro/2009
João Pessoa - PB

G373e Germano, Diogo de Santana.

Estudo de uma classe de equações de Schrödinger com
potencial constante / Diogo de Santana Germano.- João
Pessoa, 2009.

101p.

Orientador: Uberlândio Batista Severo

Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Resultado abstrato. 3. Bifurcação. 4.
Desigualdade de Trudinger-Moser.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Estudo de uma Classe de Equações de Schrödinger com Potencial Constante

por

Diogo de Santana Germano

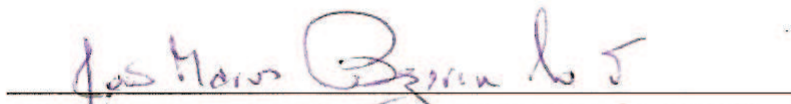
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

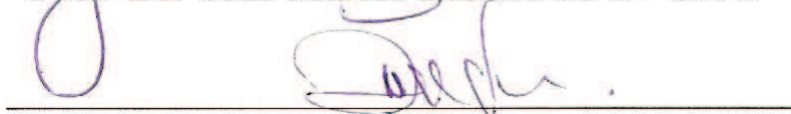
Aprovada por:



Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB (Orientador)



Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB



Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Moraes Filho - UFCG

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

12/Janeiro/2009

Agradecimentos

- À Deus. “Que darei eu ao SENHOR, por todos os benefícios que me tem feito?” (Sl 116.12). “Porque tu és a minha rocha e a minha fortaleza; ... eu confiei em ti, SENHOR; e disse: Tu és o meu Deus. Os meus tempos estão nas tuas mãos; Oh! quão grande é a tua bondade, que guardaste para os que te temem, a qual operaste para aqueles que em ti confiam na presença dos filhos dos homens! Esforçai-vos, e ele fortalecerá o vosso coração, vós todos que esperais no SENHOR.” (Sl 31.3,14,15,19,24).
- Aos meus pais, José Delmiro Gomes Germano e Valdiléa de Santana Germano, a meus irmãos e a minha avó, pela força, auxílio, confiança e incentivo, sempre me ajudando em todos os momentos.
- À minha noiva, Julyanna de Sousa Barbosa, pelo amor, pelas orações, pela compreensão e fé, sempre crendo em mais um desfecho vitorioso de minha vida.
- Aos meus pais na fé, Pastor Robério Ricardo e irmã Francisquinha e a todos meus irmãos amados em Cristo, pelo amor sincero, pelas orações e comunhão.
- Ao Professor Uberlandio Batista Severo, pela paciência, por ter acreditado em mim, por ter sido amigo e conselheiro, pela enorme contribuição na realização deste trabalho e por sempre ajudar em todos os momentos nunca perdendo a severidade na matemática. Enfim pelo excelente trabalho de orientação.
- Aos professores de graduação e pós-graduação, em especial Osmundo Alves de Lima que muito me incentivou nos estudos, além dos professores Everaldo Souto Medeiros e João Marcos Bezerra do Ó pelo crédito e auxílio que deram ao meu trabalho e pela participação no meu desenvolvimento.
- Aos colegas do mestrado, em especial Gerson, Jackson, Jairo, Marco Aurélio e Robson, pela amizade, troca de experiências e companheirismo. Que Deus abençoe a todos!
- À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro e à UFPB; particularmente, à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática.
- Por fim, agradeço a todos que de forma direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Dedicatória

*A minha noiva Julyanna e a minha
família.*

Resumo

Neste trabalho estudamos questões relacionadas a existência, bifurcação e regularidade de soluções para equações semilineares da forma

$$\begin{cases} -\Delta u + Ku = f(x, u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0, \end{cases} \quad (P)$$

onde K é uma constante positiva e $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Mais especificamente, abordamos um problema do tipo Landesman-Lazer, existência de pontos de bifurcação no caso em que $f(x, s)$ satisfaz apenas condições locais e um problema com crescimento crítico no plano. Dependendo das condições sobre a não-linearidade $f(x, s)$, usaremos diferentes métodos variacionais, a saber, um resultado abstrato baseado num argumento de monotonicidade de Struwe, uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser e o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange.

Abstract

In this work we study subjects related to the existence, bifurcation and regularity of solutions for semilinear equations of the form

$$\begin{cases} -\Delta u + Ku = f(x, u) & \text{in } \mathbb{R}^N, \quad K > 0 \\ u \geq 0, \end{cases} \quad (P)$$

where K is a positive constant and $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function. More specifically, we board a Landesman-Lazer type problem, existence of points of bifurcation in the case where $f(x, s)$ satisfies only local conditions and a problem with critical growth in the plane. Depending on the conditions in the nonlinearity $f(x, s)$, we use different variational methods, namely, an abstract result based on a monotonicity argument of Struwe, a Trudinger-Moser type inequality and the Lagrange Multipliers Theorem.

Sumário

Lista de Símbolos	2
Introdução	6
1 Resultados abstratos	14
1.1 Resultados preliminares	14
1.2 Teorema abstrato para uma classe de funcionais	18
2 Um problema do tipo Landesman-Lazer em $\mathbb{R}^N$	24
2.1 Introdução	24
2.2 Geometria do Passo da Montanha	28
2.3 Uma seqüência de pontos críticos	35
2.4 Existência de solução positiva não-trivial	41
3 Condições locais de bifurcação para um problema semilinear	50
3.1 Introdução	50
3.2 Estrutura variacional	52
3.3 Um ponto crítico para quase todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$	58
3.4 Existência de seqüência bifurcante para o problema modificado	61
3.5 Existência de seqüência bifurcante para o problema original	63
4 Um problema semilinear com crescimento crítico em $\mathbb{R}^2$	67
4.1 Introdução	67
4.2 Estimativas sobre a função $e^{\alpha u^2}$	69
4.3 Minimização sobre uma variedade	73
4.4 Existência de solução positiva radialmente simétrica	82
A Resultados auxiliares	88
A.1 Algumas estimativas	88
A.2 Regularidade de funcionais	90
A.3 Resultados em Espaços de Banach	93
A.4 Resultados envolvendo os Espaços L^p	94
A.5 Resultados envolvendo Espaços de Sobolev	96
Referências Bibliográficas	100

Lista de Símbolos

Notações Gerais

$B_\delta(x)$	bola aberta de centro x e raio δ ,
$ A $	medida de Lebesgue de um conjunto A ,
X	espaço de Banach real,
q.t.p.	quase toda parte,
$u _A$	restrição da função u ao conjunto A ,
X	espaço de Banach real,
X'	dual topológico de X ,
f'	denota a derivada de Gâteaux e derivada de Fréchet da função f ,
$\text{supp}f$	suporte da função f ,
$ \cdot $	norma euclidiana,
$\ \cdot\ $	denota a norma de X e de X^* ,
$D^\alpha u$	α -derivada fraca de $u \in L^1(\Omega)$, onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é um multiíndice de ordem $ \alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$,
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$	gradiente de u ,
$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	laplaciano de u ,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \partial_\nu u = \nu \cdot \nabla u$$

derivada normal interior,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle$$

denota produto interno
e aplicação dualidade,

$$C, C_0, C_1, C_2, C_3, \dots,$$

denotam constantes positivas,

$$\Omega \subset \mathbb{R}^N$$

domínio no espaço $\mathbb{R}^N$,

$$\overline{\Omega}$$

fecho do conjunto Ω ,

$$\partial\Omega$$

fronteira de Ω ,

$$p' = p/(p-1)$$

conjugado hölderiano de p ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f$$

limite superior da função f
quando $n \rightarrow \infty$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f$$

limite inferior da função f
quando $n \rightarrow \infty$,

■

indica final de demonstração.

Espaços de Funções

$L^p(\Omega)$	funções mensuráveis u sobre Ω tais que $\int_{\Omega} u ^p dx < \infty, 1 \leq p < \infty,$
$L^\infty(\Omega)$	funções mensuráveis u sobre Ω tais que existe C satisfazendo $ u(x) \leq C$ q. t. p. sobre Ω ,
$C_c(\Omega)$	funções contínuas com suporte compacto em Ω ,
$\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$	semi-eixo real não negativo,
$C^k(\Omega)$	funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω , $k \in \mathbb{N}$,
$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$	
$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$	
$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$	
$C(\overline{\Omega})$	funções contínuas sobre $\overline{\Omega}$,
$W^{1,p}(\Omega)$	funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que existem $g_1, g_2, \dots, g_N$ $\in L^p(\Omega)$ satisfazendo $\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx$, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, \dots, n$ com $1 \leq p \leq \infty$,
$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$	
$W^{m,p}(\Omega)$	funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $\forall \alpha > 0$ com $ \alpha \leq m$, $\exists g_\alpha \in L^p(\Omega)$ satisfazendo $\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx =$ $= (-1)^{ \alpha } \int_{\Omega} g_\alpha \varphi dx \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$,
$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$	
$W_0^{1,p}(\Omega)$	o complemento de $C_c^1(\Omega)$, na norma de $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$,
$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$	
$W^{-1,p'}(\Omega)$	dual topológico do espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$,

Normas

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p \right)^{1/p} \quad \text{norma do espaço de Lebesgue } L^p(\Omega),$$

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p = \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right) \quad \text{norma do espaço de Sobolev } W^{1,p}(\Omega),$$

$$\|\nabla u\|_p = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p \right)^{1/p} \quad \text{norma do espaço } W_0^{1,p}(\Omega), \text{ equivalente a } \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

$$\|u\| = (\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2)^{1/2} \quad \text{norma do espaço } H^1(\Omega), \text{ equivalente a } \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

$$p^* \quad \text{expoente crítico de Sobolev definido por}$$

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p} & \text{se } 1 \leq p < N \\ \infty & \text{se } p \geq N \end{cases}$$

$$f = o(g) \text{ quando } x \rightarrow x_0 \quad \text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Introdução

Neste trabalho, discutimos questões relacionadas a existência, bifurcação e regularidade de soluções para uma classe de problemas elípticos semilineares da forma

$$-\Delta u + Ku = f(x, u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad (P)$$

onde $N \geq 2$, K é uma constante positiva e a não-linearidade $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. No decorrer do trabalho, teremos hipóteses adicionais sobre a função f .

Ao estudar a equação (P) , utilizamos métodos variacionais, isto é, analisamos a existência de pontos críticos do funcional energia associado a (P) . Em todos os casos, exibimos estimativas sobre a não-linearidade $f(x, s)$ a fim de que o funcional energia associado a (P) esteja bem definido no espaço de Banach $H^1(\mathbb{R}^N)$, e assim, relacionamos os pontos críticos deste funcional com as soluções de (P) . Nos baseamos nos trabalhos de [8, 11, 12].

A equação semilinear (P) está relacionada com aplicações em diversas áreas da física-matemática. Por exemplo, podemos relacioná-la com a seguinte equação de Schrödinger não-linear

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta \psi + W(x)\psi - g(|\psi|)\psi \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad (S)$$

em que $N \geq 2$, $\psi = \psi(t, x)$, $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$, $W : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é um potencial dado (neste caso uma função constante) e $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função conveniente. Soluções da equação (P) fornecem soluções do tipo onda estacionária para a equação (S) , ou seja, se $u(x)$ for uma solução de (P) então $\psi(t, x) = e^{i\omega t}u(x)$, $\omega \in \mathbb{R}$, é uma solução de (S) (para mais detalhes, veja [3, 7, 15, 18, 20]). Além disso, quando o potencial W é uma função que depende da variável x , a equação de Schrödinger é a equação fundamental da Mecânica Quântica, no mesmo sentido que a segunda lei do movimento constitui a equação fundamental da Mecânica Newtoniana. No caso particular em que a energia potencial é constante, temos o importante caso da partícula livre.

O nosso trabalho está dividido em quatro capítulos.

No Capítulo 1, provamos um Teorema Abstrato estabelecido por Jeanjean [12] baseado em um argumento de monotonicidade de Struwe [21, 22]. Tal argumento

tem sido usado pelo próprio Struwe, bem como por outros matemáticos, para resolução de difíceis problemas variacionais envolvendo a Geometria do Passo da Montanha. Entretanto, o raciocínio de Struwe tem sido muito empregado apenas para circunstâncias específicas devido a dificuldade em identificar classes de problemas que permitem abordar tal técnica. Porém a apresentação dos resultados é simples e possuem várias aplicações.

O principal resultado do Capítulo 1 é o seguinte:

Teorema 0.1 *Seja X um espaço de Banach munido com uma norma $\|\cdot\|$ e seja $J \subset \mathbb{R}^+$ um intervalo. Consideremos uma família $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$ de funcionais de classe C^1 em X da seguinte forma*

$$I_\lambda(u) = A(u) - \lambda B(u) \quad \forall \lambda \in J,$$

onde $B(u) \geq 0$, para todo $u \in X$ e tais que $A(u) \rightarrow +\infty$ ou $B(u) \rightarrow +\infty$ quando $\|u\| \rightarrow \infty$. Suponhamos que existam dois pontos $v_1, v_2 \in X$ tais que, definindo

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X), \gamma(0) = v_1, \gamma(1) = v_2\}$$

temos, para todo $\lambda \in J$,

$$c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} I_\lambda(\gamma(t)) > \max\{I_\lambda(v_1), I_\lambda(v_2)\}.$$

Então, para quase todo $\lambda \in J$, existe uma seqüência $\{v_n\} \subset X$ tal que

$$(i) \{v_n\} \text{ é limitada, } (ii) I_\lambda(v_n) \rightarrow c_\lambda, \quad (iii) I'_\lambda(v_n) \rightarrow 0 \text{ no dual } X' \text{ de } X.$$

O Teorema 0.1 nos diz que existe uma seqüência de Palais-Smale limitada no nível do Passo da Montanha para quase todos os funcionais da família $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$. Uma questão natural que perguntamos é a seguinte: podemos generalizar a conclusão do Teorema 0.1 no sentido de obtermos o mesmo resultado para todos os funcionais $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$? A resposta para esta pergunta é negativa. Em Brezis [5], encontramos um contra-exemplo que apresentamos no final deste capítulo.

Uma aplicação natural do Teorema 0.1 é mostrar a existência de soluções para uma equação elíptica através de métodos variacionais, ou seja, através da busca de pontos críticos para um funcional da família $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$, que correspondem exatamente às soluções do problema considerado. Podemos fazer isto provando a existência de uma seqüência de Palais-Smale limitada, no nível do Passo da Montanha, a partir da qual, obtemos um ponto crítico para o funcional associado ao problema. Na verdade, o Teorema Abstrato é uma ferramenta poderosa para estabelecer a existência de tal seqüência (isto é, particularmente, verdade se o problema possuir algumas propriedades de compacidade). No entanto, o resultado não garante a existência desta seqüência para o funcional específico estudado. Neste caso, um corolário do Teorema 0.1 nos fornece, a partir da seqüência de Palais-Smale obtida no Teorema 0.1, uma nova seqüência de Palais-Smale, em um nível do Passo da Montanha, a partir da qual, obtemos pontos críticos para o funcional associado ao problema, desde que, a nova seqüência seja limitada. Como esta seqüência é obtida

de modo que seus termos são pontos críticos de funcionais pertencentes a família $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$, deduzimos propriedades que ajudam a mostrar sua limitação.

No Capítulo 2, utilizamos o Teorema Abstrato do Capítulo 1 para estudar a existência de soluções para a equação (P) onde $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $K > 0$ e f satisfaz as seguintes condições:

- $f_1)$ (i) $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função Caratheodory;
(ii) $f(\cdot, s) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $f(\cdot, s)$ é 1-periódica em x_i , $1 \leq i \leq N$.

- $f_2)$ Existe $p \in (2, \frac{2N}{N-2})$ se $N \geq 3$ e $p > 2$ se $N = 1, 2$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(x, s)}{s^{p-1}} = 0 \quad \text{uniformemente em } x \in \mathbb{R}^N.$$

- $f_3)$ $f(x, s)s^{-1} \rightarrow 0$ se $s \rightarrow 0$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$.

- $f_4)$ Existe $a \in (0, \infty]$ tal que $f(x, s)s^{-1} \rightarrow a$ se $s \rightarrow \infty$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$.

A fim de obtermos uma solução positiva de (P) , usaremos um procedimento variacional inspirado no corolário do Teorema Abstrato obtido no Capítulo 1. No momento, note que, formalmente, cada ponto crítico do funcional $I : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + Ku^2) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx$$

é uma solução do problema (P) . Usando o Princípio do Máximo Fraco, mostramos que esta solução é positiva. Veremos que quando as hipóteses (f_1) - (f_4) são satisfeitas e $K \in (0, a)$, I possui uma geometria do Passo da Montanha.

Para estudarmos a existência de soluções da equação (P) ou de problemas relativamente semelhantes, geralmente além das hipóteses (f_1) - (f_4) , assumimos que existe uma constante $\mu > 2$ tal que, para todo $s \geq 0$

$$0 \leq \mu F(x, s) < f(x, s)s, \quad \text{q.t.p. em } x \in \mathbb{R}^N. \quad (AR)$$

A condição (AR), que é conhecida como condição de Ambrosetti-Rabinowitz (ou condição de superquadraticidade), está ainda presente em muitos trabalhos sobre a busca de pontos críticos do tipo passo da montanha. Geralmente usamos a condição (AR) para assegurar que toda seqüência de Palais-Smale para I no nível do Passo da Montanha é limitada. No Capítulo 2 não assumimos essa hipótese.

Assumimos ainda as duas seguintes condições:

- $A_1)$ $G(x, s) \geq 0$, $\forall s \geq 0$, q.t.p. em $x \in \mathbb{R}^N$ e existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x, s)s^{-1} \geq K - \delta \implies G(x, s) \geq \delta$$

- $A_2)$ Existe $D \in [1, \infty)$ tal que, q.t.p. em $x \in \mathbb{R}^N$,

$$G(x, s) \leq DG(x, t), \quad \forall (t, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \text{ com } s \leq t$$

onde $G : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$G(x, s) = \frac{1}{2}f(x, s)s - F(x, s) \quad \text{com} \quad F(x, s) = \int_0^s f(x, t)dt$$

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 0.2

- (i) *Assuma que (f_1) - (f_4) e (A_1) ocorrem com $a < \infty$ em (f_4) . Então se $K \in (0, a)$ existe uma solução não-negativa não-trivial de (2.1).*
- (ii) *Assuma que (f_1) - (f_4) e (A_2) ocorrem com $a = \infty$ em (f_4) . Então existe uma solução não-negativa não-trivial de (2.1).*

Para provarmos o Teorema 0.2, observamos primeiro que I tem a seguinte forma

$$I(u) = A(u) - B(u)$$

com $A(u) \rightarrow +\infty$ quando $\|u\| \rightarrow \infty$ e $B(u) \geq 0$, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Em seguida, mostramos que a família de funcionais definida por

$$I_\lambda(u) = A(u) - \lambda B(u), \quad \lambda \in [1, 2],$$

satisfaz as hipóteses do Teorema Abstrato. Então obtemos que, para quase todo $\lambda \in [1, 2]$, existe uma sequência limitada $\{v_m\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$I_\lambda(v_m) \rightarrow c_\lambda \quad \text{e} \quad I'_\lambda(v_m) \rightarrow 0 \quad \text{em} \quad H^{-1}(\mathbb{R}^N).$$

Usando a invariância por translação de (P) , estabelecemos a existência de uma sequência $\{y_m\} \subset \mathbb{Z}^N$ tal que $u_m(x) := v_m(x - y_m)$ satisfaz $u_m \rightharpoonup u_\lambda \neq 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, onde $u_\lambda \geq 0$, com $I_\lambda(u_\lambda) \leq c_\lambda$ e $I'_\lambda(u_\lambda) = 0$. Neste ponto, temos provado a existência de uma sequência $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset [1, 2] \times H^1(\mathbb{R}^N)$ com $u_n \geq 0$ q.t.p. em $x \in \mathbb{R}^N$ tal que

- $\lambda_n \rightarrow 1$ e $\{\lambda_n\}$ é decrescente;
- $u_n \neq 0$, $I_{\lambda_n}(u_n) \leq c_{\lambda_n}$ e $I'_{\lambda_n}(u_n) = 0$.

Supondo que $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada, obtemos um ponto crítico não-trivial de I que corresponde a uma solução positiva de (P) . Para provarmos a limitação de $\{u_n\}$, usamos um método inspirado no trabalho de P. L. Lions [14] sobre o princípio de concentração de compacidade. Assumimos, por contradição, que $\|u_n\| \rightarrow \infty$. Então fixando $w_n = u_n \|u_n\|^{-1}$ (e usando se necessário a invariância por translação de (P)), existe uma subsequência de $\{w_n\}$, com $w_n \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, satisfazendo uma das duas seguintes alternativas:

1. **(Não-anulamento)** Existem $\alpha > 0$ e $R > 0$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R} w_n^2 dx \geq \alpha > 0.$$

2. (Anulamento)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{Z}^N} \int_{B_R(y)} w_n^2 dx = 0, \quad \text{para todo } R > 0.$$

Observamos que nenhum dos dois casos pode ocorrer o que é uma contradição. Tendo provado a limitação de $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, concluímos a prova do principal teorema do Capítulo 2.

No Capítulo 3, analisamos bifurcação de soluções para a seguinte classe de equações

$$-\Delta u(x) + \lambda u(x) = f(x, u(x)), \quad \lambda > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (P)_\lambda$$

Nosso objetivo será garantir que $\lambda = 0$ é um ponto de bifurcação para $(P)_\lambda$. Dizemos que $\lambda = 0$ é um ponto de bifurcação para $(P)_\lambda$ se existir uma seqüência $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbb{R}^+ \times H^1(\mathbb{R}^N)$ de soluções não-triviais de $(P)_{\lambda_n}$ com $\lambda_n \rightarrow 0$ e $\|u_n\| \rightarrow 0$. Neste caso, $\{(\lambda_n, u_n)\}$ é chamada uma seqüência bifurcante. Uma outra característica do nosso problema em $\mathbb{R}^N$ é a falta de compacidade.

Em nossa terminologia, afim de obtermos um ponto de bifurcação para a equação $(P)_\lambda$, utilizamos um método variacional baseado no Teorema Abstrato do Capítulo 1. Chamamos a atenção que são requeridas apenas condições locais sobre $f(x, \cdot)$. Mais precisamente, para algum $\delta > 0$ supomos que a não-linearidade $f(x, \cdot)$ satisfaz as seguintes hipóteses:

$g_1)$ $f : \mathbb{R}^N \times [-\delta, \delta] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função Caratheodory;

$g_2)$ $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x, s) = 0$ uniformemente para todo $s \in [-\delta, \delta]$;

$g_3)$ Existe $K > 0$ tal que $\limsup_{s \rightarrow 0} \left| \frac{f(x, s)}{s} \right| \leq K$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$;

$g_4)$ $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(x, s)}{s^2} = 0$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$ com $F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt$;

$g_5)$ Uma das seguintes condições são válidas

(i) $N \geq 1$ e existem $A > 0$, $d \in (0, 2)$ e $\alpha \in \left(0, \frac{2(2-d)}{N}\right)$ tais que

$$F(x, s) \geq A(1 + |x|)^{-d}|s|^{2+\alpha} \quad \forall s \in [-\delta, \delta] \text{ e q.t.p. em } x \in \mathbb{R}^N$$

(ii) $N = 1$ e existe $\alpha \in (0, 2)$ tal que

$$F(x, s) \geq r(x)|s|^{2+\alpha}, \quad \forall s \in [-\delta, \delta] \text{ e q.t.p. em } x \in \mathbb{R}$$

onde $r \in L^\infty(\mathbb{R})$, $r \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}} r(x) dx > 0$ (o valor $+\infty$ é possível).

Ressaltamos ainda que não assumimos a condição clássica (AR) com $s \in [-\delta, \delta]$, que é uma hipótese fundamental em grande parte dos problemas elípticos envolvendo métodos variacionais para obtenção de bifurcação de soluções. Além disso, as condições locais que assumimos sobre $f(x, s)$ são mais fracas do que (AR). De fato, a condição (AR) é mais forte do que nossas hipóteses, como verificamos na Observação 3.4, onde exibimos uma função f que satisfaz (g_1) - (g_5) , mas não cumpre (AR).

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 0.3 *Suponha que (g_1) - (g_5) são válidas. Então $\lambda = 0$ é um ponto de bifurcação para $(P)_\lambda$.*

Para demonstrar o Teorema 0.3, modificamos $f : \mathbb{R}^N \times [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ fora do intervalo $[-\delta, \delta]$ e mostramos que a equação com esta nova não-linearidade tem uma sequência bifurcante. Procedemos da seguinte forma: denotemos por $(I_\lambda)_{\lambda > 0}$ a família de funcionais obtida ao modificarmos $f(x, \cdot)$ no exterior de $[-\delta, \delta]$. Mostramos então que existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$, os seguintes conjuntos são não-vazios

$$\Gamma_\lambda = \{\gamma \in C([0, 1]; H^1(\mathbb{R}^N)), \gamma(0) = 0 \text{ e } I_\lambda(\gamma(1)) < 0\}$$

e

$$c(\lambda) = \inf_{\gamma \in \Gamma_\lambda} \max_{t \in [0, 1]} I_\lambda(\gamma(t)) > I_\lambda(0) = 0,$$

a saber, I_λ tem, para $\lambda \in (0, \lambda_0]$, possui a Geometria do Passo da Montanha.

A função $\lambda \rightarrow c(\lambda)$ é não-decrescente e então diferenciável para quase todo λ (veja [24, pag. 111]). Então, com o auxílio de argumentos análogos as preliminares do Teorema Abstrato do Capítulo 1, provamos que, para cada $\lambda \in (0, \lambda_0]$ onde a derivada $c'(\lambda)$ de $c(\lambda)$ existe, I_λ possui uma sequência de Palais-Smale limitada contida numa bola de $H^1(\mathbb{R}^N)$ centrada na origem cujo raio tende para zero quando $c(\lambda) \rightarrow 0$ e $c'(\lambda) \rightarrow 0$. Usando as propriedades de compacidade de $(P)_\lambda$, deduzimos que a equação tem, para cada λ , uma solução não-trivial que está na bola. Usando funções testes adequadas, mostra-se que $c(\lambda)\lambda^{-1} \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow 0$. Isto implica na existência de uma sequência estritamente decrescente $\lambda_n \rightarrow 0$ tal que $c(\lambda_n) \rightarrow 0$ e $c'(\lambda_n) \rightarrow 0$. Para as soluções correspondentes temos $\|u_n\| \rightarrow 0$ e isto prova a bifurcação para o problema modificado. Utilizando um argumento de “bootstrap” mostramos que $\|u_n\|_\infty \rightarrow 0$ e então $\lambda = 0$ também é um ponto de bifurcação para $(P)_\lambda$.

No capítulo 4, analisamos a existência de soluções para a equação (P) quando $f(x, s)$ não depende da variável x e se comporta como a função $e^{\alpha s^2}$ quando $s \rightarrow +\infty$. Mais especificamente, estudamos a equação

$$-\Delta u + Ku = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^2, \quad (*)$$

com $f(s)$ tendo crescimento crítico. Nosso intuito é obtermos a existência de uma solução de energia mínima positiva ω no nível

$$c = I(\omega) = \inf_{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I(tv) < \frac{4\pi}{\alpha_0}$$

onde ω é esfericamente simétrica em torno de algum ponto de $\mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial \omega}{\partial r}$ é negativa para todo $r > 0$, onde r é a coordenada radial em relação a este ponto.

Para obtermos a existência de solução, utilizamos o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange e a Identidade de Pohozaev. Aqui, vamos admitir que f satisfaça as seguintes condições:

$h_1)$ $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f(s) = 0$ para $s \leq 0$;

$h_2)$ $f(s) = o(s)$ quando $s \rightarrow 0$;

$h_3)$ f tem crescimento crítico em $+\infty$, ou seja, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2}} = 0 \quad \text{para todo } \alpha > \alpha_0$$

e

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2}} = +\infty \quad \text{para todo } \alpha < \alpha_0;$$

$h_4)$ Existe uma constante $\mu > 2$ tal que, para todo $s > 0$

$$0 \leq \mu F(s) = \mu \int_0^s f(t) dt < s f(s);$$

$h_5)$ A função $s \rightarrow f(s)/s$ é crescente para $s > 0$;

$h_6)$ Existem $p > 2$ e $\delta > 0$ tais que para todo $s > 0$,

$$f(s) \geq \left(\frac{p}{2} (S_p + \delta)^p \left(\frac{4\pi}{\alpha_0} \right)^{1-\frac{p}{2}} \right) s^{p-1}$$

onde

$$S_p = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}} \frac{[\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + K u^2) dz]^{\frac{1}{2}}}{[\int_{\mathbb{R}^2} |u|^p dz]^{\frac{1}{p}}}.$$

Observe que, diferentemente dos Capítulos 2 e 3, assumimos aqui a condição de Ambrosetti-Rabinowitz (h_4). Além disso, introduzimos o crescimento crítico em (h_3) e por esta razão exibimos uma versão da desigualdade de Trudinger-Moser em $\mathbb{R}^2$ (veja [8, 17, 23]) que afirma que se $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ então, para todo $\alpha > 0$, a integral $\int_{\mathbb{R}^2} [e^{\alpha u^2} - 1] dx$ é finita (veja [6, 8]).

O principal resultado do Capítulo 4 é o seguinte:

Teorema 0.4 *Suponha que a não-linearidade $f(s)$ satisfaça (h_1)-(h_6). Então o problema (4.1) possui uma solução de energia mínima positiva ω no nível*

$$c = I(\omega) = \inf_{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I(tv) < \frac{4\pi}{\alpha_0}$$

Além disso, ω é esfericamente simétrica em torno de algum ponto em $\mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial \omega}{\partial r}$ é negativa para todo $r > 0$, onde r é a coordenada radial em relação a este ponto.

Vejamos agora uma idéia da prova do Teorema 0.4. Inicialmente, observamos que a simetria radial para qualquer solução ω do problema (P) segue por uma observação em Berestycki-Lions, (veja [3, pag. 321]). Sabendo que o funcional associado a (P) é

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(u)dx$$

onde $F(u) = \int_0^u f(t)dt$ e $\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} [|\nabla u|^2 + Ku^2]dx$, definimos a variedade

$$M = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}; \int_{\mathbb{R}^2} F(u)dx = \frac{K}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx \right\}$$

e consideremos o número

$$I^0 = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx; u \in M \right\}.$$

Daí, prova-se que existe $u \in M$ tal que I^0 é atingido. Então, definindo

$$\Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^2} F(u)dx - \frac{K}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx \quad \text{e} \quad \Psi(u) = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx$$

observamos que $\Phi'(u) \neq 0$ para todo $u \in M$ e o fato de I^0 ser atingido é equivalente a dizer que existe $\tilde{u} \in M$ tal que $\Psi(\tilde{u}) = \inf_M \Psi(u)$. Logo, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Psi'(\tilde{u})\varphi = \lambda\Phi'(\tilde{u})\varphi \quad \text{para todo } \varphi \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Fazendo uma mudança de variável obtemos, a partir da expressão acima, uma solução fraca $\omega \in H^1(\mathbb{R}^2)$ de energia mínima para o problema (*). Além disso, pela teoria de regularidade elíptica, tal solução é clássica e é extritamente positiva pelo Princípio do Máximo Fraco. Finalmente, a partir da Identidade de Pohozaev, é possível mostrar que nossa solução está no nível

$$c = I(\omega) = \inf_{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I(tv) < \frac{4\pi}{\alpha_0}$$

o que conclui o nosso principal resultado.

Finalmente, concluimos nosso trabalho com o Apêndice A, que apresenta resultados importantes usados no decorrer de nossa dissertação.

Com o intuito de não ficarmos recorrendo à Introdução e de tornar os capítulos independentes, enunciaremos novamente, em cada capítulo, os resultados principais, bem como, as hipóteses sobre a função $f(x, s)$.

Capítulo 1

Resultados abstratos

1.1 Resultados preliminares

Nesta seção, apresentamos e demonstramos algumas estimativas desenvolvidas por Jeanjean [12], baseadas em um argumento de monotonicidade devido a Struwe [21], que são essenciais para provarmos o principal resultado deste capítulo, a saber, o Teorema Abstrato 1.3 da próxima seção. Para este fim, sejam X um espaço de Banach munido com uma norma $\|\cdot\|$ e $J \subset \mathbb{R}^+$ um intervalo. Consideramos também uma família $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$ de funcionais de classe C^1 em X da seguinte forma

$$I_\lambda(u) = A(u) - \lambda B(u), \quad \lambda \in J,$$

onde $B(u) \geq 0$ para todo $u \in X$ e tal que $A(u) \rightarrow +\infty$ ou $B(u) \rightarrow +\infty$ quando $\|u\| \rightarrow \infty$. Suponhamos a existência de dois pontos $v_1, v_2 \in X$ tais que, definindo

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X), \gamma(0) = v_1 \text{ e } \gamma(1) = v_2\},$$

temos, para todo $\lambda \in J$

$$c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} I_\lambda(\gamma(t)) > \max\{I_\lambda(v_1), I_\lambda(v_2)\},$$

isto é, os funcionais I_λ da família $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$, possuem a Geometria do Passo da Montanha. Desde que $J \subset \mathbb{R}^+$ e $B(u) \geq 0$, se $\lambda_1 \leq \lambda_2$, temos

$$I_{\lambda_1}(u) = A(u) - \lambda_1 B(u) \geq A(u) - \lambda_2 B(u) = I_{\lambda_2}(u)$$

para todo $u \in X$, o que implica que

$$c_{\lambda_1} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} I_{\lambda_1}(\gamma(t)) \geq \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} I_{\lambda_2}(\gamma(t)) = c_{\lambda_2},$$

ou seja, a aplicação $\lambda \rightarrow c_\lambda$ é não-crescente. Então, por um resultado de Teoria da Medida (veja Teorema 7.21 em [24]), que afirma que toda função monótona possui derivada em quase todo ponto, obtemos que c'_λ , a derivada de c_λ com respeito a λ , existe para quase todo $\lambda \in J$.

Seja $\lambda \in J$ um valor fixo, porém arbitrário, onde c'_λ existe e $\{\lambda_n\} \subset J$ uma sequência estritamente crescente tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Temos a seguinte proposição:

Proposição 1.1 *Existem uma seqüência de caminhos $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ e $K = K(c'_\lambda) > 0$ tais que*

(i) $\|\gamma_n(t)\| \leq K$ se $\gamma_n(t)$ satisfizer

$$I_\lambda(\gamma_n(t)) \geq c_\lambda - (\lambda - \lambda_n); \quad (1.1)$$

(ii) $\max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma_n(t)) \leq c_\lambda + (-c'_\lambda + 2)(\lambda - \lambda_n)$.

Prova. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\gamma_n \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) \leq c_{\lambda_n} + (\lambda - \lambda_n). \quad (1.2)$$

Provaremos que, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $\{\gamma_n\}$ é a seqüência que estamos procurando. Quando $\gamma_n(t)$ satisfaz (1.1), temos

$$\begin{aligned} \frac{I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) - I_\lambda(\gamma_n(t))}{\lambda - \lambda_n} &\leq \frac{c_{\lambda_n} + (\lambda - \lambda_n) - c_\lambda + (\lambda - \lambda_n)}{\lambda - \lambda_n} \\ &= \frac{c_{\lambda_n} - c_\lambda}{\lambda - \lambda_n} + 2. \end{aligned}$$

Desde que c'_λ existe e $\lambda_n \rightarrow \lambda$ temos

$$c'_\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{\lambda_n} - c_\lambda}{\lambda_n - \lambda},$$

ou seja, existe $n(\lambda) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n(\lambda)$

$$-c'_\lambda - 1 \leq \frac{c_{\lambda_n} - c_\lambda}{\lambda - \lambda_n} \leq -c'_\lambda + 1 \quad (1.3)$$

e então, para todo $n \geq n(\lambda)$,

$$\frac{I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) - I_\lambda(\gamma_n(t))}{\lambda - \lambda_n} \leq -c'_\lambda + 3.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \frac{I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) - I_\lambda(\gamma_n(t))}{\lambda - \lambda_n} &= \frac{A(\gamma_n(t)) - \lambda_n B(\gamma_n(t)) - A(\gamma_n(t)) + \lambda B(\gamma_n(t))}{\lambda - \lambda_n} \\ &= B(\gamma_n(t)) \\ &\leq c'_\lambda + 3. \end{aligned}$$

Também

$$\begin{aligned} A(\gamma_n(t)) &= A(\gamma_n(t)) + \lambda_n B(\gamma_n(t)) - \lambda_n B(\gamma_n(t)) = I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) + \lambda_n B(\gamma_n(t)) \\ &\leq c_{\lambda_n} + (\lambda - \lambda_n) + \lambda_n(-c'_\lambda + 3) \end{aligned}$$

e como (1.3) nos fornece

$$c_{\lambda_n} \leq c_\lambda + (\lambda - \lambda_n)(-c'_\lambda + 1),$$

obtemos

$$A(\gamma_n(t)) \leq c_\lambda + (\lambda - \lambda_n)(-c'_\lambda + 1) + (\lambda - \lambda_n) + \lambda_n(-c'_\lambda + 1) \leq C.$$

Então, se tivéssemos $\|\gamma_n(t)\| \rightarrow \infty$, por hipótese teríamos $A(\gamma_n(t)) \rightarrow +\infty$ ou $B(\gamma_n(t)) \rightarrow +\infty$, o que contraria a limitação uniforme de $A(\gamma_n(t))$ e $B(\gamma_n(t))$. Logo, está provado (i).

Para provarmos (ii), observamos novamente por (1.3) que, para todo $n \geq n(\lambda)$,

$$c_{\lambda_n} \leq c_\lambda + (-c'_\lambda + 1)(\lambda - \lambda_n). \quad (1.4)$$

Usando (1.2), (1.4) e

$$I_{\lambda_n}(v) \geq I_\lambda(v) \quad \forall v \in X,$$

obtemos

$$\begin{aligned} I_\lambda(\gamma_n(t)) &\leq I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) \leq c_n \lambda_n + (\lambda - \lambda_n) \\ &\leq c_\lambda + (\lambda - \lambda_n)(-c'_\lambda + 1) + (\lambda - \lambda_n) \\ &= c_\lambda + (\lambda - \lambda_n)(-c'_\lambda + 2) \end{aligned}$$

e o resultado está provado. ■

Esta proposição nos diz que existe uma seqüência de caminhos $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma_n(t)) \rightarrow c_\lambda,$$

onde, para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, começando por um nível estritamente abaixo de c_λ , todos os caminhos estão contidos numa bola centrada na origem com raio fixo $K = K(c'_\lambda) > 0$. Agora para $\alpha > 0$, defina

$$F_\alpha = \{u \in X; \|u\| \leq K + 1 \text{ e } |I_\lambda(u) - c_\lambda| \leq \alpha\}$$

onde $K > 0$ é a constante dada na Proposição 1.1. Temos o seguinte resultado:

Proposição 1.2 Para todo $\alpha > 0$,

$$\inf\{\|I'_\lambda(u)\|; u \in F_\alpha\} = 0. \quad (1.5)$$

Prova. Suponha, por contradição, que (1.5) não ocorre. Então existe $\alpha > 0$ tal que, para todo $u \in F_\alpha$, temos

$$\|I'_\lambda(u)\| \geq \alpha \quad (1.6)$$

e, sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}[c_\lambda - \max\{I_\lambda(v_1), I_\lambda(v_2)\}].$$

Agora, vamos usar um argumento clássico de deformação. Seja $S = B_K(0)$, $\delta = 1/2$, $\varepsilon \in (0, \alpha/16]$, $S_{2\delta} = \{u \in X; \text{dist}(u, S) \leq 2\delta\}$ e $I_\lambda^d = I_\lambda^{-1}((-\infty, d])$.

Note que, no nosso caso temos $S_{2\delta} = S_1 = B_{K+1}(0)$. Então, para todo $u \in I_\lambda^{-1}([c_\lambda - 2\varepsilon, c_\lambda + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$, ou equivalentemente, para todo $u \in X$ tal que

$$I_\lambda(u) \in [c_\lambda - 2\varepsilon, c_\lambda + 2\varepsilon] \text{ e } u \in S_1 = B_{K+1}(0),$$

temos

$$|I_\lambda(u) - c_\lambda| \leq 2\varepsilon \leq \alpha \text{ e } \|u\| \leq K + 1,$$

ou seja, $u \in F_\alpha$. Daí,

$$\|I'_\lambda(u)\| \geq \alpha \geq 16\varepsilon = \frac{8\varepsilon}{1/2}.$$

Pelo lema A.11, existe $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$ tal que

- (i) $\eta(t, u) = u$, se $t = 0$ ou se $u \notin I_\lambda^{-1}([c_\lambda - 2\varepsilon, c_\lambda + 2\varepsilon]) \cap S_1$;
- (ii) $\eta(1, I_\lambda^{c_\lambda + \varepsilon} \cap B_K(0)) \subset I_\lambda^{c_\lambda - \varepsilon}$;
- (iii) $\eta(t, \cdot)$ é um homeomorfismo de X , para todo $t \in [0, 1]$;
- (iv) $I_\lambda(\eta(\cdot, u))$ é não-crescente, para todo $u \in X$;

Assim, defina $\hat{\eta} : X \longrightarrow X$ por $\hat{\eta}(u) = \eta(1, u)$. Então por (i)

$$\hat{\eta}(u) = u \text{ se } |I_\lambda(u) - c_\lambda| \geq 2\varepsilon \quad (1.7)$$

onde, por (iii), $\hat{\eta}$ é um homeomorfismo. Por (iv), temos também

$$I_\lambda(\eta(0, u)) \geq I_\lambda(\eta(1, u))$$

donde obtemos

$$I_\lambda(\hat{\eta}(u)) \leq I_\lambda(u), \text{ para todo } u \in X \quad (1.8)$$

e, por fim, (ii) nos fornece

$$I_\lambda(\hat{\eta}(u)) \leq c_\lambda - \varepsilon, \quad \forall u \in X \text{ satisfazendo } \|u\| \leq K + 1 \text{ e } I_\lambda(u) \leq c_\lambda + \varepsilon. \quad (1.9)$$

Agora, seja $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ a seqüência obtida na Proposição 1.1. Escolhamos e fixemos $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que

$$(-c'_\lambda + 2)(\lambda - \lambda_m) \leq \varepsilon. \quad (1.10)$$

Mostremos que $\hat{\eta}(\gamma_m) \in \Gamma$, para todo $m \in \mathbb{N}$. De fato, como $\{\gamma_m\} \subset \Gamma$, temos $\gamma_m(0) = v_1$ e $\gamma_m(1) = v_2$, donde

$$\hat{\eta}(\gamma_m(0)) = \hat{\eta}(v_1) \text{ e } \hat{\eta}(\gamma_m(1)) = \hat{\eta}(v_2).$$

Além disso,

$$\varepsilon < \alpha < \frac{1}{2}c_\lambda - \frac{1}{2} \max_{t \in [0,1]} \{I_\lambda(v_1), I_\lambda(v_2)\} \leq \frac{1}{2}c_\lambda - \frac{1}{2}I_\lambda(v_1),$$

isto é, $-I_\lambda(v_1) + c_\lambda > 2\varepsilon$, ou ainda,

$$|I_\lambda(v_1) - c_\lambda| > 2\varepsilon,$$

e por (1.7), $\widehat{\eta}(v_1) = v_1$, ou seja, $\widehat{\eta}(\gamma_m(0)) = v_1$. De modo análogo, conclui-se que $\widehat{\eta}(\gamma_m(1)) = v_2$. Logo, $\widehat{\eta}(\gamma_m) \in \Gamma$.

Neste ponto, se $u = \gamma_m(t)$ podemos ter duas situações:

$$I_\lambda(u) \leq c_\lambda - (\lambda - \lambda_m) \quad \text{ou} \quad I_\lambda(u) > c_\lambda - (\lambda - \lambda_m).$$

No primeiro caso, (1.8) implica que

$$I_\lambda(\widehat{\eta}(u)) \leq I_\lambda(u) \leq c_\lambda - (\lambda - \lambda_m) \quad (1.11)$$

e no segundo caso, a Proposição 1.1 e (1.10) implicam que u satisfaz $\|u\| \leq K$ e

$$I_\lambda(u) \leq \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma_m(t)) \leq c_\lambda + (-c'_\lambda + 2)(\lambda - \lambda_m) \leq c_\lambda + \varepsilon.$$

Aplicando (1.9) temos

$$I_\lambda(\widehat{\eta}(u)) \leq c_\lambda - \varepsilon \leq c_\lambda - (\lambda - \lambda_m). \quad (1.12)$$

Então, combinando (1.11) e (1.12), obtemos

$$\max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\widehat{\eta}(\gamma_m(t))) \leq c_\lambda - (\lambda - \lambda_m) \leq c_\lambda$$

o que contradiz a caracterização variacional de c_λ e finaliza a prova da proposição. ■

1.2 Teorema abstrato para uma classe de funcionais

Nesta seção, provamos um resultado abstrato para uma classe de funcionais, a qual denotamos por $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$ onde J é um intervalo da reta, e apresentamos algumas consequências. Tal resultado diz que para quase todos os funcionais desta classe, existe uma seqüência de Palais-Smale limitada no nível do Passo da Montanha, o que está enunciado com detalhes no seguinte Teorema:

Teorema 1.3 *Seja X um espaço de Banach munido com a norma $\|\cdot\|$ e seja $J \subset \mathbb{R}^+$ um intervalo. Consideremos uma família $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$ de funcionais de classe C^1 em X da seguinte forma*

$$I_\lambda(u) = A(u) - \lambda B(u), \quad \forall \lambda \in J$$

onde $B(u) \geq 0$, para todo $u \in X$ e tais que $A(u) \rightarrow +\infty$ ou $B(u) \rightarrow +\infty$ quando $\|u\| \rightarrow \infty$. Suponhamos a existência de dois pontos $v_1, v_2 \in X$ tais que definindo

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X), \gamma(0) = v_1, \gamma(1) = v_2\}$$

temos, para todo $\lambda \in J$

$$c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) > \max\{I_\lambda(v_1), I_\lambda(v_2)\}.$$

Então, para quase todo $\lambda \in J$, existe uma seqüência $\{v_n\} \subset X$ tal que

- (i) $\{v_n\}$ é limitada, (ii) $I_\lambda(v_n) \rightarrow c_\lambda$, (iii) $I'_\lambda(v_n) \rightarrow 0$ no dual X' de X .

Prova. Pela proposição 1.2, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $\{v_n\} \in F_\alpha$ tal que $0 \leq \|I'_\lambda(v_n)\| < 1/n$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|I'_\lambda(v_n)\| = 0 \text{ em } X'$$

com $\|v_n\| \leq K + 1$. Além disso, como $\alpha > 0$ é arbitrário e satisfaz

$$|I_\lambda(v_n) - c_\lambda| \leq \alpha,$$

obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_\lambda(v_n) = c_\lambda$$

o que conclui a prova do teorema. ■

Corolário 1.4 *Seja X um espaço de Banach munido com uma norma $\|\cdot\|$ e seja $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional da forma*

$$I(u) = A(u) - B(u)$$

onde B e B' , a derivada de B em X , levam conjuntos limitados em conjuntos limitados. Suponha que exista $\varepsilon > 0$ tal que, para $J = [1 - \varepsilon, 1]$, a família $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$ definida por

$$I_\lambda(u) = A(u) - \lambda B(u)$$

satisfaz as hipóteses do Teorema 1.3. Finalmente, assuma que para todo $\lambda \in J$, qualquer seqüência de Palais-Smale limitada para I_λ no nível $c_\lambda \in \mathbb{R}$ admite uma subsequência convergente. Então existe uma seqüência $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset [1 - \varepsilon, 1] \times X$ com $\lambda_n \rightarrow 1$, $\{\lambda_n\}$ crescente, $I_{\lambda_n}(u_n) = c_{\lambda_n}$ e $I'_{\lambda_n}(u_n) = 0$ em X' , tal que, se $\{u_n\} \subset X$ é limitada, temos

- $I(u_n) = I_{\lambda_n}(u_n) + (\lambda_n - 1)B(u_n) \rightarrow c_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{\lambda_n}$
- $I'_{\lambda_n}(u_n) = I'_{\lambda_n}(u_n) + (\lambda_n - 1)B'(u_n) \rightarrow 0$ em X'

Para provarmos este Corolário, faremos uso do seguinte Lema:

Lema 1.5 *A aplicação $\lambda \rightarrow c_\lambda$ é contínua pela esquerda.*

Prova. Suponha, por contradição, que existe uma seqüência $\{\lambda_n\} \subset J$ com $\lambda_n < \lambda_0$ e $\lambda_n \rightarrow \lambda_0 \in J$ tal que

$$c_{\lambda_0} < \lim_{n \rightarrow \infty} c_{\lambda_n}.$$

Seja $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{\lambda_n} - c_{\lambda_0} > 0$. Pela definição de c_{λ_0} existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} I_{\lambda_0}(\gamma_0(t)) < c_{\lambda_0} + \frac{\delta}{3}.$$

Usando a igualdade

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= A(u) - \lambda B(u) + \lambda_0 B(u) - \lambda_0 B(u) \\ &= I_{\lambda_0}(u) + (\lambda_0 - \lambda)B(u) \quad \forall \lambda \in J, \end{aligned}$$

válida para todo $u \in X$, obtemos

$$\max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma_0(t)) < c_{\lambda_0} + \frac{\delta}{3} + (\lambda_0 - \lambda) \max_{t \in [0,1]} B(\gamma_0(t)) \quad \text{para todo } \lambda < \lambda_0.$$

Mas, desde que B é contínuo, pois

$$B(u) = \frac{I_\lambda(u) - I_{\lambda_0}(u)}{\lambda_0 - \lambda},$$

temos $\max_{t \in [0,1]} B(\gamma_0(t)) \leq C$ para algum $C > 0$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande obtém-se

$$(\lambda_0 - \lambda_n) \max_{t \in [0,1]} B(\gamma_0(t)) < \frac{\delta}{3C}$$

donde segue que

$$\max_{t \in [0,1]} I_{\lambda_n}(\gamma_0(t)) < c_{\lambda_0} + \frac{2\delta}{3}.$$

Mas, pela definição de c_{λ_n}

$$\max_{t \in [0,1]} I_{\lambda_n}(\gamma_0(t)) \geq c_{\lambda_n},$$

ou seja, sendo $L = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{\lambda_n}$, temos $c_{\lambda_0} + (2\delta)/3 > c_{\lambda_n}$, isto é, $c_{\lambda_0} + (2/3)(L - c_{\lambda_0}) \geq L$, ou equivalentemente,

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) c_{\lambda_0} \geq \left(1 - \frac{2}{3}\right) L.$$

Portanto

$$c_{\lambda_0} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} c_{\lambda_n}$$

o que é uma contradição. ■

Prova do Corolário 1.4. Pelo Teorema 1.3, para quase todo $\lambda \in J$ existe uma seqüência $\{v_m\}$ limitada tal que

$$I_\lambda(v_m) \rightarrow c_\lambda \quad \text{e} \quad I'_\lambda(v_m) \rightarrow 0.$$

Sendo $\{v_n\}$ uma subsequência convergente, obtemos $I_\lambda(v) = c_\lambda$ e $I'(v) = 0$, onde $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. Para quase todo $\lambda \in J$, denote $v_\lambda = v$. Consideremos agora uma seqüência crescente $\{\lambda_n\} \subset J$ tal que $\lambda_n \rightarrow 1$. Então definindo $u_n = v_{\lambda_n}$, existe $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset [1 - \varepsilon, 1] \times X$ com

$$\lambda_n \rightarrow 1, \quad \{\lambda_n\} \text{ crescente}$$

e

$$I_{\lambda_n}(u_n) = c_{\lambda_n} \quad \text{e} \quad I'_{\lambda_n}(u_n) = 0 \quad \text{em } X'$$

tal que, se $\{u_n\} \subset X$ é limitada, usando o Lema anterior e o fato de B e B' tomarem conjuntos limitados em conjuntos limitados, obtemos

$$I(u_n) = I_{\lambda_n} + (\lambda_n - 1)B(u_n) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_{\lambda_n} = c_1$$

$$I'(u_n) = I'_{\lambda_n}(u_n) + (\lambda_n - 1)B'(u_n) \rightarrow 0 \text{ em } X'$$

■

A importância do Corolário 1.4 é que se $\{u_n\}$ é limitada, então é uma seqüência de Palais-Smale limitada para I no nível c_1 .

Assim, uma vez obtida, pelo Teorema 1.1, uma seqüência de Palais-Smale no nível do Passo da Montanha nosso problema é mostrar sua limitação. Porém a seqüência $\{u_n\}$ obtida no Corolário 1.4 é uma seqüência de pontos críticos, e isto nos fornece propriedades adicionais na seqüência $\{u_n\}$ que ajudam a mostrar sua limitação.

Neste trabalho não utilizamos o Corolário 1.4, mas nos dois próximos capítulos vamos empregar a idéia do procedimento descrito acima para estabelecer a existência de uma seqüência de pontos críticos.

Exemplo 1.6 *O Teorema 1.3 pode ser utilizado em várias situações. Um importante caso particular é o seguinte: seja X um espaço de Banach com uma norma $\|\cdot\|$ e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional tal que $I(0) = 0$. Assuma que existam duas constantes positivas r, ρ e $v \in X$ com $\|v\| > \rho$ satisfazendo*

$$I(u) \geq r \text{ se } \|u\| = \rho \text{ e } I(v) \leq 0.$$

Com estas hipóteses, I tem uma Geometria do Passo da Montanha. Denote por $c \geq r$ o nível do passo da montanha. Agora, escrevendo I como

$$I(u) = I(u) - 0\|u\|^2$$

temos que existe $\varepsilon > 0$ tal que a família

$$I_\lambda(u) = I(u) - \lambda\|u\|^2 \text{ para } \lambda \in [0, \varepsilon]$$

satisfaz as hipóteses do Teorema 1.3.

De fato, basta verificar que cada I_λ possui Geometria do Passo da Montanha, pois as demais hipóteses são trivialmente verificadas. Temos, $I_\lambda(v) \leq 0$ para todo $\lambda \geq 0$ e para $\|u\| = \rho$

$$I_\lambda(u) = I(u) - \lambda\|u\|^2 \geq r - \lambda\rho^2.$$

Então, tomando $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon\rho^2 < r$, temos

$$I_\lambda(u) \geq r - \lambda\rho^2 > \varepsilon\rho^2 - \lambda\rho^2 = (\varepsilon - \lambda)\rho^2 \geq 0$$

donde segue que cada I_λ tem Geometria do Passo da Montanha no nível c_λ . Portanto as hipóteses do Teorema 1.3 são satisfeitas.

No próximo exemplo vamos mostrar que existe uma família de funcionais $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$, onde $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, para a qual não existe uma seqüência de Palais-Smale limitada para algum $\lambda \in J$.

Exemplo 1.7 Seja $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = x^2 - (x - 1)^3 y^2$$

Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que, cada F_λ , onde $\lambda \in [0, \varepsilon]$, definido por

$$F_\lambda(x, y) = F(x, y) - \lambda(x^2 + y^2)$$

satisfaz as hipóteses do Teorema 1.3. Além disso, toda seqüência de Palais-Smale para o funcional $F \equiv F_0$ é ilimitada.

Aqui estamos considerando o espaço $\mathbb{R}^2$ munido com a norma Euclidiana

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Note que, próximo da origem, F se comporta como $\|(x, y)\|^2$. Além disso, tomando $x > 0$ fixado e suficientemente grande, vemos que $F(x, 1) < 0$. Em particular, F tem geometria do passo da montanha e como foi feito no exemplo anterior, existe $\varepsilon > 0$ tal que cada $(F_\lambda)_{\lambda \in [0, \varepsilon]}$ definido por

$$F_\lambda(x, y) = F(x, y) - \lambda(x^2 + y^2)$$

satisfaz as hipóteses do Teorema 1.3. Analogamente ao exemplo anterior, também podemos assumir $\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Mostremos que não existe uma seqüência limitada de Palais-Smale para $F = F_0$ no nível do passo da montanha. Temos

$$F_x = 2x - 3(x - 1)^2 y^2$$

e

$$F_y = -2(x - 1)^2 y.$$

Então qualquer seqüência $\{(x_n, y_n)\} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\|F'(x_n, y_n)\| \rightarrow 0$ tem que satisfazer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [2x_n - 3(x_n - 1)^2 y_n^2] = 0 \quad (1.13)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 1)^3 y_n = 0. \quad (1.14)$$

Distinguímos dois casos:

- $x_n \not\rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$.

Se isto acontece, por (1.14) obtemos $y_n \rightarrow 0$. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 1)^2 y_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} [(x_n - 1)^3 y_n]^{\frac{2}{3}} y_n^{\frac{4}{3}} = 0$$

segue de (1.13) que $x_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

- $x_n \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$.

Neste caso, por (1.13),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 1)^2 y_n^2 = 2/3$$

e desde que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 1)^2 = 0,$$

$\{y_n^2\}$ não pode ser limitada, ou seja, $|y_n| \rightarrow \infty$.

No primeiro caso, temos

$$F(x_n, y_n) = x_n^2 - (x_n - 1)^3 y_n^2 \rightarrow 0$$

e no segundo

$$F(x_n, y_n) = x_n^2 - (x_n - 1)(x_n - 1)^2 y_n^2 \rightarrow 1.$$

Daí, seja $\{(x_n, y_n)\} \subset \mathbb{R}^2$ uma seqüência de Palais-Smale num nível $c > 0$ para F . Como $F(x_n, y_n) \rightarrow 1$, o nível do passo da montanha só pode ser $c = 1$ e, necessariamente, $x_n \rightarrow 1$ e $|y_n| \rightarrow \infty$, ou seja,

$$\|(x_n, y_n)\| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \rightarrow \infty$$

e $\{(x_n, y_n)\}$ é ilimitada.

Capítulo 2

Um problema do tipo Landesman-Lazer em $\mathbb{R}^N$

2.1 Introdução

Neste capítulo, usamos o Teorema Abstrato do Capítulo 1 para estudar a existência de soluções positivas para o seguinte problema do tipo Landesman-Lazer

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + Ku(x) = f(x, u(x)) \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad K > 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Como estamos interessados em soluções positivas, assumiremos, sem restrição, que $f(x, s) = 0$, para todo $s < 0$ q.t.p. em $x \in \mathbb{R}^N$.

Exigimos que a não-linearidade f satisfaça as seguintes hipóteses:

- $f_1)$ (i) $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Caratheodory.
(ii) $f(\cdot, s) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $f(\cdot, s)$ é 1-periódica em x_i , $1 \leq i \leq N$.

- $f_2)$ Existe $p \in (2, \frac{2N}{N-2})$ se $N \geq 3$ e $p > 2$ se $N = 2$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(x, s)}{s^{p-1}} = 0 \quad \text{uniformemente em } x \in \mathbb{R}^N.$$

- $f_3)$ $f(x, s)s^{-1} \rightarrow 0$ se $s \rightarrow 0$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$.

- $f_4)$ Existe $a \in (0, \infty]$ tal que $f(x, s)s^{-1} \rightarrow a$ se $s \rightarrow \infty$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$.

Seja $G : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$G(x, s) = \frac{1}{2}f(x, s)s - F(x, s) \quad \text{com} \quad F(x, s) = \int_0^s f(x, t)dt.$$

Consideraremos também as seguintes condições sobre G :

- $A_1)$ $G(x, s) \geq 0$, para todo $s \geq 0$, q.t.p. em $x \in \mathbb{R}^N$ e existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x, s)s^{-1} \geq K - \delta \implies G(x, s) \geq \delta.$$

$A_2)$ Existe $D \in [1, \infty)$ tal que, q. t. p em $x \in \mathbb{R}^N$,

$$G(x, s) \leq DG(x, t), \text{ para todo } (t, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \text{ com } s \leq t.$$

Uma solução clássica do problema (2.1) é uma função $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ que satisfaz a equação para todo ponto $x \in \mathbb{R}^N$. Já uma solução fraca para (2.1) é uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ que satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + Kuv) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u) v dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

O funcional energia $I : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ associado a equação (2.1) é dado por

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + Ku^2] dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx, \text{ onde } F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt,$$

Além disso, o funcional I é de classe C^1 no Espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$ (veja Lema A.9 do Apêndice A) e seus pontos críticos correspondem exatamente as soluções fracas de (2.1). Consideramos o nosso espaço ambiente $H^1(\mathbb{R}^N)$ munido com a norma

$$\|u\| = \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + Ku^2) dx \right\}^{1/2}.$$

Desde que K é positivo, esta norma é equivalente a norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 2.1

- (i) Assume que (f_1) - (f_4) e (A_1) ocorrem com $a < \infty$ em (f_4) . Então se $K \in (0, a)$ existe uma solução não-negativa não-trivial de (2.1).
- (ii) Assume que (f_1) - (f_4) e (A_2) ocorrem com $a = \infty$ em (f_4) . Então existe uma solução não-negativa não-trivial de (2.1).

Observação 2.2 Se $f(x, s)s^{-1}$ é uma função crescente de $s > 0$, q.t.p. em $x \in \mathbb{R}^N$, então tanto (A_1) quanto (A_2) são satisfeitas. Verifiquemos primeiro que (A_2) é satisfeita. De fato, se $s \leq t$ temos

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \int_0^t f(x, w) dw = \int_0^s f(x, w) dw + \int_s^t f(x, w) dw \\ &= F(x, s) + \int_s^t w \frac{f(x, w)}{w} dw < F(x, s) + \frac{f(x, t)}{t} \left[\frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2} \right] \\ &= F(x, s) + \frac{f(x, t)t}{2} - \frac{f(x, t)}{t} \frac{s^2}{2} \\ &< F(x, s) + \frac{f(x, t)t}{2} - \frac{1}{2} f(x, s)s \end{aligned}$$

o que implica

$$G(x, s) < G(x, t)$$

e (A_2) é satisfeita com $D = 1$. Segue por (A_2) que $G(x, s) \geq 0$ para todo $s \geq 0$ e a primeira afirmação de (A_1) é satisfeita. Para mostrar a segunda afirmação de (A_1) suponha, por contradição, que (A_1) não seja válida. Então para cada $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, existe $s_n > 0$ tal que

$$\frac{f(x, s_n)}{s_n} \geq K - \frac{1}{n} \quad (2.2)$$

mas,

$$G(x, s_n) < \frac{1}{n},$$

ou seja, $G(x, s_n) \rightarrow 0$. Além disso, $G(x, s) > 0$ para todo $s > 0$. De fato, suponha que exista $s > 0$ tal que $G(x, s) = 0$. Então, pela definição de G , $f(x, s)s = 2F(x, s)$, o que implica que

$$\frac{s}{2} \frac{d}{ds} F(x, s) = F(x, s)$$

isto é, $F(x, s) = s^2$. Logo, $f(x, s) = 2s$ o que contradiz (f_3) .

Daí, necessariamente temos $s_n \rightarrow 0$, pois caso contrário, para n suficientemente grande $s_n \geq \alpha > 0$ para alguma constante positiva α , e como $G(x, s)$ é crescente, obtemos

$$G(x, s_n) > G(x, \alpha) > 0$$

o que contradiz o fato de $G(x, s_n) \rightarrow 0$. Logo, por (2.2) e (f_3) temos

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, s_n)}{s_n} \geq K \Rightarrow K \leq 0.$$

Esta contradição mostra que (A_1) é satisfeita, e como utilizamos o fato de que (A_2) é satisfeita, temos que (A_2) implica em (A_1) . Logo a hipótese sobre G é mais fraca quando a não-linearidade é assintoticamente linear.

Finalmente, observe que (f_2) sempre é válida quando $a < \infty$ em (f_4) , pois se $f(x, s)s^{-1} \rightarrow a$ quando $s \rightarrow \infty$ e $p \in (2, \frac{2N}{N-2})$ se $N \geq 3$ e $p > 2$ se $N = 2$, temos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(x, s)}{s^{p-1}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(x, s)}{s} \frac{1}{s^{p-2}} = 0.$$

Observação 2.3 A condição clássica de Ambrosetti-Rabinowitz (AR) é uma hipótese mais forte do que (f_1) – (f_4) , pois, quando $a < \infty$ em (f_4) não é possível que (AR) seja satisfeita e quando $a = \infty$ existem funções que satisfazem (f_1) – (f_4) mas não cumprem a hipótese de Ambrosetti-Rabinowitz.

De fato, pela condição (AR) obtemos para $s \geq \delta > 0$

$$0 < \frac{\mu}{s} \leq \frac{f(x, s)}{F(x, s)}, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

o que implica

$$\int_{\delta}^s \frac{\mu}{t} dt \leq \int_{\delta}^s \frac{f(x, t)}{F(x, t)} dt.$$

Daí, segue que

$$\mu \log t \Big|_{\delta}^s \leq \log F(x, t) \Big|_{\delta}^s,$$

ou seja,

$$\mu(\log s - \log \delta) \leq \log F(x, s) - \log F(x, \delta).$$

Assim, obtemos para $s \geq \delta$ e $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\log \left(\frac{s}{\delta} \right)^\mu \leq \log \frac{F(x, s)}{F(x, \delta)}.$$

Concluimos

$$e^{\log(s/\delta)^\mu} \leq e^{\log(F(x,s)/F(x,\delta))}, \quad s \geq \delta, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

o que implica que

$$F(x, s) \geq \frac{F(x, \delta)}{\delta^\mu} s^\mu.$$

Mas, como $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, existe uma constante C tal que

$$\frac{F(x, \delta)}{\delta^\mu} s^\mu \geq \frac{C\delta}{\delta^\mu} s^\mu, \quad s \geq \delta, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Assim,

$$F(x, s) \geq C_1 s^\mu, \quad s \geq \delta, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

com $C_1 = (C\delta)/\delta^\mu$. Logo,

$$f(x, s) \geq \frac{\mu}{s} F(x, s) \geq C_2 s^{\mu-1}, \quad s \geq \delta, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

com $C_2 = \mu C_1$. Assim, quando $a < \infty$, não é possível que a condição de Ambrosetti-Rabinowitz seja satisfeita, pois para s suficientemente grande teríamos, utilizando (f_4) e a desigualdade acima, a seguinte expressão

$$C_2 s^{\mu-1} \leq f(x, s) \leq as,$$

ou seja, $s^{\mu-1} \leq as/C_2$, o que não pode ocorrer para valores grandes de s .

Quando $a = \infty$ pode ocorrer que a condição de Ambrosetti-Rabinowitz seja satisfeita, mas nossas hipóteses em f não implicam nisso. Por exemplo, considere a não-linearidade $f(x, s) = f(s) = s \log(s+1)$, $s \geq 0$. Notemos que esta função satisfaz (f_1) - (f_4) e (A_2) . De fato, como f é contínua (e portanto Caratheodory), (f_1) é satisfeita. Além disso, para $p = 3$ temos

$$\frac{f(s)}{s^3} = \frac{\log(s+1)}{s^2},$$

o que implica que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{(\log(s+1))'}{(s^2)'} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{2s(s+1)} = 0.$$

Logo, pela regra de L'Hôspital

$$\frac{f(s)}{s^3} = \frac{\log(s+1)}{s^2} \rightarrow 0 \quad \text{quando } s \rightarrow +\infty,$$

e portanto, (f_2) também é válida. As condições (f_3) e (f_4) também são satisfeitas, pois

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \log(s+1) = 0$$

e

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \log(s+1) = \infty.$$

Finalmente, como a função $f(s) = s \log(s+1)$ é crescente, (A_2) também vale.

Porém a condição de Ambrosetti-Rabinowitz não é verdade para essa não-linearidade. De fato, como

$$F(s) = \int_0^s t \log(t+1) dt = \frac{(s+1)^2}{2} \log(s+1) - (s+1) \log(s+1) + \frac{s}{2} - \frac{s^2}{4}$$

obtemos, desde que seja válida a condição de Ambrosetti-Rabinowitz, que existe $\mu > 2$ tal que para todo $s \geq 0$ temos

$$\mu \left(\frac{(s+1)^2}{2} \log(s+1) - (s+1) \log(s+1) + \frac{s}{2} - \frac{s^2}{4} \right) \leq s^2 \log(s+1),$$

isto é,

$$\left[\frac{\mu(s+1)^2}{2} - \mu(s+1) - s^2 \right] \log(s+1) \leq \mu \left(\frac{s}{2} - \frac{s^2}{4} \right)$$

o que implica

$$\log(s+1) \leq \frac{\mu s - s^2}{2(2s - \mu(s+1) + 1)}.$$

Desde que $2s + 1 - \mu(s+1) \leq 2s + 1 - 2s - 2 = -1 < 0$ escolhemos s de tal que $\mu s - s^2 > 0$ e obtemos para tais valores de s que $\log(s+1) < 0$, que é um absurdo. Portanto a condição de Ambrosetti-Rabinowitz não é verdade para essa não-linearidade, apesar de satisfazer (f_1) - (f_4) e (A_2) .

2.2 Geometria do Passo da Montanha

Como mencionado na Introdução, para demonstrar o Teorema 2.1, basta encontrarmos um ponto crítico não-trivial para o funcional $I : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx.$$

De fato, o funcional I acima está bem definido pois, se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx \leq \frac{C_2 \varepsilon}{2} \|u\|^2 + C_p \|u\|^p < \infty,$$

o que será provado no Lema 2.4 logo em seguida. Além disso, o funcional I possui uma Geometria do Passo da Montanha. Desde que $I(0) = 0$, os dois lemas seguintes são fundamentais para mostrarmos esse fato.

Lema 2.4 *Assuma que (f_1) - (f_3) acontecem. Então*

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + o(\|u\|^2) \quad \text{quando } u \rightarrow 0.$$

Prova. Inicialmente provemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon \geq 0$ tal que, para todo $s > 0$,

$$f(x, s) \leq \varepsilon s + C_\varepsilon s^{p-1} \quad \text{q.t.p. em } x \in \mathbb{R}^N. \quad (2.3)$$

De fato, pela hipótese (f_3) , temos

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x, s)}{s} = 0 \quad \text{uniformemente em } x \in \mathbb{R}^N,$$

isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (que não depende da variável x) tal que

$$0 \leq s < \delta \Rightarrow f(x, s) < \varepsilon s. \quad (2.4)$$

Já a hipótese (f_2) nos estabelece o seguinte:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(x, s)}{s^{p-1}} = 0 \quad \text{uniformemente em } x \in \mathbb{R}^N,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $R > \delta$ (que também não depende da variável x) tal que

$$s > R \Rightarrow f(x, s) \leq \varepsilon s^{p-1}. \quad (2.5)$$

Agora vamos utilizar (f_1) . Como $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é Caratheodory a função $f(x, \cdot)$ é contínua em $[\delta, R]$ e assim a função $f(x, s)/s^{p-1}$ é contínua para todo $s \in [\delta, R]$. Logo, existe $s_0 \in [\delta, R]$ tal que

$$f(x, s) \leq s^{p-1} \frac{f(x, s_0)}{s_0}.$$

Como $f(\cdot, s) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, existe $\tilde{K} < \infty$ tal que

$$f(x, s) \leq s^{p-1} \frac{f(x, s_0)}{s_0} \leq s^{p-1} \frac{\tilde{K}}{s_0} \quad \text{para todo } s \in [\delta, R].$$

Em outras palavras, temos provado que existe uma constante K tal que

$$f(x, s) < K s^{p-1} \quad \text{para todo } s \in [\delta, R]. \quad (2.6)$$

Neste ponto, tome $C_\varepsilon = \max\{K, \varepsilon\}$ e com o auxílio de (2.5) e (2.6) obtemos

$$f(x, s) \leq \varepsilon s^{p-1} + s^{p-1} K \leq C_\varepsilon s^{p-1} \quad \text{se } s \geq \delta$$

Finalmente utilizando (2.4) com a expressão acima concluímos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que, para todo $s \geq 0$,

$$f(x, s) \leq \varepsilon s + C_\varepsilon s^{p-1} \quad \text{q.t.p. em } x \in \mathbb{R}^N.$$

Daí, integrando de 0 até u ambos os membros da desigualdade (2.3) obtém-se

$$F(x, u) = \int_0^u f(x, t) dt \leq \int_0^u \varepsilon t dt + \int_0^u C_\varepsilon t^{p-1} dt = \frac{\varepsilon}{2} u^2 + \frac{C_\varepsilon}{p} u^p \quad (2.7)$$

o que implica

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 + C \int_{\mathbb{R}^N} u^p = \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_2^2 + C \|u\|_p^p.$$

Como a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ é contínua para $2 \leq p \leq 2^*$ se $N \geq 3$ e $2 \leq p < \infty$ se $N = 1, 2$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx \leq \frac{C_2 \varepsilon}{2} \|u\|^2 + C_p \|u\|^p$$

ou seja,

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx}{\|u\|^2} \leq \frac{C_2 \varepsilon}{2} + C_p \|u\|^{p-2} \rightarrow 0 \quad \text{quando } u \rightarrow 0.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx = o(\|u\|^2) \quad \text{quando } u \rightarrow 0$$

e portanto

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 + o(\|u\|^2) \quad \text{quando } u \rightarrow 0.$$

■

Observação 2.5 De maneira análoga ao que foi feito na demonstração do lema acima, assumindo as mesmas hipóteses (f_1) - (f_3) , podemos provar que

$$I'(u)u = \|u\|^2 + o(\|u\|^2) \quad \text{quando } u \rightarrow 0.$$

Lema 2.6 Assuma que (f_1) , (f_2) , (f_4) ocorrem e suponha que $K \in (0, a)$. Então existe $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $v \neq 0$ satisfazendo $I(v) \leq 0$.

Prova. Consideremos o caso em que $a < \infty$ em (f_4) . Sejam

$$d^2(N) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2|x|^2} dx \quad \text{e} \quad D(N) = 4[d(N)]^{-2} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 e^{-2|x|^2} dx.$$

Para $\alpha > 0$, defina

$$w_\alpha(x) = [d(N)]^{-1} \alpha^{\frac{N}{4}} e^{-\alpha|x|^2}.$$

Temos

$$\begin{aligned} d^2(N) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2|x|^2} dx = A(N) \int_0^\infty r^{N-1} e^{-2r^2} dr = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2} + 1)} \cdot \frac{1}{2^{\frac{N+2}{2}}} \cdot \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \\ &= \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\frac{N}{2} \cdot \Gamma(\frac{N}{2})} \cdot \frac{1}{2^{\frac{N+2}{2}}} \cdot \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{2^{-\frac{N}{2}} \pi^{\frac{N}{2}}}{N} \end{aligned}$$

e

$$D(N) = 4[d(N)]^{-2} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 e^{-2|x|^2} dx = 4 \cdot \frac{N}{2^{-\frac{N}{2}} \pi^{\frac{N}{2}}} \cdot \frac{N \pi^{\frac{N}{2}}}{2^{\frac{N+4}{2}}} = \frac{2^2 N^2}{2^2} = N^2$$

onde $A(N)$ é o volume da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$ e Γ é a função gama. Nas igualdades acima, utilizamos também os seguintes resultados

$$A(N) = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)} \quad (\text{veja [9, pag. 615]}),$$

$$\int_0^\infty r^{N-1} e^{-2\alpha r^2} dr = \frac{1}{\alpha^{N/2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{(N+2)/2} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right), \quad \alpha > 0$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 e^{-2|x|^2} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) e^{-2|x|^2} dx = \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} x_i^2 e^{-2|x|^2} dx \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\int_{-\infty}^\infty x_i^2 e^{-2x_i^2} dx_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_{-\infty}^\infty e^{-2x_j^2} dx_j \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{\pi^{N/2}}{2 \cdot 2^{3/2}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \right] = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\pi^{1/2}}{2^{5/2}} \cdot \frac{\pi^{(N-1)/2}}{2^{(N-1)/2}} \right] = N \frac{\pi^{N/2}}{2^{(N-1)/2}} \end{aligned}$$

onde $\int_{-\infty}^\infty x_i^2 e^{-\alpha x_i^2} dx_i = \frac{\pi^{1/2}}{2\alpha^{3/2}}$ e $\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x_j^2} dx_j = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2}$, $\alpha > 0$ (veja [9, pag. 187]).

Mostremos que $w_\alpha \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Temos,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} w_\alpha^2(x) dx &= \frac{\alpha^{N/2}}{d^2(N)} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\alpha|x|^2} dx \\ &= \alpha^{N/2} \cdot \frac{1}{A(N) \int_0^\infty r^{N-1} e^{-2r^2} dr} \cdot A(N) \int_0^\infty r^{N-1} e^{-2\alpha r^2} dr \\ &= \alpha^{N/2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{(N+2)/2} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\alpha^{N/2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{(N+2)/2} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) = 1 < \infty, \end{aligned}$$

e para todo $i = 1, \dots, N$,

$$\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left([d(N)]^{-1} \alpha^{N/4} e^{-\alpha(x_1^2 + \dots + x_N^2)} \right) = [d(N)]^{-1} \alpha^{N/4} (-2\alpha x_i) e^{-\alpha|x|^2}$$

donde

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_i}(x) \right)^2 dx &= 4[d(N)]^{-2} \alpha^{(N+4)/2} \int_{\mathbb{R}^N} x_i^2 e^{-2\alpha|x|^2} dx \\
&= 4[d(N)]^{-2} \alpha^{(N+4)/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_i^2 e^{-2\alpha x_i^2} dx_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha x_j^2} dx_j \right] \\
&= 4[d(N)]^{-2} \alpha^{(N+4)/2} \cdot \frac{\pi^{1/2}}{2 \cdot 2^{3/2} \alpha^{3/2}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left(\frac{1}{2} \right)^{1/2} \\
&= 4[d(N)]^{-2} \alpha^{(N+4)/2} \frac{\pi^{1/2}}{2^{5/2} \alpha^{3/2}} \cdot \frac{\pi^{(N-1)/2}}{(2\alpha)^{(N-1)/2}} \\
&= \alpha \cdot \frac{N}{2^{-N/2} \pi^{N/2}} \cdot \pi^{N/2} 2^{-N/2} = \alpha N < \infty
\end{aligned}$$

o que implica que $w_\alpha \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso,

$$\|\nabla w_\alpha\|_2^2 = \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_i}(x) \right)^2 dx = \sum_{i=1}^N \alpha N = N^2 \alpha = \alpha D(N).$$

Em particular, se fixarmos $\alpha \in \left(0, \frac{a-K}{D(N)}\right)$ obtemos

$$\|\nabla w_\alpha\|_2^2 = \alpha D(N) < a - K. \quad (2.8)$$

Por outro lado, por (f_4) , dado $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(x, s)}{s} - a \right| < \varepsilon \quad \text{sempre que } s > A.$$

Logo, se $s > A$ temos

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x, s)}{s^2} - \frac{a}{2} \right| &= \left| \frac{\int_0^s f(x, t) dt}{s^2} - \frac{a}{2} \right| = \left| \frac{\int_0^1 f(x, su) s du}{s^2} - \frac{a}{2} \right| \\
&= \left| \int_0^1 \frac{f(x, su)}{su} u du - \int_0^1 a u \right| = \left| \int_0^1 u \left(\frac{f(x, su)}{su} - a \right) du \right| \\
&\leq \int_0^1 u \left| \frac{f(x, su)}{su} - a \right| du \leq \varepsilon \int_0^1 u du = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{F(x, s)}{s^2} = \frac{a}{2} \quad \text{uniformemente em } x \in \mathbb{R}^N.$$

Desde que, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $tw_\alpha(x) \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$, segue que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(x, tw_\alpha)}{t^2} = \frac{w_\alpha^2 a}{2}, \quad \text{q.t.p. em } x \in \mathbb{R}^N. \quad (2.9)$$

Agora, observe que (f_1) , (f_3) e (f_4) implicam na existência de uma constante $C > 0$ tal que, para todo $s \geq 0$

$$0 \leq \frac{F(x, s)}{s^2} \leq C \quad \text{q.t.p. em } x \in \mathbb{R}^N.$$

De fato, por (f_3) , dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{f(x, s)}{s} < \varepsilon, \quad \text{sempre que } s < \delta.$$

Já (f_4) nos diz que para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\frac{f(x, s)}{s} < a + \varepsilon, \quad \text{sempre que } s > R$$

e finalmente (f_1) nos fornece que existem $s_0 \in [\delta, R]$ (devido a continuidade de $f(x, \cdot)$) e $\tilde{K} < \infty$ (pois $f(\cdot, s) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$) tais que

$$\frac{f(x, s)}{s} \leq \frac{f(x, s_0)}{s_0} \leq \frac{\tilde{K}}{s_0} = K.$$

Daí, para todo $s \geq 0$, obtemos

$$\frac{f(x, s)}{s} \leq a + \tilde{K}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{F(x, s)}{s^2} &= \frac{\int_0^s f(x, t) dt}{s^2} = \frac{\int_0^1 f(x, su) s du}{s^2} \\ &= \int_0^1 \frac{f(x, su)}{su} u du \leq (a + \tilde{K}) \int_0^1 u du := C \end{aligned}$$

para todo $s \geq 0$, isto é, existe uma constante positiva C tal que para todo $s \geq 0$

$$0 \leq \frac{F(x, s)}{s^2} \leq C \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Em outras palavras, para $t \geq 0$, temos

$$\frac{F(x, tw_\alpha)}{t^2} \leq C w_\alpha^2 \in L^1(\mathbb{R}^N). \quad (2.10)$$

Então usando (2.9) e (2.10), segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, tw_\alpha)}{t^2} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{w_\alpha^2 a}{2} dx = \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^N} w_\alpha^2 dx = \frac{a}{2}.$$

Por (2.8) obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(tw_\alpha)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2}\|\nabla(tw_\alpha)\|_2^2 + \frac{K}{2}\|tw_\alpha\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, tw_\alpha) dx}{t^2} = \\
&= \frac{1}{2}\|\nabla w_\alpha\|_2^2 + \frac{K}{2}\|w_\alpha\|_2^2 - \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, tw_\alpha)}{t^2} dx \\
&= \frac{1}{2}\|\nabla w_\alpha\|_2^2 + \frac{K}{2} - \frac{a}{2} < 0
\end{aligned}$$

Logo, existem $r > 0$ e $t > r$ tais que $I(tw_\alpha)/t^2 < 0$. Tomando $v = tw_\alpha$ conclui-se que $I(v) < 0$, com

$$\|v\| = |t|\|w_\alpha\| \geq |t|C_1\|w_\alpha\|_2 = tC_1 > R > 0,$$

ou seja, $v \neq 0$.

No caso em que $a = \infty$ em (f_4) a demonstração é análoga com pequenas alterações. ■

No próximo resultado, usamos os Lemas 2.4 e 2.5 para mostrarmos que cada funcional, pertencente a família de funcionais em $H^1(\mathbb{R}^N)$ definida por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx, \quad \lambda \in [1, 2],$$

possui uma geometria do Passo da Montanha. Em particular, o funcional I também tem esta geometria. Além disso, aplicamos o Teorema 1.3 para a família (I_λ) , com $\lambda \in [1, 2]$, e obtemos uma seqüência de Palais-Smale para quase todos os funcionais I_λ desta família.

Lema 2.7 *Assuma que (f_1) - (f_4) ocorrem. Então a família (I_λ) com $\lambda \in [1, 2]$ satisfaz as hipóteses do Teorema 1.3. Em particular, para quase todo $\lambda \in [1, 2]$, existe uma seqüência limitada $\{v_m\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$I_\lambda(v_m) \rightarrow c_\lambda \quad e \quad I'_\lambda(v_m) \rightarrow 0 \quad em \quad H^{-1}(\mathbb{R}^N).$$

Prova. Sejam

$$A(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \quad e \quad B(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx.$$

Note que $A(u) \rightarrow +\infty$ quando $\|u\| \rightarrow \infty$. Além disso, $B(u) \geq 0$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Para ver isto, basta mostrar que $F(x, s) \geq 0$, para todo $s \geq 0$. De fato, segue pela Regra de L'Hospital que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(x, s)}{s^2} = 0.$$

Além disso,

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{F(x, s)}{s^2} \right) = \frac{f(x, s)s^2 - 2F(x, s)s}{s^4} = \frac{2}{s^3}G(x, s) \geq 0 \quad \text{para todo } s \geq 0.$$

Logo, $F(x, s)$ é uma função não-decrescente, e portanto, $F(x, s) \geq 0$ para todo $s \geq 0$. Pelo Lema 2.4, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) du = o(\|u\|^2) \text{ quando } u \rightarrow 0$$

donde

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda o(\|u\|^2) \\ &= \|u\|^2 \left(\frac{1}{2} - \lambda o(1) \right) \geq \frac{1}{4}\|u\|^2 > 0 \text{ quando } u \rightarrow 0 \end{aligned}$$

o que implica que existe $r > 0$ tal que $I_\lambda(u) > 0$, com $\|u\| = r$, ou seja,

$$\inf_{\|u\|=r} I_\lambda(u) > 0 = I(0).$$

Para $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ obtido no Lema 2.6, temos

$$\frac{1}{2}\|v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, v) dx \leq 0$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\|v\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} F(x, v) dx \leq \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(x, v)$$

desde que $\lambda \geq 1$. Logo $I_\lambda(v) \leq 0$ para todo $\lambda \in [1, 2]$, com $v \neq 0$ tal que $\|v\| > r$. Então, fixando a seguinte classe de caminhos ligando 0 a v em $H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X); \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = v\}$$

temos, para todo $\lambda \in [1, 2]$ e $\gamma \in \Gamma$

$$\inf_{\|u\|=r} I_\lambda(u) \leq I_\lambda(u) \leq \max_{t \in [0, 1]} I_\lambda(\gamma(t))$$

o que implica

$$c_\lambda \geq \inf_{\|u\|=r} I_\lambda(u) > 0 = I(0) = \max\{I(0), I(v)\}.$$

Aplicando o Teorema 1.3 segue o resultado. ■

2.3 Uma seqüência de pontos críticos

Nesta seção, a partir da seqüência de Palais-Smale $\{v_n\}$ obtida no Lema 2.7, encontramos uma nova seqüência $\{u_n\}$, cujos termos são limites fracos de subsequências de $\{v_n\}$. Mostramos também que, cada termo da seqüência $\{u_n\}$ é um ponto crítico de algum funcional pertencente a família (I_λ) definida na seção anterior.

Daqui por diante usaremos a seguinte terminologia:

Definição 2.8 *Seja $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma seqüência limitada arbitrária. Se, a menos de subseqüência, existirem $\alpha > 0$, $R > 0$ e $\{y_n\} \subset \mathbb{Z}^N$ tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y_n)} u_n^2 dx \geq \alpha > 0,$$

dizemos que $\{u_n\}$ não se anula, ou que acontece o não-anulamento.

Quando for necessário, consideraremos a seqüência transladada de $\{u_n\}$, para obtermos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R} u_n^2 dx \geq \alpha > 0.$$

Caso não ocorra o não-anulamento, para todo $\alpha > 0$, $R > 0$ e $\{y_n\} \subset \mathbb{Z}^N$ temos

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y_n)} u_n^2 dx < \alpha$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y)} u_n^2 dx = 0.$$

Logo, para todo $R > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{Z}^N} \int_{B_R(y)} u_n^2 dx = 0.$$

Definição 2.9 *Seja $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma seqüência limitada arbitrária. Se para todo $R > 0$ e a menos de subseqüência tivermos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{Z}^N} \int_{B_R(y)} u_n^2 dx = 0,$$

dizemos que $\{u_n\}$ se anula, ou que acontece o anulamento.

Lema 2.10 *Assuma que (f_1) -(f_3) ocorrem. Seja $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma seqüência limitada arbitrária que se anula. Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u_n) dx = 0.$$

Prova. Com o auxílio do Lema A.23 do Apêndice A (Lema de Lions) sabemos que, se $\{u_n\}$ se anula então $u_n \rightarrow 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in (2, 2^*)$. Por (2.3) e (2.7), para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x, u_n) u_n \leq \varepsilon u_n^2 + C_\varepsilon u_n^p$$

o que implica que

$$F(x, u_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} u_n^2 + \frac{C_\varepsilon}{p} u_n^p.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) u_n dx \leq \varepsilon \|u_n\|_2^2 + C_\varepsilon \|u_n\|_p^p$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u_n\|_2^2 + \frac{C_\varepsilon}{p} \|u_n\|_p^p.$$

Usando a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$, o fato de $\varepsilon > 0$ ser arbitrário, a limitação de $\{u_n\}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e a convergência $u_n \rightarrow 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ com $p \in (2, 2^*)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) u_n dx \leq \varepsilon C_1 \|u_n\|^2 + C_\varepsilon \|u_n\|_p^p \leq \varepsilon \tilde{C}_1 + C_\varepsilon \|u_n\|_p^p \rightarrow 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} C_2 \|u_n\|^2 + \frac{C_\varepsilon}{p} \|u_n\|_p^p \leq \varepsilon \tilde{C}_2 + \frac{C_\varepsilon}{p} \|u_n\|_p^p \rightarrow 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u_n) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) dx \right] = 0$$

como queríamos. ■

Lema 2.11 *Assuma que (f_1) - (f_4) e (A_1) ou (A_2) ocorram e seja $\lambda \in [1, 2]$. Então para toda sequência limitada $\{v_m\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo*

$$(i) \quad 0 < \lim_{n \rightarrow \infty} I_\lambda(v_m) \leq c_\lambda$$

$$(ii) \quad I'_\lambda(v_m) \rightarrow 0 \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N),$$

existe $\{y_m\} \subset \mathbb{Z}^N$ tal que, a menos de subsequência, $u_m(x) = v_m(x - y_m)$ satisfaz $u_m \rightharpoonup u_\lambda \neq 0$ com $I_\lambda(u_\lambda) \leq c_\lambda$ e $I'_\lambda(u_\lambda) = 0$.

Prova. Desde que

$$I_\lambda(v_m) = \frac{1}{2} \|v_m\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(x, v_m) dx$$

e

$$I'_\lambda(v_m) v_m = \|v_m\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f(x, v_m) v_m dx,$$

temos

$$I_\lambda(v_m) - \frac{1}{2} I'_\lambda(v_m) v_m = \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} f(x, v_m) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(x, v_m) dx$$

o que implica que

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} G(x, v_m) dx = I_\lambda(v_m) - \frac{1}{2} I'_\lambda(v_m) v_m.$$

Agora, como $\{v_m\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada, temos

$$|I'_\lambda(v_m) v_m| \leq \|I'_\lambda(v_m)\| \|v_m\| \rightarrow 0$$

donde segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x, v_m) dx = \frac{1}{\lambda} I_\lambda(v_m) - \frac{1}{2\lambda} I'_\lambda(v_m) v_m \rightarrow \frac{1}{\lambda} \lim_{m \rightarrow \infty} I_\lambda(v_m) > 0, \quad \lambda \in [1, 2]$$

Então, pelo Lema 2.10, $\{v_m\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ não se anula, ou seja, existe $\{y_m\} \subset \mathbb{Z}^N$ tal que, a menos de subsequência, $u_m(x) = v_m(x - y_m)$ satisfaz: existem $\alpha > 0$ e $R > 0$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R} u_m^2 dx \geq \alpha > 0. \quad (2.11)$$

Além disso, pela condição (f_1) o problema (2.1) é invariante por translação, isto é, se $u(x)$ é solução de (2.1) então $u(x - y_m)$ também é solução. De fato, para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos

$$\begin{aligned} & K \int_{\mathbb{R}^N} u(x - y_m) \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x - y_m) \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u(x - y_m)) \varphi dx \\ &= K \int_{\mathbb{R}^N} u(z) \psi(z) dz + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(z) \cdot \nabla \psi(z) dz - \int_{\mathbb{R}^N} f(z, u(z)) \psi(z) dz = 0. \end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$(i) \quad 0 < \lim_{m \rightarrow \infty} I_\lambda(u_m) \leq c_\lambda;$$

$$(ii) \quad I'_\lambda(u_m) \rightarrow 0 \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Temos, a menos de subsequência, que $u_m \rightharpoonup u_\lambda$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pois $\{u_m\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Mostremos agora que $u_\lambda \neq 0$, $I'_\lambda(u_\lambda) = 0$ e $I_\lambda(u_\lambda) \leq c_\lambda$.

Afirmção 1 $u_\lambda \neq 0$.

Podemos considerar $u_\lambda \geq 0$, pois assumimos $f(x, s) = 0$ para todo $s < 0$. Desde que a imersão $H^1(B_R) \hookrightarrow L^2(B_R)$ é compacta, segue da limitação de $\{u_m\}$ e de $u_m \rightharpoonup u_\lambda$, que $u_m \rightarrow u_\lambda$ em $L^2(B_R)$ (a menos de subsequência). Daí, por (2.11) temos

$$\|u_\lambda\|_2^2 \geq \int_{B_R} u_\lambda^2 dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B_R} u_m^2 dx \geq \alpha > 0$$

o que mostra que $u_\lambda \neq 0$.

Afirmção 2 $I'_\lambda(u_\lambda) = 0$.

Desde que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^N)$ é suficiente verificarmos que $I'_\lambda(v)\varphi = 0$ para todo $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno em $H^1(\mathbb{R}^N)$ associado a nossa norma escolhida. Então

$$\begin{aligned} \langle u_m - u_\lambda, \varphi \rangle &= K \int_{\mathbb{R}^N} u_m \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_m \cdot \nabla \varphi) dx \\ &\quad - K \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_\lambda \cdot \nabla \varphi) dx \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} I'_\lambda(u_m)\varphi - I'_\lambda(u_\lambda)\varphi &= K \int_{\mathbb{R}^N} u_m \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_m \cdot \nabla \varphi) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_m) \varphi dx \\ &\quad - K \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_\lambda \cdot \nabla \varphi) dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_\lambda) \varphi dx \\ &= \langle u_m - u_\lambda, \varphi \rangle - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (f(x, u_m) - f(x, u_\lambda)) \varphi dx. \end{aligned}$$

Como $u_m \rightharpoonup u_\lambda$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ segue que $\langle u_m - u_\lambda, \varphi \rangle \rightarrow 0$, quando $m \rightarrow \infty$.

Por outro lado, pelo Teorema A.27 do Apêndice A, se $u_m \rightharpoonup u_\lambda$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ então $u_m \rightarrow u_\lambda$ em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ com $q \in [1, 2^*)$ se $N > 2$ e $q \in [1, +\infty)$ se $N = 2$. Na sequência, mostraremos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (f(x, u_m(x)) - f(x, u_\lambda(x))) dx = 0.$$

Com efeito, desde que $u_m(x) \rightarrow u_\lambda(x)$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ segue pelo fato de f ser Caratheodory que $f(x, u_m(x)) \rightarrow f(x, u_\lambda(x))$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Além disso, por (2.3),

$$f(x, u_m) \leq \varepsilon u_m + C_\varepsilon u_m^{p-1} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

onde $p \in (2, 2^*)$ se $N \geq 3$ e $p > 2$ se $N = 1, 2$, ou seja, $f(x, u_m) \leq h(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Daí, segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f(x, u_m(x)) - f(x, u_\lambda(x))) \varphi dx \rightarrow 0$$

Logo, quando $m \rightarrow \infty$ temos

$$I'_\lambda(u_m)\varphi - I'_\lambda(u_\lambda)\varphi = \langle u_m - u_\lambda, \varphi \rangle - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (f(x, u_m) - f(x, u_\lambda)) \varphi dx \rightarrow 0$$

e portanto $I'_\lambda(u_\lambda) = 0$.

Afirmção 3 $I_\lambda(u_\lambda) \leq c_\lambda$.

Por (A_1) ou (A_2) , $G(x, s) \geq 0$, para todo $s \geq 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Mostremos então que $G(x, u_m)$ satisfaz as hipóteses do Lema de Fatou. Primeiramente, temos que $G(x, u_m) \geq 0$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Além disso, por (2.3) e (2.7)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u_m) dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_m) u_m dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_m) dx \\ &\leq C_1 \varepsilon \|u_m\|^2 + C_2 \|u_m\|^p < \infty \end{aligned}$$

donde segue que $G(x, u_m) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e, como $\{u_m\}$ é limitada, obtemos também que

$$\sup_m \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u_m) dx < \infty.$$

Logo, usando o Lema de Fatou juntamente com a Afirmação 2, obtemos

$$\begin{aligned} c_\lambda &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} I_\lambda(u_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} [I_\lambda(u_m) - \frac{1}{2} I'_\lambda(u_m) u_m] = \lambda \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u_m) dx \\ &\geq \lambda \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u_\lambda) dx = I_\lambda(u_\lambda) - \frac{1}{2} I'_\lambda(u_\lambda) u_\lambda = I_\lambda(u_\lambda) \end{aligned}$$

o que prova a afirmação 3 e a demonstração do lema está concluída. $\blacksquare$

Agora, com o auxílio dos Lemas 2.7 e 2.11, estamos em condições de demonstrar a existência de uma seqüência cujos termos são pontos críticos de funcionais pertencentes a família (I_λ) , com $\lambda \in [1, 2]$. Isto é feito através do seguinte resultado:

Lema 2.12 *Suponha que (f_1) - (f_4) e (A_1) ou (A_2) ocorrem e seja $\lambda \in [1, 2]$. Então existe uma seqüência $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset [1, 2] \times H^1(\mathbb{R}^N)$, tal que*

- (i) $\lambda_n \rightarrow 1$ e $\{\lambda_n\}$ é decrescente;
- (ii) $u_n \neq 0$, $I_{\lambda_n}(u_n) \leq c_{\lambda_n}$ e $I'_{\lambda_n}(u_n) = 0$.

Prova. De fato, pelo Lema 2.7, existe uma seqüência $\{v_m\}$ limitada e uma seqüência decrescente $\{\lambda_m\}$ tal que $\lambda_m \rightarrow 1$, $I_{\lambda_m}(v_m) \rightarrow c_{\lambda_m}$ e $I'_{\lambda_m}(v_m) \rightarrow 0$.

Por outro lado, fixando cada $\lambda_m \in [1, 2]$ acima, pelo Lema 2.11, existe uma seqüência $\{y_m\} \subset \mathbb{Z}^N$ tal que, a menos de subsequência, $u_m(x) = v_m(x - y_m)$ satisfaz, $u_m \rightharpoonup u_\lambda \neq 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ com $I_{\lambda_m}(u_{\lambda_m}) \leq c_{\lambda_m}$ e $I'_{\lambda_m}(u_{\lambda_m}) = 0$.

Assim, obtemos uma seqüência $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset [1, 2] \times H^1(\mathbb{R}^N)$, onde $u_n = u_{\lambda_n} \neq 0$ e $u_n \geq 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, tal que

- (i) $\lambda_n \rightarrow 1$ e $\{\lambda_n\}$ é decrescente;
- (ii) $u_n \neq 0$, $I_{\lambda_n}(u_n) \leq c_{\lambda_n}$ e $I'_{\lambda_n}(u_n) = 0$.

$\blacksquare$

Finalizamos esta seção com alguns comentários úteis que envolvem a não-linearidade $f(x, s)$ e a seqüência $\{u_n\}$ obtida no Lema acima.

Sabendo que $\lambda_n \geq 1$, temos para todo $n \in \mathbb{N}$

$$I_{\lambda_n}(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx \leq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx = I(u),$$

o que implica que $c_{\lambda_n} \leq c_1$. Logo, se $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ for limitada temos

$$\frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) dx \leq c_{\lambda_n},$$

ou seja,

$$- \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) dx \leq C_1.$$

Além disso

$$\lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) u_n dx = \|u_n\|^2,$$

o que implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) u_n dx \leq C_2$$

e

$$\lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) v dx = \langle u_n, v \rangle \leq \|u_n\| \|v\|,$$

donde segue

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) v dx \leq C_3, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Em particular, temos a seguinte limitação:

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x, u_n) dx = \frac{1}{\lambda_n} I_{\lambda_n}(u_n) - \frac{1}{2\lambda_n} I'_{\lambda_n}(u_n) u_n \leq \frac{c_\lambda}{\lambda_n} \leq c_1 = c, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2.4 Existência de solução positiva não-trivial

Nesta seção, usamos os lemas da seção anterior, bem como as idéias de suas demonstrações, para estabelecer existência de solução para a equação (2.1) e com auxílio do princípio do máximo fraco mostramos que uma solução é estritamente positiva.

Lema 2.13 *Assuma que (f_1) – (f_4) e (A_1) ou (A_2) ocorrem. Se a seqüência $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ obtida no Lema 2.12, for limitada, existe $u \neq 0$ tal que $I'(u) = 0$. Em particular, u é uma solução não-negativa não-trivial de (2.1).*

Prova. Definamos $\{z_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ por $z_n = t_n u_n$ com $t_n \in [0, 1]$ satisfazendo

$$I_{\lambda_n}(z_n) = \max_{t \in [0, 1]} I_{\lambda_n}(t u_n). \quad (2.12)$$

Tal definição é possível, pois $I_{\lambda_n}(t u_n)$ é contínua para $t \in [0, 1]$ e portanto assume máximo em $[0, 1]$, ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n \in [0, 1]$ tal que

$$I_{\lambda_n}(z_n) = I_{\lambda_n}(t_n u_n) = \max_{t \in [0, 1]} I_{\lambda_n}(t u_n).$$

Se para algum $n \in \mathbb{N}$, t_n não for único, escolhemos o menor deles. Por construção, $\{z_n\}$ é limitada. Além disso, $I'_{\lambda_n}(z_n) z_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $I'_{\lambda_n}(z_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ por ser um ponto de máximo, e então temos

$$\lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} G(x, z_n) dx = I_{\lambda_n}(z_n) - \frac{1}{2} I'_{\lambda_n}(z_n) z_n = I_{\lambda_n}(z_n). \quad (2.13)$$

Por outro lado, pela observação 2.5 e desde que $I_{\lambda_n}(u_n) = 0$, temos que $\{u_n\}$ não pode convergir para 0 em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pois se $u_n \rightarrow 0$ teríamos

$$0 = \frac{I'_{\lambda_n}(u_n) u_n}{\|u_n\|^2} = 1 + \frac{o(\|u_n\|^2)}{\|u_n\|^2} \rightarrow 1$$

o que é um absurdo. Daí, existe $\alpha > 0$ tal que $\|u_n\| \geq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por (2.12) temos $I_{\lambda_n}(z_n) = \max_{t \in [0,1]} I_{\lambda_n}(tu_n) \geq I_{\lambda_n}(tu_n)$, para todo $t \in [0, 1]$ e pela observação 2.5 quando $t \rightarrow 0$ temos

$$\frac{I_{\lambda_n}(tu_n)}{t^2\|u_n\|^2} = \frac{1}{2} + \frac{o(\|tu_n\|)}{t^2\|u_n\|^2}$$

o que implica que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_{\lambda_n}(tu_n)}{t^2\|u_n\|^2} = \frac{1}{2}.$$

Logo, existe $t_0 > 0$ tal que, para todo t satisfazendo $0 < t < t_0$, temos

$$I_{\lambda_n}(tu_n) \geq \frac{1}{4}t^2\|u_n\|^2$$

donde segue, usando o fato que $\|u_n\| \geq \alpha > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{\lambda_n}(z_n) \geq I_{\lambda_n}(tu_n) \geq \frac{1}{4}t^2\|u_n\|^2 \geq \frac{1}{4}t^2\alpha > 0,$$

ou seja,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} I_{\lambda_n}(z_n) > 0.$$

Logo, por (2.13), segue que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} G(x, z_n) dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} I_{\lambda}(z_n) > 0$$

e, a menos de subsequência,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} G(x, z_n) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} G(x, z_n) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{\lambda}(z_n) > 0.$$

Pelo Lema 2.10 $\{z_n\}$ não se anula, e como $u_n \geq t_n u_n = z_n$, é fácil ver que $\{u_n\}$ também não se anula. Neste ponto, repetindo o que foi feito nas afirmações 1 e 2 do Lema 2.11 para o funcional I e para a seqüência $\{u_n\}$, concluímos a existência de solução $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ para (2.1).

Finalmente aplicando o princípio do máximo, $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Com efeito, suponha que exista $y_0 \in B_R(z)$, onde $R > 0$ é arbitrário e $z \in \mathbb{R}^N$, tal que $u(y_0) = 0$. Como $u \geq 0$ em $B_R(z)$, segue que y_0 é um ponto de mínimo para u em $B_R(z)$. Logo, pelo princípio do máximo concluímos que u é constante em $B_R(z)$. Como $u(y_0) = 0$, então $u(y) = 0$ para todo $y \in B_R(z)$. Desde que $R > 0$ é arbitrário, $u(y) = 0$, para todo $y \in \mathbb{R}^N$, que é um absurdo, pois u é não trivial. ■

Em vista do Lema 2.13, para completarmos a prova do Teorema 2.1, precisamos verificar que $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada. Isto será feito nos próximos lemas. Suponha, por contradição, que $\|u_n\| \rightarrow \infty$. Defina a seqüência $\{w_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ por

$$w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Claramente $\|w_n\| = 1$ e passando, se necessário, a uma subsequência temos $w_n \rightharpoonup w$. Como para todo $R > 0$ e $y \in \mathbb{Z}^N$ a imersão $H^1(B_R(y)) \hookrightarrow L^2(B_R(y))$ é compacta, temos, a menos de subsequência, que $w_n \rightarrow w$ em $L^2(B_R(y))$. Consideremos então dois casos: ou $w = 0$ para todo $R > 0$ e $y \in \mathbb{Z}^N$ ou então existem $R > 0$ e $y \in \mathbb{Z}^N$ tais que $w \neq 0$. No primeiro caso, para todo $R > 0$ e $y \in \mathbb{Z}^N$, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y)} w_n^2 dx = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{Z}^N} \int_{B_R(y)} w_n^2 dx = 0 \quad \text{para todo } y \in \mathbb{Z}^N$$

isto é, o anulamento acontece. Já no segundo caso, existem $R < \infty$ e $y \in \mathbb{Z}^N$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y)} w_n^2 dx \neq 0.$$

Mas, a expressão acima implica que o anulamento não ocorre, donde segue que $\{w_n\}$ não se anula. Portanto ou $\{w_n\}$ se anula ou não se anula.

Provaremos usando (A_1) quando $a < \infty$ ou (A_2) quando $a = \infty$ em (f_4) que nenhuma das duas alternativas anteriores podem acontecer, logo $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ deve ser limitada.

Assuma primeiro que $\{w_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ não se anula. Então, exatamente como foi feito na demonstração do Lema 2.11, usando se necessário a invariância por translação de (2.1), obtemos que $w_n \rightharpoonup w \neq 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Também podemos assumir sem perda de generalidade que $w_n \rightarrow w$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, pois $w_n \rightarrow w$ em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $q \in [1, 2^*]$. Neste ponto, a demonstração será separada nos casos $a < \infty$ e $a = \infty$ em (f_4) .

Lema 2.14 *Assuma que (f_1) – (f_4) ocorrem com $a < \infty$ em (f_4) e que $K \in (0, a)$. Então, o não-anulamento de $\{w_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é impossível.*

Prova. Provaremos que $0 \neq w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaz o problema de autovalor

$$-\Delta u(x) + Ku(x) = au(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (2.14)$$

Isto nos fornecerá a contradição desejada, desde que sabemos que o operador $-\Delta$ não possui autovalores em $H^1(\mathbb{R}^N)$ (veja Corolário A.22 do Apêndice A). Para provarmos que (2.14) acontece, é suficiente verificarmos que, para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla w \nabla \varphi + Kw\varphi] dx = \int_{\mathbb{R}^N} [aw\varphi] dx. \quad (2.15)$$

Lembrando que

$$I'_{\lambda_n}(u_n)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla \varphi + Ku_n\varphi] dx - \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n)\varphi dx = 0$$

ou seja, cada u_n é solução fraca do problema $-\Delta u + Ku = \lambda_n f(x, u)$, obtemos para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla w_n \nabla \varphi + K w_n \varphi] dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n \frac{f(x, u_n)}{u_n} w_n \varphi dx \quad (2.16)$$

isto é, cada w_n , é solução fraca do problema

$$-\Delta w + Kw = \lambda_n \frac{f(x, u)}{u} w.$$

Desde que $w_n \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ que $\langle w_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle w, \varphi \rangle$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla w_n \nabla \varphi + K w_n \varphi] dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla w \nabla \varphi + K w \varphi] dx. \quad (2.17)$$

Afirmamos que

$$\lambda_n \frac{f(x, u_n)}{u_n} w_n \rightarrow aw \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \quad (2.18)$$

Para provarmos (2.18), é conveniente distinguirmos os casos $w(x) = 0$ e $w(x) \neq 0$ (sem perda de generalidade podemos assumir que $w \neq 0$ é definido em todo $\mathbb{R}^N$). Seja $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $w(x) = 0$. Usando (f_1) , (f_3) e (f_4) vemos que existe $C > 0$ tal que

$$0 \leq \frac{f(x, s)}{s} \leq C \quad \text{para todo } s \geq 0 \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \quad (2.19)$$

Então, desde que $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ é limitada e $w_n(x) \rightarrow w(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, para cada $x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$0 \leq \lambda_n \frac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)} w_n(x) \leq \lambda_n C w_n(x) \rightarrow 0 = aw(x).$$

Daí, seja $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $w(x) \neq 0$. Então, necessariamente, temos $u_n(x) \rightarrow \infty$ pois $u_n(x) = w_n(x) \|u_n\| \rightarrow \infty$, $\|u_n\| \rightarrow \infty$ e $w_n(x)$ é limitada. Então usando (f_4) , e sabendo que $\lambda_n \rightarrow 1$ obtemos

$$\lambda_n \frac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)} \rightarrow a \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Conseqüentemente,

$$\lambda_n \frac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)} w_n(x) \rightarrow aw(x) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \quad (2.20)$$

e (2.18) está estabelecida. Agora, sejam $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ fixa, porém arbitrária, e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto compacto tal que $\text{supp } \varphi \subset \Omega$. Pela compacidade da imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, temos $w_n \rightarrow w$ em $L^1(\Omega)$. Assim, existe $h \in L^1(\Omega)$ tal que $w_n(x) \leq h(x)$ q.t.p. em Ω e usando novamente (2.19) temos

$$0 \leq \lambda_n \frac{f(x, u_n)}{u_n} w_n \leq C w_n \leq Ch \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \quad (2.21)$$

Por (2.18) e (2.21), aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\lambda_n \frac{(x, u_n)}{u_n} w_n \varphi \right] dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} [aw\varphi] dx. \quad (2.22)$$

Combinando (2.17) e (2.22) concluímos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla w_n \nabla \varphi + K w_n \varphi] dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left[\lambda_n \frac{f(x, u_n)}{u_n} w_n \varphi \right] dx \\ &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla w \nabla \varphi + K w \varphi] dx - \int_{\mathbb{R}^N} [aw\varphi] dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla w \nabla \varphi + K w \varphi] dx - \int_{\mathbb{R}^N} [aw\varphi] dx = 0 \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

e assim obtemos (2.15). Portanto w é solução fraca de (2.14) e o lema está provado. ■

Lema 2.15 *Assuma que (f_1) – (f_4) ocorrem com $a = \infty$ em (f_4) . Então o não-anulamento de $\{w_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é impossível.*

Prova. Como cada u_n é solução fraca de

$$-\Delta u + Ku = \lambda_n f(x, u),$$

deduzimos, de forma semelhante ao que foi feito no lema anterior, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_n \nabla v dx + K \int_{\mathbb{R}^N} w_n v dx - \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} v = 0 \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \quad (2.23)$$

ou seja, w_n é solução fraca do problema

$$-\Delta w + Kw = \lambda_n \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|}.$$

Então, como $w_n \rightharpoonup w$ temos para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\langle w_n, v \rangle \rightarrow \langle w, v \rangle$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla w_n \nabla v dx + K w_n v] dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla w \nabla v dx + K w v] dx$$

ou ainda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} v dx = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla w \nabla v + K w v] dx$$

e, em particular, fixando $v = w$ obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} w dx = \|w\|^2 < \infty. \quad (2.24)$$

Mas, considerando o conjunto $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N; w(x) \neq 0\}$, temos

$$\frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} w = \frac{f(x, u_n)}{u_n} \frac{u_n}{\|u_n\|} w = \frac{f(x, u_n)}{u_n} w_n w \rightarrow +\infty \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

Então, sabendo que $|\Omega| > 0$, $(f(x, u_n)w)/\|u_n\| \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $(f(x, u_n)w)/\|u_n\| \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e q.t.p. em Ω e

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} w dx < \infty,$$

deduzimos pelo Lema de Fatou que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} w dx = +\infty.$$

Isto contradiz (2.24). ■

Lema 2.16 *Assuma que (f_1) – (f_4) ocorrem com $a < \infty$ em (f_4) . Então se (A_1) ocorre, o anulamento de $\{w_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é impossível.*

Prova. Temos que cada u_n é solução fraca do problema

$$-\Delta u + Ku = \lambda_n f(x, u).$$

Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w_n|^2 + Kw_n^2] dx = \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u_n)}{u_n} w_n^2 dx \quad (2.25)$$

e deduzimos, pela normalização de $\{w_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u_n)}{u_n} w_n^2 dx = 1. \quad (2.26)$$

Definamos, para $\delta > 0$ dado em (A_1) ,

$$\Omega_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^N; \frac{f(x, u_n)}{u_n} \leq K - \frac{\delta}{2} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então, desde que, $1 = \|w_n\|^2 = \|\nabla w_n\|_2^2 + K\|w_n\|_2^2$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} \frac{f(x, u_n)}{u_n} w_n^2 dx &\leq \left(K - \frac{\delta}{2} \right) \int_{\Omega_n} w_n^2 dx = \left(K - \frac{\delta}{2} \right) \left(\frac{1}{K} - \frac{\|\nabla w_n\|_2^2}{K} \right) \\ &\leq \frac{1}{K} \left(K - \frac{\delta}{2} \right). \end{aligned}$$

Conseqüentemente, usando (2.26) devemos ter

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} \frac{f(x, u_n)}{u_n} w_n^2 dx > 0. \quad (2.27)$$

De fato, caso contrário, se

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} \frac{f(x, u_n)}{u_n} w_n^2 dx = 0,$$

então, a menos de subsequência, temos

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u_n)}{u_n} w_n^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_n} \frac{f(x, u_n)}{u_n} w_n^2 dx \leq \frac{1}{K} \left(K - \frac{\delta}{2} \right)$$

o que é uma contradição. Afirmamos agora que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n| = \infty. \quad (2.28)$$

Suponha, por contradição, que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n| < \infty. \quad (2.29)$$

Note, por (2.19), que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} \frac{f(x, u_n)}{u_n} w_n^2 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} w_n^2 dx.$$

Mas, como $\{w_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ se anula e é limitada, pelo Lema A.23, temos que $w_n \rightarrow 0$ em $L^r(\mathbb{R}^N)$ para todo $r \in (2, 2^*)$. Levando em conta (2.29) e usando a desigualdade de Hölder com $p \in (1, 2^* - 1)$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} w_n^2 dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} w_n^{2p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq K \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} w_n^{2p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

o que implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} w_n^2 dx = 0.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} \frac{f(x, u_n)}{u_n} w_n^2 dx = 0$$

o que contradiz (2.27) e (2.28) é válida. Como, por hipótese $G(x, s)$ é não-negativa, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x, u_n) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} G(x, u_n) dx$$

e por (2.11), deduzimos para todo $n \in \mathbb{N}$, que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} G(x, u_n) dx \leq c \quad (2.30)$$

Por outro lado,

$$\frac{f(x, u_n)}{u_n} \geq K - \frac{\delta}{2}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_n$$

e então por (A_1)

$$G(x, u_n) \geq \delta \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega_n. \quad (2.31)$$

Combinando (2.28) e (2.31) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n} G(x, u_n) dx \geq \delta |\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n| \rightarrow \infty$$

o que contradiz (2.30). Isto finaliza a prova do lema. $\blacksquare$

Lema 2.17 *Assuma que (f_1) - (f_4) ocorrem com $a = \infty$ em (f_4) . Então se (A_2) ocorre, o anulamento de $\{w_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é impossível.*

Prova. Usaremos novamente a seqüência $\{z_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ introduzida no Lema 2.13. Afirmamos que, sob nossas hipóteses e desde que $\|u_n\| \rightarrow \infty$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{\lambda_n}(z_n) = +\infty. \quad (2.32)$$

De fato suponha, por contradição, que para algum $M > 0$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} I_{\lambda_n}(z_n) \leq M \quad (2.33)$$

e para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$k_n = \sqrt{4M} \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Como a seqüência $\{k_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ se anula e é limitada, como na prova do Lema 2.10, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x, k_n) dx \rightarrow 0.$$

Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos

$$I_{\lambda_n}(k_n) = \frac{1}{2} \|k_n\|^2 - \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} F(x, k_n) dx = 2M - \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} F(x, k_n) dx \geq \frac{3}{2}M. \quad (2.34)$$

e pela definição de z_n , (2.34) contradiz (2.33), pois

$$\frac{3}{2}M \leq I_{\lambda_n}(k_n) \leq I_{\lambda_n}(z_n)$$

implica que

$$\frac{3}{2}M \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I_{\lambda_n}(z_n) \leq M.$$

Observe que a desigualdade $I_{\lambda_n}(k_n) \leq I_{\lambda_n}(z_n)$ é verdadeira, pois, em k_n , o termo $t = \sqrt{4M}/\|u_n\|$ pertence ao intervalo $[0, 1]$, desde que $\sqrt{4M}/\|u_n\|$ se aproxima da origem para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Então, a contradição obtida acima mostra que (2.32) ocorre. Daí, temos $I'_{\lambda_n}(z_n)z_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e então

$$I_{\lambda_n}(z_n) = I_{\lambda_n}(z_n) - \frac{1}{2} I'_{\lambda_n}(z_n)z_n = \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} G(x, z_n) dx. \quad (2.35)$$

Combinando (2.32) e (2.35) vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x, z_n) dx \rightarrow +\infty.$$

Mas por (A_2) e (2.11) temos também

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x, z_n) dx \leq D \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u_n) dx \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esta contradição prova o Lema. ■

Capítulo 3

Condições locais de bifurcação para um problema semilinear

3.1 Introdução

Neste capítulo, utilizamos um resultado análogo ao Teorema Abstrato do Capítulo 1 para estudar, sob condições locais, a existência de pontos de bifurcação para a seguinte família de equações não-lineares:

$$-\Delta u(x) + \lambda u(x) = f(x, u(x)), \quad \lambda > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (3.1)_\lambda$$

onde a não-linearidade $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $f(x, 0) = 0$ q.t.p. em $x \in \mathbb{R}^N$.

Definição 3.1 Dizemos que $\lambda = 0$ é um ponto de bifurcação para $(3.1)_\lambda$ se existir uma seqüência $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbb{R}^+ \times H^1(\mathbb{R}^N)$ de soluções não-triviais de $(3.1)_{\lambda_n}$ com $\lambda_n \rightarrow 0$ e $\|u_n\| \rightarrow 0$. Neste caso, $\{(\lambda_n, u_n)\}$ é chamada uma seqüência bifurcante.

Mostraremos que condições fracas locais sobre $f(x, \cdot)$ são suficientes para garantir que $\lambda = 0$ é um ponto de bifurcação para $(3.1)_\lambda$. Mais precisamente, para algum $\delta > 0$, vamos considerar as seguintes condições sobre a não-linearidade $f(x, s)$:

$g_1)$ $f : \mathbb{R}^N \times [-\delta, \delta] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função Caratheodory;

$g_2)$ $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x, s) = 0$ uniformemente para todo $s \in [-\delta, \delta]$;

$g_3)$ Existe $K > 0$ tal que $\limsup_{s \rightarrow 0} \left| \frac{f(x, s)}{s} \right| \leq K$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$;

$g_4)$ $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(x, s)}{s^2} = 0$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$;

$g_5)$ Uma das seguintes condições são válidas

(i) para $N \geq 1$, existem $A > 0$, $d \in (0, 2)$ e $\alpha \in \left(0, \frac{2(2-d)}{N}\right)$ tais que

$$F(x, s) \geq A(1 + |x|)^{-d}|s|^{2+\alpha} \quad \text{para todo } s \in [-\delta, \delta] \text{ e q.t.p. em } x \in \mathbb{R}^N$$

(ii) para $N = 1$, existe $\alpha \in (0, 2)$ tal que

$$F(x, s) \geq r(x)|s|^{2+\alpha}, \quad \text{para todo } s \in [-\delta, \delta] \text{ e q.t.p. em } x \in \mathbb{R}$$

onde $r \in L^\infty(\mathbb{R})$, $r \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}} r(x)dx > 0$ (o valor $+\infty$ é possível).

Fixando um número real $\lambda > 0$, uma solução clássica do problema $(3.1)_\lambda$, é uma função $u_\lambda \in C^2(\mathbb{R}^N)$ que satisfaz a equação para todo ponto $x \in \mathbb{R}^N$. Já uma solução fraca para $(3.1)_\lambda$ é uma função $u_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^N)$ que satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_\lambda \nabla v + \lambda u_\lambda v) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_\lambda) v dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

O funcional energia $I_\lambda : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ associado a equação $(3.1)_\lambda$ é dado por

$$I_\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + \lambda u^2] dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx, \quad \text{onde } F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt.$$

Além disso, o funcional I_λ é de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$ (veja Lema A.9 do Apêndice A) e seus pontos críticos correspondem exatamente as soluções fracas de $(3.1)_\lambda$.

Observação 3.2 *Note que a hipótese $(g_5)(i)$ é mais fraca do que a hipótese $(g_5)(ii)$.*

De fato, basta observar que

$$0 \leq (1 + |x|)^{-d} \leq 1, \quad \text{q.t.p. em } x \in \mathbb{R}^N, \quad d \in (0, 2)$$

e $(1 + |x|)^{-d}$ é integrável. Logo, $r(x) = A(1 + |x|)^{-d} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 1$, com $r \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^N} r(x)dx > 0$, ou seja, de certo modo $(g_5)(i)$ é um caso particular de $(g_5)(ii)$.

Exemplo 3.3 *Seja*

$$F(x, s) = (1 + |x|)^{-1} |s|^{2+\alpha} \left(2 + \sin \frac{1}{|s|^\alpha} \right)$$

onde $\alpha \in (0, 2/N)$. Então a função

$$f(x, s) = \frac{\partial F(x, s)}{\partial s} = (1 + |x|)^{-1} [(2 + \alpha)|s|^{1+\alpha}(2 + \sin |s|^{-\alpha}) - \alpha |s| \cos |s|^{-\alpha}]$$

satisfaz as hipóteses (g_1) - (g_5) .

De fato, como as funções em s acima são todas contínuas e $(1 + |x|)^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, a condição (g_1) é trivialmente satisfeita. Além disso, para $s \in [-\delta, \delta]$

$$[(2 + \alpha)|s|^{1+\alpha}(2 + \sin |s|^{-\alpha}) - \alpha |s| \cos |s|^{-\alpha}] \leq 3(2 + \alpha)\delta^{1+\alpha} + \alpha\delta = C$$

Logo, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x, s) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(2 + \alpha)|s|^{1+\alpha}(2 + \sin |s|^{-\alpha}) - \alpha |s| \cos |s|^{-\alpha}}{(1 + |x|)} \right\} = 0,$$

$$\left| \frac{f(x, s)}{s} \right| \leq \left| \frac{(2 + \alpha)|s|^{1+\alpha}(2 + \sin |s|^{-\alpha}) - \alpha|s| \cos |s|^{-\alpha}}{1 + |x|} \right| \leq C_1$$

e

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(x, s)}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} [(1 + |x|)^{-1}|s|^\alpha(2 + \sin |s|^{-\alpha})] = 0,$$

ou seja, (g_2) - (g_4) são satisfeitas. Por fim, para todo $s \in [-\delta, \delta]$,

$$F(x, s) = (1 + |x|)^{-1}|s|^\alpha(2 + \sin |s|^{-\alpha}) \geq (1 + |x|)^{-1}|s|^{2+\alpha}$$

e (g_5) também é satisfeita.

Observação 3.4 *As condições locais exigidas aqui sobre a não-linearidade f são condições locais mais fracas do que a condição de Ambrosetti-Rabinowitz, com $s \in [-\delta, \delta]$.*

Com efeito, consideremos a função f do exemplo anterior. Temos

$$\frac{f(x, s)}{s} = (1 + |x|)^{-1} [(2 + \alpha)s^\alpha(2 + \sin s^{-\alpha}) - \alpha \cos s^{-\alpha}], \quad s \in (0, \delta]$$

e como $(2 + \alpha)s^\alpha(2 + \sin s^{-\alpha}) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow 0$ e $\lim_{s \rightarrow 0} \alpha \cos s^{-\alpha}$ não existe, concluímos que não existe $\lim_{s \rightarrow 0} f(x, s)/s$. Porém, quando a condição de Ambrosetti-Rabinowitz é válida, necessariamente $f(x, s) = o(s)$ se $s \rightarrow 0$, ou seja, a função f do Exemplo 3.3 satisfaz (g_1) - (g_5) mas não cumpre a condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Portanto (AR) é uma hipótese mais forte do que (f_1) - (f_5) .

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 3.5 *Assuma que (g_1) - (g_5) são válidas. Então $\lambda = 0$ é um ponto de bifurcação para $(3.1)_\lambda$.*

3.2 Estrutura variacional

Nesta seção, modificaremos $f(x, s)$ no exterior de $[-\delta, \delta]$, com o intuito de estudarmos o problema $(3.1)_\lambda$ sob condições globais com respeito a não-linearidade f . Assim, seja $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(x, s) = \begin{cases} f(x, -\delta) & \text{se } s \leq -\delta \text{ q.t.p. em } x \in \mathbb{R}^N \\ f(x, s) & \text{se } s \in [-\delta, \delta] \text{ q.t.p. em } x \in \mathbb{R}^N \\ f(x, \delta) & \text{se } s \geq \delta \text{ q.t.p. em } x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

É fácil verificar que a nova função $\tilde{f}$ satisfaz as hipóteses (g_1) - (g_5) para todo $s \in \mathbb{R}$. Além disso, por (g_3) , para todo $s \in \mathbb{R}$ temos

$$|\tilde{f}(x, s)| \leq K|s| \quad \text{q.t.p. em } x \in \mathbb{R}^N,$$

donde segue que

$$|\tilde{F}(x, s)| \leq \int_0^s |\tilde{f}(x, t)| dt \leq K \int_0^s |t| dt = \frac{K}{2}|s|^2 \quad \text{q.t.p. em } x \in \mathbb{R}^N \quad (3.1)$$

e conseqüentemente

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(x, u) dx \leq \frac{K}{2} \|u\|_2^2. \quad (3.2)$$

Denotamos por $(\widetilde{3.1})_\lambda$ a nova família de equações obtida substituindo f por $\tilde{f}$ e introduzimos os funcionais $I_\lambda : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ definidos por

$$I_\lambda(u) = \|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(x, u) dx$$

onde $\tilde{F}(x, u) = \int_0^u \tilde{f}(x, s) ds$ e $\lambda \geq 0$.

Pelo Lema A.9 do Apêndice A, I_λ é um funcional de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para cada $\lambda \geq 0$. A norma

$$\|u\|^2 = \|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2$$

é equivalente a norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$, desde que $\lambda > 0$. Além disso, a todo ponto crítico u_λ de I_λ corresponde uma solução $(\lambda, u_\lambda) \in \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$ de $(\widetilde{3.1})_\lambda$.

Em seguida, vamos mostrar que, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, I_λ possui a geometria do passo da montanha.

Lema 3.6 *Assuma que (g_1) - (g_5) ocorrem. Então $I_\lambda(u) \geq \lambda \|u\|^2 + o(\|u\|^2)$ quando $u \rightarrow 0$ para todo $\lambda \in (0, 1]$.*

Prova. Por (3.1), se $|s| > 1$ temos

$$\tilde{F}(x, s) \leq \frac{K}{2} |s|^2 < \frac{K}{2} |s|^q, \quad q \in (2, 2^*]. \quad (3.3)$$

Já por (g_4) , dado $\varepsilon > 0$, existe $1 > \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\tilde{F}(x, s) \leq \varepsilon |s|^2, \quad \text{se } |s| \leq \delta < 1. \quad (3.4)$$

Finalmente, para $|s| \in [\delta, 1]$, temos

$$\tilde{F}(x, s) \leq \frac{K}{2} |s|^2,$$

o que implica que

$$\tilde{F}(x, s) \leq \frac{\tilde{F}(x, s)}{|s|^{q-2}} \leq \frac{K}{2} |s|^q \quad q \in (2, 2^*]. \quad (3.5)$$

Por (3.3) e (3.5),

$$\tilde{F}(x, s) \leq \frac{K}{2} |s|^q, \quad |s| > \delta(\varepsilon) > 0.$$

Utilizando (3.4) e fazendo $C(\varepsilon, q) = K/2$ na expressão acima, obtemos que, para todo $\varepsilon > 0$ e $q \in (2, 2^*]$ ($q > 2$ se $N = 2$) existe $C(\varepsilon, q) > 0$ tal que

$$\tilde{F}(x, s) \leq \varepsilon |s|^2 + C(\varepsilon, q) |s|^q.$$

Então, pelas imersões de Sobolev, existe $\tilde{C}(\varepsilon, q) > 0$ tal que para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(x, u) dx \leq \varepsilon \|u\|^2 + \tilde{C}(\varepsilon, q) \|u\|^q$$

e daí deduzimos

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(x, u) dx}{\|u\|^2} = \varepsilon + \tilde{C}(\varepsilon, q) \|u\|^q \rightarrow 0 \quad \text{quando } u \rightarrow 0$$

donde

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(x, u) dx = o(\|u\|^2) \quad \text{quando } u \rightarrow 0.$$

Desde que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\lambda \in (0, 1]$, temos

$$I_\lambda(u) = \|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(x, u) dx \geq \lambda \|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(x, u) dx$$

donde segue que

$$I_\lambda(u) \geq \lambda \|u\|^2 + o(\|u\|^2)$$

como queríamos provar. ■

Lema 3.7 *Assuma que (g_1) - (g_5) ocorrem. Então existem $\lambda_0 > 0$ e $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que $I_{\lambda_0}(v_0) < 0$.*

Prova. Para $\lambda > 0$, definamos $v_\lambda(x) = \delta e^{-\sqrt{\lambda}|x|}$. Denotando $B(N)$ por

$$B(N) = \delta^2 \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2|y|} dy = \delta^2 \omega_N \int_0^\infty \rho^{N-1} e^{-2\rho} d\rho \quad (3.6)$$

onde ω_N é a área da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$, temos

$$\begin{aligned} \|v_\lambda\|_2^2 &= \delta^2 \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\sqrt{\lambda}|x|} dx = \delta^2 \omega_N \int_0^\infty r^{N-1} e^{-2\sqrt{\lambda}r} dr \\ &= \delta^2 \omega_N \int_0^\infty \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)^{N-1} e^{-2\rho} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) d\rho = \delta^2 \omega_N \lambda^{-\frac{N}{2}} \int_0^\infty \rho^{N-1} e^{-2\rho} d\rho \\ &= B(N) \lambda^{-\frac{N}{2}} \end{aligned}$$

Para $1 \leq i \leq N$,

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial x_i}(x) = -\frac{\delta x_i \sqrt{\lambda}}{|x|} e^{-\sqrt{\lambda}|x|},$$

e daí

$$\begin{aligned} \|\nabla v_\lambda\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N \frac{\delta^2 |x_i|^2 \sqrt{\lambda}}{|x|^2} e^{-2\sqrt{\lambda}|x|} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \delta^2 \lambda e^{-2\sqrt{\lambda}|x|} dx \\ &= \delta^2 \lambda \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\sqrt{\lambda}|x|} dx = \delta^2 \lambda \omega_N \int_0^\infty r^{N-1} e^{-2\sqrt{\lambda}r} dr \\ &= \lambda^{1-\frac{N}{2}} \delta^2 \omega_N \int_0^\infty \rho^{N-1} e^{-2\rho} d\rho = B(N) \lambda^{1-\frac{N}{2}}. \end{aligned}$$

Logo, $v_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso,

$$\|v_\lambda\|^2 = \|\nabla v_\lambda\|_2^2 + \lambda \|v_\lambda\|_2^2 = 2B(N)\lambda^{1-\frac{N}{2}}. \quad (3.7)$$

Agora, se $(g_5)(i)$ é válida, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(x, v_\lambda) dx \geq A \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |x|)^{-d} |v_\lambda|^{\alpha+2} dx.$$

Considerando $|y| \geq 1 \geq \sqrt{\lambda}$, que é equivalente a $(1 + |y|/\sqrt{\lambda})^{-d} \geq (2|y|/\sqrt{\lambda})^{-d}$, temos, mudando quando necessário para coordenadas polares,

$$\begin{aligned} A \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |x|)^{-d} |v_\lambda|^\alpha dx &= \delta^{\alpha+2} A \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |x|)^{-d} e^{-(\alpha+2)\sqrt{\lambda}|x|} dx \\ &= \delta^{\alpha+2} A \int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + \frac{|y|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-d} e^{-(\alpha+2)|y|} \lambda^{-\frac{N}{2}} dy \\ &\geq \delta^{\alpha+2} A \lambda^{-\frac{N}{2}} \int_{|y| \geq 1} \left(1 + \frac{|y|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-d} e^{-(\alpha+2)|y|} dy \\ &\geq \delta^{\alpha+2} A \lambda^{-\frac{N}{2}} \int_{|y| \geq 1} \left(\frac{2|y|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-d} e^{-(\alpha+2)|y|} dy \\ &= \delta^{\alpha+2} A \lambda^{\frac{d}{2}-\frac{N}{2}} 2^{-d} \int_{|y| \geq 1} |y|^{-d} e^{-(\alpha+2)|y|} dy \\ &:= D(N, d, \alpha) \lambda^{\frac{d}{2}-\frac{N}{2}}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

o que mostra que

$$I_\lambda(v_\lambda) = \|v_\lambda\|^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(x, v_\lambda) dx \leq 2B(N)\lambda^{1-\frac{N}{2}} - 2D(N, d, \alpha)\lambda^{\frac{d}{2}-\frac{N}{2}}.$$

Desde que $d < 2$, claramente temos $I_\lambda(v_\lambda) < 0$ para todo $\lambda > 0$ suficientemente pequeno. Por outro lado, quando $(g_5)(ii)$ é válida,

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{F}(x, v_\lambda) dx \geq \int_{\mathbb{R}} r(x) |v_\lambda|^{\alpha+2} dx$$

e, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} r(x) |v_\lambda|^\alpha dx &= \delta^\alpha \int_{\mathbb{R}} r(x) e^{-(\alpha+2)\sqrt{\lambda}|x|} dx \\ &\geq \delta^{\alpha+2} \int_{|x| \leq \mu} r(x) e^{-(\alpha+2)\sqrt{\lambda}|x|} dx \quad (\forall \mu > 0) \\ &\geq \delta^{\alpha+2} e^{-(\alpha+2)\sqrt{\lambda}\mu} \int_{|x| \leq \mu} r(x) dx \quad (\forall \mu > 0). \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\int_{|x| \leq \mu} r(x) dx \geq \frac{1}{2} \min \left\{ \int_{\mathbb{R}} r(x) dx, 1 \right\}$$

para $\mu > \mu_0 > 0$.

De fato, se $\int_{\mathbb{R}} r(x)dx \geq 1$ temos

$$\min \left\{ \int_{\mathbb{R}} r(x)dx, 1 \right\} = 1.$$

Então, para todo $\mu > \mu_0$, $\int_{|x| \leq \mu} r(x)dx$ está suficientemente próximo de $\int_{\mathbb{R}} r(x)dx$, donde segue que

$$\int_{|x| \leq \mu} r(x)dx \geq \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \min \left\{ \int_{\mathbb{R}} r(x)dx, 1 \right\}.$$

Agora, se $\int_{\mathbb{R}} r(x)dx \leq 1$ temos

$$\min \left\{ \int_{\mathbb{R}} r(x)dx, 1 \right\} = \int_{\mathbb{R}} r(x)dx$$

e para todo $\mu > \mu_0$, $\int_{|x| \leq \mu} r(x)dx$ está suficientemente próximo de $\int_{\mathbb{R}} r(x)dx$, donde segue que

$$\int_{|x| \leq \mu} r(x)dx \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} r(x)dx = \frac{1}{2} \min \left\{ \int_{\mathbb{R}} r(x)dx, 1 \right\}$$

o que prova nossa afirmação.

Logo, sendo a afirmação anterior verdadeira, temos para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} r(x)|v_\lambda|^\alpha dx &\geq \delta^{\alpha+2} e^{-(\alpha+2)\sqrt{\lambda}\mu} \int_{|x| \leq \mu} r(x)dx \quad (\forall \mu > 0) \\ &\geq \frac{1}{2} \delta^{\alpha+2} e^{-(\alpha+2)\sqrt{\lambda}\mu} \min \left\{ \int_{\mathbb{R}} r(x)dx, 1 \right\} \quad (\text{para } \mu > \mu_0) \\ &\geq \frac{1}{4} \delta^{\alpha+2} \min \left\{ \int_{\mathbb{R}} r(x)dx, 1 \right\} \\ &:= E(\alpha). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Então, usando (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} I_\lambda(v_\lambda) = \|v_\lambda\|^2 - 2 \int_{\mathbb{R}} \tilde{F}(x, v_\lambda)dx &\leq 2B(N)\lambda^{1-\frac{N}{2}} - 2E(\alpha) \\ &\leq 2B(N)\sqrt{\lambda} - 2E(\alpha) \end{aligned}$$

e $I_\lambda(v_\lambda) < 0$ para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno. ■

É importante notar que na prova anterior usamos apenas a condição de $\tilde{f}(x, \cdot)$ em $[-\delta, \delta]$, quando esta corresponde a $f(x, \cdot)$. Então este lema é válido independente da escolha particular de $\tilde{f}$ que tenhamos feito.

Lema 3.8 *Assuma que (g_1) - (g_5) ocorrem. Então existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$, os conjuntos*

$$\Gamma_\lambda = \{\gamma \in C([0, 1]; H^1(\mathbb{R}^N)); \gamma(0) = 0 \text{ e } I_\lambda(\gamma(1)) < 0\}$$

são não-vazios. Além disso, para $\lambda \in (0, \lambda_0]$

$$c(\lambda) = \inf_{\gamma \in \Gamma_\lambda} \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) > I_\lambda(0) = 0$$

e a função $\lambda \rightarrow c(\lambda)$ é não-decrescente.

Prova. Note que se $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ temos

$$I_{\lambda_1}(u) \leq I_{\lambda_2}(u), \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

o que mostra que $\Gamma_{\lambda_1} \subset \Gamma_{\lambda_2}$. Logo $c(\lambda_1) \leq c(\lambda_2)$ e temos que $\lambda \rightarrow c(\lambda)$ é não-decrescente. Desde que $I_\lambda(0) = 0$, para todo $\lambda \geq 0$, pelo Lema 3.6 temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(x, u) dx = o(\|u\|^2) \quad \text{quando } u \rightarrow 0,$$

o que implica que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \|u\|^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(x, u) dx = \|u\|^2 - 2o(\|u\|^2) = \|u\|^2(1 - 2o(1)) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 = \frac{1}{2}r^2 > 0 \end{aligned}$$

para algum r positivo satisfazendo $r < 2B(N)\lambda^{1-\frac{N}{2}}$. Logo,

$$\inf_{\|u\|=r} I_\lambda(u) > 0 = I_\lambda(0).$$

Além disso, pelo Lema 3.7 temos $I_\lambda(v_\lambda) < 0$ para λ suficientemente pequeno, ou seja, existe $\lambda_0 > 0$ tal que $I_\lambda(v_\lambda) < 0$, para todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$. Logo, para cada $\lambda \in (0, \lambda_0]$ com $\|v_\lambda\| = 2B(N)\lambda^{1-\frac{N}{2}} > r$ e fixando

$$\Gamma_\lambda = \{\gamma \in C([0, 1], H^1(\mathbb{R}^N)); \gamma(0) = 0 \text{ e } I_\lambda(\gamma(1)) < 0\} \neq \emptyset$$

temos

$$\inf_{\|u\|=r} I_\lambda(u) \leq I_\lambda(u) \leq \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma(t)), \quad \forall \gamma \in \Gamma_\lambda,$$

ou seja,

$$\inf_{\|u\|=r} I_\lambda(u) \leq \inf_{\gamma \in \Gamma_\lambda} \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma(1)) = c(\lambda).$$

Portanto,

$$c(\lambda) \geq \inf_{\|u\|=r} I_\lambda(u) > 0 = I_\lambda(0).$$

■

3.3 Um ponto crítico para quase todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$

Nesta seção, provamos a existência de pontos críticos para quase todo funcional I_λ , com $\lambda \in (0, \lambda_0]$. Isto é um passo fundamental para obtenção de uma seqüência bifurcante para a equação $(3.1)_\lambda$.

Neste sentido, usamos duas proposições análogas às Proposições 1.1 e 1.2, que são preliminares do Teorema Abstrato 1.3. Procedemos da seguinte forma: desde que a aplicação $\lambda \rightarrow c(\lambda)$, onde $\lambda \in (0, \lambda_0)$, é não-decrescente, $c'(\lambda)$, a derivada de $c(\lambda)$, existe para quase todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Seja $\lambda \in (0, \lambda_0)$ um valor fixo, porém arbitrário onde $c'(\lambda)$ existe e considere $\{\lambda_m\} \subset (0, \lambda_0)$ uma seqüência estritamente decrescente satisfazendo $\lambda_m \rightarrow \lambda$. Temos a seguinte proposição:

Proposição 3.9 *Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma seqüência de caminhos $\{\gamma_m\} \subset \Gamma_\lambda$ tal que, para $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande,*

$$(i) \quad \|\gamma_m(t)\|_2^2 \leq c'(\lambda) + 3\varepsilon \text{ se } \gamma_m(t) \text{ satisfizer}$$

$$I_\lambda(\gamma_m(t)) \geq c(\lambda) - \varepsilon(\lambda_m - \lambda); \quad (3.10)$$

$$(ii) \quad \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma_m(t)) \leq c_\lambda + (-c'(\lambda) + 2\varepsilon)(\lambda_m - \lambda).$$

Fazendo a escolha $\varepsilon = c(\lambda) > 0$ temos quando (3.10) é válida

$$\|\gamma_m(t)\|^2 \leq (5 + 3K)c(\lambda) + (1 + K)c'(\lambda) := \beta^2(\lambda)$$

para $K > 0$ definido em (g_3) e $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Prova. A prova de (i) e (ii) é análoga à demonstração da Proposição 1.1, bastando considerar em (i) a seguinte identidade

$$\|\gamma_m(t)\|_2^2 = \frac{I_{\lambda_m}(\gamma_m(t)) - I_\lambda(\gamma_m(t))}{\lambda_m - \lambda}.$$

Para provarmos a última estimativa da proposição, escolhemos $\varepsilon = c(\lambda) > 0$ e temos, quando (3.10) é válida e $m \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande,

$$\|\gamma_m(t)\|_2^2 \leq c'(\lambda) + 3c(\lambda) \quad \text{e} \quad I_\lambda(\gamma_m(t)) \leq 2c(\lambda).$$

Então, usando (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla \gamma_m(t)\|_2^2 &= I_\lambda(\gamma_m(t)) - \lambda \|\gamma_m(t)\|_2^2 + 2 \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(x, \gamma_m(t)) dx \\ &\leq I_\lambda(\gamma_m(t)) + 2 \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(x, \gamma_m(t)) dx \\ &\leq I_\lambda(\gamma_m(t)) + K \|\gamma_m(t)\|_2^2 \\ &\leq 2c(\lambda) + K(c'(\lambda) + 3c(\lambda)). \end{aligned}$$

Assim, quando (3.10) é válida,

$$\begin{aligned}\|\gamma_m\|^2 &= \|\nabla \gamma_m(t)\|_2^2 + \|\gamma_m(t)\|_2^2 \\ &\leq 2c(\lambda) + K(c'(\lambda) + 3c(\lambda)) + c'(\lambda) + 3c(\lambda) \\ &= (5 + 3K)c(\lambda) + (1 + K)c'(\lambda) := \beta^2(\lambda).\end{aligned}$$

Isto finaliza a prova da proposição. ■

Provaremos agora que, quando $c'(\lambda)$ existe, o funcional I_λ possui um ponto crítico não-trivial que está contido na bola de raio $2\beta(\lambda)$ centrada na origem. Para $a > 0$, definamos o seguinte conjunto:

$$F_a = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); \|u\| \leq 2\beta(\lambda) \text{ e } |I_\lambda(u) - c(\lambda)| \leq a\}.$$

Temos o seguinte resultado:

Proposição 3.10 *Para todo $a > 0$,*

$$\inf\{\|I'_\lambda(u)\|; u \in F_a\} = 0. \quad (3.11)$$

Prova. Suponha, por contradição, que (3.11) não é válida. Então, devido a geometria do passo da montanha (Lema 3.8), escolhemos $a > 0$ de modo que, para todo $u \in F_a$,

$$\|I'_\lambda(u)\| \geq a \text{ e } 0 < a < \frac{1}{2}c(\lambda).$$

O restante da demonstração segue os mesmos passos da prova da Proposição 1.2. ■

Lema 3.11 *Assuma que (g_1) -(g_5) ocorrem. Então para cada $\lambda \in (0, \lambda_0]$ onde existe $c'(\lambda)$, existe $u_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $0 < \|u_\lambda\| \leq 2\beta(\lambda)$ tal que $(\lambda, u_\lambda) \in \mathbb{R}^+ \times H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma solução do problema $(\widetilde{3.1})_\lambda$.*

Prova. Pela Proposição 3.10, quando $c'(\lambda)$ existe, I_λ tem uma seqüência de Palais-Smale $\{u_m\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ no nível $c(\lambda)$ que está contida numa bola de raio $2\beta(\lambda)$ centrada na origem. Desde que $\{u_m\}$ é limitada, sem perda de generalidade, podemos assumir que $u_m \rightharpoonup u_\lambda$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ (a menos de subsequência). Para finalizarmos a prova, precisamos justamente mostrar que $u_m \rightarrow u_\lambda$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. A condição $I'_\lambda(u_m) \rightarrow 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ nos diz que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_m \nabla v + \lambda u_m v] dx - \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(x, u_m) v dx \rightarrow 0.$$

Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(x, u_m) v dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(x, u_\lambda) v dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N). \quad (3.12)$$

De fato, por (g_2) , dado $\varepsilon > 0$ existe $c(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|\tilde{f}(x, u_m)| < \varepsilon \text{ sempre que } |x| > c(\varepsilon).$$

Logo, para qualquer $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x|>c(\varepsilon)} (\tilde{f}(x, u_m) - \tilde{f}(x, u_\lambda)) v dx \right| &\leq \int_{|x|>c(\varepsilon)} [|\tilde{f}(x, u_m)| + |\tilde{f}(x, u_\lambda)|] v dx \\ &< \varepsilon \int_{|x|>c(\varepsilon)} |v| dx = A\varepsilon. \end{aligned}$$

Temos também, para $c(\varepsilon)$ dado acima, que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (\tilde{f}(x, u_m) - \tilde{f}(x, u_\lambda)) v dx &\leq \int_{|x|\leq c(\varepsilon)} |(\tilde{f}(x, u_m) - \tilde{f}(x, u_\lambda)) v| dx + \\ &\quad + \int_{|x|>c(\varepsilon)} |(\tilde{f}(x, u_m) - \tilde{f}(x, u_\lambda)) v| dx \end{aligned}$$

para todo $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Agora, como $u_m \rightharpoonup u_\lambda$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ então $u_m \rightarrow u_\lambda$ em $L_{loc}^q(\mathbb{R}^N)$, $q \in [1, 2^*]$. Logo, a menos de subsequência, $u_m(x) \rightarrow u_\lambda(x)$, q.t.p. em $B_{c(\varepsilon)}(0) = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| \leq c(\varepsilon)\}$ e $|u_m(x)| \leq h(x)$, onde $h(x) \in L^1(B_{c(\varepsilon)}(0))$. Como $\tilde{f}$ é Caratheodory,

$$\tilde{f}(x, u_m(x)) \rightarrow \tilde{f}(x, u_\lambda(x)) \text{ q.t.p. em } B_{c(\varepsilon)}(0)$$

e por (3.1)

$$\tilde{f}(x, u_m(x)) \leq K|u_m(x)| \leq K|h(x)| \in L^1(B_{c(\varepsilon)}(0)).$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{|x|\leq c(\varepsilon)} |(\tilde{f}(x, u_m) - \tilde{f}(x, u_\lambda)) v| dx \rightarrow 0$$

o que prova a convergência em (3.12). Daí

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_m \nabla v + \lambda u_m v] dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(x, u_\lambda) v dx \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N). \quad (3.13)$$

Definindo $L : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ por

$$(Lu)(v) = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla v + \lambda uv] dx = \langle u, v \rangle,$$

pelo Teorema da Representação de Riesz, dado $\Psi \in H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, existe uma única função $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\Psi(v) = \langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla v + \lambda uv] dx = (Lu)(v), \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

com $\|u\| = \|\Psi\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)}$, ou seja, L é bijetiva. Pelo Teorema da Aplicação Aberta, L^{-1} também é contínua. Logo, aplicando L^{-1} em (3.13), obtemos

$$u_m \rightarrow L^{-1}(\Phi'(u_\lambda))$$

onde $\Phi(u_\lambda) = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(x, u_\lambda) dx$. Pela unicidade do limite fraco, concluímos que $u_m \rightarrow u_\lambda$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e portanto $(\lambda, u_\lambda) \in \mathbb{R}^+ \times H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma solução de $(3.1)_\lambda$. ■

3.4 Existência de seqüência bifurcante para o problema modificado

Nesta seção, deduzimos a existência de uma seqüência estritamente decrescente $\lambda_n \rightarrow 0$ com $c(\lambda_n) \rightarrow 0$ e $c'(\lambda_n) \rightarrow 0$. Feito isto, em particular pela Proposição 3.9, $\beta(\lambda_n) \rightarrow 0$ e pelo Lema 3.11 obtemos uma seqüência bifurcante para $(\widetilde{3.1})_\lambda$.

Lema 3.12 *Assuma que (g_1) – (g_5) ocorrem. Então $c(\lambda)\lambda^{-1} \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow 0$.*

Prova. Usaremos novamente a função teste $v_\lambda(x) = \delta e^{-\sqrt{\lambda}|x|}$ introduzida no Lema 3.6. Pela prova do Lema 3.6, sabemos que $I_\lambda(v_\lambda) < 0$ para todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$. Então, devido a caracterização variacional de $c(\lambda)$, necessariamente temos

$$c(\lambda) \leq \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(tv_\lambda)$$

pois $\gamma(t) := tv_\lambda \in \Gamma_\lambda$. Por (3.7), temos para todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$ e para todo $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} I_\lambda(tv_\lambda) &= t^2 \|\nabla v_\lambda\|_2^2 + \lambda \|v_\lambda\|_2^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{F}(x, tv_\lambda) dx \\ &= 2B(N)\lambda^{1-\frac{N}{2}}t^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{F}(x, tv_\lambda) dx \end{aligned}$$

onde $B(N)$ foi definida em (3.6). Distinguímos os casos (i) e (ii) em (g_5) . Quando $(g_5)(i)$ é válida, temos, usando (3.8), que para todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$ e para todo $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{F}(x, tv_\lambda) dx &\geq t^{\alpha+2} A \int_{\mathbb{R}^N} (1+|x|)^{-d} |v_\lambda|^{\alpha+2} dx \\ &\geq D(N, d, \alpha) \lambda^{\frac{d}{2}-\frac{N}{2}} t^{\alpha+2}. \end{aligned}$$

Então, para todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$ e $t \in [0, 1]$, temos

$$I_\lambda(tv_\lambda) \leq 2B(N)\lambda^{1-\frac{N}{2}}t^2 - 2D(N, d, \alpha)\lambda^{\frac{d}{2}-\frac{N}{2}}t^{\alpha+2}. \quad (3.14)$$

Seja

$$g(t) := 2B(N)\lambda^{1-\frac{N}{2}}t^2 - 2D(N, d, \alpha)\lambda^{\frac{d}{2}-\frac{N}{2}}t^{\alpha+2}, \quad t \in [0, 1].$$

Se

$$g'(t_0) = t_0(4B(N)\lambda^{1-\frac{N}{2}} - 2(\alpha+2)D(N, d, \alpha)\lambda^{\frac{d}{2}-\frac{N}{2}}t_0^{\alpha+1}) = 0$$

encontramos

$$t_0 = \left(\frac{2}{\alpha+2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{B(N)}{D(N, d, \alpha)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \lambda^{\frac{1}{\alpha} - \frac{d}{2\alpha}}$$

e desde que

$$g''(t) = 4B(N)\lambda^{1-\frac{N}{2}} - 2(\alpha+2)(\alpha+1)D(N, d, \alpha)\lambda^{\frac{d}{2}-\frac{N}{2}}t^\alpha,$$

obtemos,

$$g''(t_0) = -4\alpha B(N)\lambda^{1-\frac{N}{2}} < 0.$$

Caso tivéssemos considerado $t_1 = 0$ teríamos encontrado

$$g''(t_1) = 4B(N)\lambda^{1-\frac{N}{2}} > 0,$$

e tal ponto não seria ponto de máximo. Daí, o ponto t_0 encontrado acima é ponto de máximo no intervalo $[0, 1]$ para a função $g(t)$ e

$$\begin{aligned} g(t_0) &= \max_{t \in (0,1)} \left[2B(N)\lambda^{1-\frac{N}{2}}t^2 - 2D(N, d, \alpha)\lambda^{\frac{d}{2}-\frac{N}{2}}t^{\alpha+2} \right] \\ &= \left[2B(N) \left(\frac{2}{\alpha+2} \frac{B(N)}{D(N, d, \alpha)} \right)^{\frac{2}{\alpha}} - 2D(N, d, \alpha) \left(\frac{2}{\alpha+2} \frac{B(N)}{D(N, d, \alpha)} \right)^{\frac{\alpha+2}{\alpha}} \right] \lambda^\theta \\ &= C(N, d, \alpha)\lambda^\theta \end{aligned}$$

onde $\theta = \left(1 - \frac{N}{2}\right) \left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) - \frac{2}{\alpha} \left(\frac{d}{2} - \frac{N}{2}\right)$. Como, por $(g_5)(i)$, $\alpha < \frac{2(2-d)}{N}$ o que é equivalente a $\theta - 1 > 0$, temos

$$c(\lambda)\lambda^{-1} \leq C(N, d, \alpha)\lambda^{\theta-1} \rightarrow 0 \text{ quando } \lambda \rightarrow 0.$$

Agora, quando $(g_5)(ii)$ é válida, usando (3.9), para todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$ e $t \in [0, 1]$, temos

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{F}(x, tv_\lambda) dx \geq t^\alpha \int_{\mathbb{R}} r(x) |v_\lambda|^{\alpha+2} dx \geq E(\alpha)t^{\alpha+2}.$$

Então, para todo $t \in (0, \lambda_0]$ e para todo $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} I_\lambda(tv_\lambda) &= \|\nabla(tv_\lambda)\|_2^2 + \lambda\|tv_\lambda\|_2^2 - 2 \int_{\mathbb{R}} \tilde{F}(x, tv_\lambda) dx \\ &\geq 2B(1)\lambda^{\frac{1}{2}}t^2 - 2E(\alpha)t^\alpha. \end{aligned}$$

Um cálculo análogo ao que foi feito para o caso $(g_5)(i)$ nos mostra que o máximo do lado direito da expressão acima é da forma $C(\alpha)\lambda^\theta$ onde $\theta = (\alpha + 2)/2\alpha$. Como $0 < \alpha < 2$ é equivalente a $\theta - 1 > 0$, obtemos

$$c(\lambda)\lambda^{-1} \leq C(\alpha)\lambda^{\theta-1} \rightarrow 0 \text{ quando } \lambda \rightarrow 0,$$

o que finaliza a demonstração do nosso lema. ■

Lema 3.13 *Assuma que (g_1) -(g_5) ocorrem. Então, existe uma sequência estritamente decrescente $\lambda_n \rightarrow 0$ com $c(\lambda_n) \rightarrow 0$ e $c'(\lambda_n) \rightarrow 0$.*

Prova. Pelo Lema 3.12, sabemos que $c(\lambda)\lambda^{-1} \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow 0$ e então, necessariamente, temos $c(\lambda) \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow 0$. Afirmamos que existe uma sequência estritamente decrescente $\lambda_n \rightarrow 0$ com $c'(\lambda_n) \rightarrow 0$.

Suponha, por contradição, que

$$a = \liminf_{\lambda \rightarrow 0} c'(\lambda) > 0.$$

Desde que a função $\lambda \rightarrow c(\lambda)$ é não-decrescente e positiva, temos para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno,

$$c(\lambda) \geq c(\lambda) - \lim_{h \rightarrow 0} c(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^\lambda c'(t) dt.$$

Para $\varepsilon = a/2$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $\lambda \in (0, \delta)$ temos $c'(\lambda) > a$. Logo,

$$c(\lambda) \geq \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^\lambda c'(t) dt \geq \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^\lambda \frac{a}{2} dt = \frac{a\lambda}{2}$$

ou seja, $c(\lambda)/\lambda \geq a/2 > 0$. Mas, isto está contradizendo o fato que $c(\lambda)\lambda^{-1} \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow 0$ e o lema está provado. ■

Finalmente, para concluir esta seção, vamos deduzir a existência de uma seqüência bifurcante para o problema modificado $(3.1)_\lambda$, o que é feito através do seguinte lema:

Lema 3.14 *Seja $\{\lambda_n\}$ a seqüência obtida através do Lema 3.13. Então existe uma seqüência bifurcante $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbb{R}^+ \times H^1(\mathbb{R}^N)$ para o problema $(\widetilde{3.1})_\lambda$.*

Prova. De fato, a definição de $\beta(\lambda)$ na Proposição 3.9 nos fornece a seguinte identidade:

$$\beta^2(\lambda) = (5 + 3K)c(\lambda) + (1 + K)c'(\lambda).$$

Pelo Lema 3.11, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma função $u_n \equiv u_{\lambda_n} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbb{R}^+ \times H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma solução do problema $(3.1)_\lambda$ e

$$0 < \|u_n\| \leq 2\beta(\lambda_n) = (5 + 3K)c(\lambda_n) + (1 + K)c'(\lambda_n).$$

Mas, pelo Lema 3.13, $\beta(\lambda_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, donde segue que $\|u_n\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbb{R}^+ \times H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma seqüência bifurcante para o problema $(\widetilde{3.1})_\lambda$. ■

3.5 Existência de seqüência bifurcante para o problema original

Nesta seção, vamos finalizar a prova do Teorema 3.5 mostrando que a seqüência bifurcante $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbb{R}^+ \times H^1(\mathbb{R}^N)$, obtida na seção anterior para a equação $(\widetilde{3.1})_\lambda$, também é uma seqüência bifurcante para o problema $(3.1)_\lambda$. Para isto, provamos primeiro que a bifurcação é válida na norma de L^∞ . Em outras palavras, vamos mostrar que a seqüência $\{u_n\}$ também satisfaz $\|u_n\|_\infty \rightarrow 0$.

Lema 3.15 *Consideremos a seqüência $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbb{R}^+ \times H^1(\mathbb{R}^N)$ obtida no Lema 3.14. Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\infty = 0$$

localmente em $\mathbb{R}^N$.

Prova. Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\Delta u_n = \lambda_n u_n - \widetilde{f}(x, u_n) := g(x, u_n) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

De fato, seja $R > 0$ e B_R uma bola arbitrária em $\mathbb{R}^N$. Claramente, $\tilde{f}(\cdot, s) \in L^2(B_R)$ pois,

$$\int_{B_R} |\tilde{f}(x, s)|^2 dx \leq K|s|^2 \int_{B_R} dx = K|s|^2 |B_R| < K\delta^2 |B_R| < \infty,$$

donde segue que $g(\cdot, s) \in L^2(B_R)$. Então, sendo $u_n \in H^1(B_R)$ solução fraca de $(3.1)_\lambda$, segue pelo Teorema A.28 do Apêndice A, que $u_n \in H^2(B_R)$, para todo $R > 0$, ou seja, $u_n \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$. Daí, utilizando as fórmulas de Green, obtemos

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u_n + \lambda_n u_n, v \rangle_2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta u_n v + \lambda_n u_n v) dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \cdot \nabla v + \lambda_n u_n v) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(x, u_n) v dx = \langle \tilde{f}(\cdot, u_n), v \rangle_2 \end{aligned}$$

para cada $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Logo, $\langle -\Delta u_n + \lambda_n u_n - \tilde{f}(\cdot, u_n), v \rangle_2 = 0$ para todo $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, e portanto $\Delta u_n = \lambda_n u_n - \tilde{f}(x, u_n)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Agora, (3.1) implica que

$$|\Delta u_n| \leq \lambda_n |u_n| + |\tilde{f}(x, u_n)| \leq \lambda_0 |u_n| + K |u_n|. \quad (3.15)$$

Por (3.15), vemos que, se $\{u_n\} \subset L^p(B_R)$ para algum $p \in (1, \infty)$, então $g(\cdot, s) \in L^p(B_R)$ e pelo Teorema A.28, temos $\{u_n\} \subset W^{2,p}(B_R)$. Além disso, como a norma usual de $W^{2,p}(B_R)$ é equivalente a norma

$$\|u\|_p + \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_p, \quad u \in W^{2,p}(B_R)^1$$

e, pela estimativa de Calderon-Zygmund (Corolário A.2 do Apêndice A)

$$\left\| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_p^p \leq C(p) \|\Delta u_n\|_p^p \leq C(p)(\lambda_0 + K) \|u_n\|_p^p < \infty,$$

obtemos a seguinte desigualdade:

$$\|u_n\|_{W^{2,p}(B_R)} \leq C(p) \|u_n\|_p, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \quad (3.16)$$

Finalmente, vamos usar um argumento de “boot-strap” para mostrar que $\|u_n\|_\infty \rightarrow 0$.

Se $N \leq 3$ (isto é, $N = 2, 3$), quando $p = 2$ temos $2 = p > N/2$ e $W^{2,2}(B_R) \hookrightarrow L^\infty(B_R)$. Daí, por (3.16), obtemos diretamente

$$\|u_n\|_\infty \leq C \|u_n\|_{W^{2,2}(B_R)} \leq C(2) \|u_n\|_2, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e como $\|u_n\|_2 \rightarrow 0$, concluímos que $\|u_n\|_\infty \rightarrow 0$.

Se $N = 4$, quando $p = N/2 = 2$ temos $W^{2,2}(B_R) \hookrightarrow L^q(B_R)$ para todo $q > p = N/2 = 2$. Então, (3.16) é válida para todo $q > N/2$, e temos $W^{2,q}(B_R) \hookrightarrow L^\infty(B_R)$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n\|_\infty \leq C \|u_n\|_{W^{2,q}(B_R)} \leq C(q) \|u_n\|_q, \quad q > \frac{N}{2}$$

¹ver [4], Nota 9, p. 157

e escolhendo $q < 2^*$, devido a imersão $H^1(B_R) \hookrightarrow L^q(B_R)$, $2 < q < 2^*$, obtemos que $\|u_n\|_q \rightarrow 0$ e portanto $\|u_n\|_\infty \rightarrow 0$.

Se $N > 4$, quando $p = 2$ devemos ter $2 = p < N/2$, isto é, $1/p - 2/N > 0$ e temos $W^{2,2}(B_R) \hookrightarrow L^{q_1}(B_R)$ com $q_1 = (Np)/(N - 2p) = (2N)/(N - 4)$. Sabendo que $u_n \in H^2(B_R) = W^{2,2}(B_R)$, pela imersão anterior, deduzimos que $u_n \in L^{q_1}(B_R)$. Logo, (3.16) também é válida para o valor q_1 . Note também que

$$q_1 \geq \frac{N}{2} \Rightarrow N \leq 8$$

ou seja, $4 < N \leq 8$ (isto é, $N = 5, 6, 7, 8$). Logo, a imersão $W^{2,q_1}(B_R) \hookrightarrow L^\infty(B_R)$ é válida e por (3.16), obtemos para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|u_n\|_\infty &\leq C\|u_n\|_{W^{2,q_1}(B_R)} \leq C(q_1)\|u_n\|_{q_1} \\ &\leq C(q_1)\|u_n\|_{W^{2,2}(B_R)} \leq C(q_1, 2)\|u_n\|_2, \end{aligned}$$

donde segue que $\|u_n\|_\infty \rightarrow 0$.

Se $N > 8$, temos $q_1 = (2N)(N - 4) < N/2$, ou seja, $1/q_1 - 2/N > 0$ e temos $W^{2,q_1}(B_R) \hookrightarrow L^{q_2}(B_R)$, com $q_2 = (q_1 N)/(N - 2q_1)$. Pelo caso anterior, $u_n \in W^{2,q_1}(\mathbb{R}^N)$ e $u_n \in L^{q_2}(B_R)$. Logo, (3.16) também é válida para o valor q_2 . Note também que

$$q_2 = \frac{q_1 N}{N - 2q_1} \geq \frac{N}{2} \Rightarrow N \leq 12$$

ou seja, $8 < N \leq 12$ (isto é, $N = 9, 10, 11, 12$). Logo a imersão $W^{2,q_2}(B_R) \hookrightarrow L^\infty(B_R)$ é válida e por (3.16), obtemos para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|u_n\|_\infty &\leq C\|u_n\|_{W^{2,q_2}(B_R)} \leq C(q_2)\|u_n\|_{q_2} \\ &\leq C(q_2)\|u_n\|_{W^{2,q_1}(B_R)} \leq C(q_1, q_2)\|u_n\|_{q_1} \\ &\leq C(q_1, q_2)\|u_n\|_{W^{2,2}(B_R)} \leq C(2, q_1, q_2)\|u_n\|_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

donde segue que $\|u_n\|_\infty \rightarrow 0$.

Se $N > 12$, obtemos de modo análogo, que $\|u_n\|_\infty \rightarrow 0$ para $12 < N \leq 16$ (isto é, $N = 13, 14, 15, 16$), e após um número finito de passos, a dimensão N é atingida, donde concluímos que $\|u_n\|_\infty \rightarrow 0$ qualquer que seja a dimensão N , como queríamos demonstrar. ■

Observação 3.16 *O argumento de “boot-strap” utilizado no lema anterior é particularmente simples por causa da estimativa em (3.16). Esta estimativa foi consequência da escolha de $\tilde{f}$. Se considerarmos uma aproximação variacional clássica, onde a condição de Ambrosetti-Rabinowitz é válida, provar que a bifurcação em L^∞ ocorre é bem mais difícil (ver [2]).*

Portanto, pelo lema anterior, para todo $x \in B_R$, temos

$$|u_n(x)| \leq \|u_n\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Desde que B_R é arbitrária, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(x)| = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

e, a menos de subsequência, temos $u_n(x) \in [-\delta, \delta]$. Portanto, $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbb{R}^+ \times H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma seqüência bifurcante para $(3.1)_\lambda$. Isto finaliza a prova o Teorema 3.5.

Capítulo 4

Um problema semilinear com crescimento crítico em $\mathbb{R}^2$

4.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é estudar a existência de soluções positivas para uma classe de problemas elípticos semilineares em $\mathbb{R}^2$ utilizando o Método dos Multiplicadores de Lagrange. Mais precisamente, discutiremos o seguinte problema semilinear autônomo:

$$-\Delta u(x) + Ku(x) = f(u(x)), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.1)$$

onde $K > 0$ é uma constante.

Em relação a não-linearidade $f(s)$, consideremos a seguinte definição:

Definição 4.1 Dizemos que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem **crescimento crítico** em $+\infty$ se existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2}} = 0, \quad \text{para todo } \alpha > \alpha_0$$

e

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2}} = +\infty, \quad \text{para todo } \alpha < \alpha_0;$$

Exemplo 4.2 A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = te^{t^2}$ tem crescimento crítico com $\alpha_0 = 1$. De fato, se $\alpha > \alpha_0$ então $\alpha = 1 + \varepsilon$ com $\varepsilon > 0$ e portanto

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{te^{t^2}}{e^{\alpha t^2}} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{t}{e^{\varepsilon t^2}} = 0.$$

Se $\alpha < 1$ então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{te^{t^2}}{e^{\alpha t^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} te^{(1-\alpha)t^2} = +\infty$$

Assumiremos que a não-linearidade $f(s)$ satisfaça as seguintes condições:

- $h_1)$ $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f(s) = 0$ para $s \leq 0$;
 $h_2)$ $f(s) = o(s)$ quando $s \rightarrow 0$;
 $h_3)$ f tem crescimento crítico em $+\infty$;
 $h_4)$ Existe uma constante $\mu > 2$ tal que, para todo $s > 0$,

$$0 \leq \mu F(s) = \mu \int_0^s f(t) dt < s f(s);$$

- $h_5)$ A função $s \rightarrow f(s)/s$ é crescente para $s > 0$;
 $h_6)$ Existem $p > 2$ e $\delta > 0$ tais que, para todo $s > 0$,

$$f(s) \geq \left(\frac{p}{2} (S_p + \delta)^p \left(\frac{4\pi}{\alpha_0} \right)^{1-\frac{p}{2}} \right) s^{p-1}$$

onde

$$S_p = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}} \frac{\left[\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + K u^2) dz \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\int_{\mathbb{R}^2} |u|^p dz \right]^{\frac{1}{p}}}. \quad (4.2)$$

Uma solução clássica do problema (4.1) é uma função $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ que satisfaz a equação para todo ponto $x \in \mathbb{R}^2$. Já uma solução fraca para (4.1) é uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ que satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + K u v) dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(u) v dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

O funcional energia $I : H^1(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ associado a equação (4.1) é dado por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} [|\nabla u|^2 + K u^2] dx - \int_{\mathbb{R}^2} F(u) dx, \quad \text{onde } F(s) = \int_0^s f(t) dt.$$

Além disso, o funcional I é de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^2)$ (veja Lema A.9 do Apêndice A) e seus pontos críticos correspondem exatamente as soluções fracas de (4.1).

Dizemos ainda que $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ é uma solução de energia mínima para (4.1) se $I(u_0) \leq I(u)$ para toda solução fraca $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

O resultado principal deste capítulo é o seguinte:

Teorema 4.3 *Suponha que a não-linearidade f satisfaça (h_1) – (h_6) . Então o problema (4.1) possui uma solução de energia mínima positiva ω no nível*

$$c = I(\omega) = \inf_{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I(tv) < \frac{4\pi}{\alpha_0}.$$

Além disso, ω é esfericamente simétrica em torno de algum ponto de $\mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial \omega}{\partial r}$ é negativa para todo $r > 0$, onde r é a coordenada radial em relação ao ponto.

A simetria radial para qualquer solução ω do problema (4.1) segue por um argumento encontrado em Berestycki-Lions, (veja [3], pag. 321) que afirma que se $g'(0) < 0$ e $\hat{g}(s) = g(s) - g'(0)s$ é uma função crescente, onde

$$-\Delta\omega = g(\omega) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2$$

com

$$g(\omega(x)) := f(\omega(x)) - K\omega(x), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

então, qualquer solução positiva de (4.1) é esfericamente simétrica em torno de algum ponto de $\mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial\omega}{\partial r}$ é negativa para todo $r > 0$, onde r é a coordenada radial em relação ao ponto.

4.2 Estimativas sobre a função $e^{\alpha u^2}$

Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^2$. Pela desigualdade de Trudinger-Moser (veja, por exemplo, [17, 23]), para todo $\alpha > 0$ e $u \in H_0^1(\Omega)$, temos que

$$e^{\alpha u^2} \in L^1(\Omega)$$

e existe uma constante C tal que

$$\sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \int_{\Omega} e^{\alpha u^2} \leq C|\Omega|, \quad \text{se } \alpha \leq 4\pi.$$

Usamos e provamos aqui a seguinte extensão do resultado anterior para todo o espaço $\mathbb{R}^2$ obtido por Cao [6]:

Lema 4.4 *Se $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e $\alpha > 0$ então*

$$\int_{\mathbb{R}^2} [e^{\alpha u^2} - 1] dx < \infty.$$

Além disso, se $\|\nabla u\|_2 \leq 1$, $\|u\|_2 \leq M$ e $\alpha < 4\pi$, então existe uma constante C , que depende apenas de α e M , tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} [e^{\alpha u^2} - 1] dx \leq C.$$

Prova. Podemos assumir $u \geq 0$, desde que $|\nabla|u|| = |\nabla u|$. Usaremos o método de simetrização de Schwarz. Como, para $s \geq 0$ a função $G(s) = e^{\alpha s^2} - 1$ é contínua, crescente e $G(0) = 0$, podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^2} [e^{\alpha u^2} - 1] dx = \int_{\mathbb{R}^2} [e^{\alpha (u^*)^2} - 1] dx$$

onde u^* é a simetrizada de Schwarz da função u . Para um determinado $R > 1$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} [e^{\alpha (u^*)^2} - 1] dx &= \int_{|x| < R} [e^{\alpha (u^*)^2} - 1] dx + \int_{|x| \geq R} [e^{\alpha (u^*)^2} - 1] dx \\ &\leq \int_{|x| < R} e^{\alpha (u^*)^2} dx + \int_{|x| \geq R} [e^{\alpha (u^*)^2} - 1] dx \end{aligned}$$

Consideremos $v(x) = u^*(x) - u^*(Rx_0)$, onde x_0 é um vetor fixo unitário em $\mathbb{R}^2$. Note que $v \in H_0^1(B_R(0))$, pois $v \in H^1(B_R(0))$ e se $x \in \partial B_R(0)$ temos $|x| = R = |Rx_0|$. Desde que u^* é decrescente como função de $|x|$ devemos ter $u^*(x) = u^*(Rx_0)$, ou seja, $v(x) = 0$, para todo $x \in \partial B_R(0)$, e portanto, $v \in H_0^1(B_R(0))$. Além disso,

$$(u^*)^2 = [v + u^*(Rx_0)]^2 = v^2 + 2vu^*(Rx_0) + u^*(Rx_0)^2.$$

Dado $\varepsilon > 0$, temos

$$vu^*(Rx_0) = (v^2)^{1/2}(u^*(Rx_0)^2)^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{2}v^2 + \frac{1}{2\varepsilon}u^*(Rx_0)^2,$$

donde

$$(u^*)^2 \leq v^2 + \varepsilon v^2 + \frac{1}{\varepsilon}u^*(Rx_0)^2 + u^*(Rx_0)^2.$$

Assim,

$$(u^*)^2 \leq (1 + \varepsilon)v^2 + K(\varepsilon)u^*(Rx_0)^2,$$

onde $K(\varepsilon) = 1/\varepsilon + 1$. Portanto,

$$\int_{|x|<R} e^{\alpha(u^*)^2} dx \leq \int_{|x|<R} e^{\alpha[(1+\varepsilon)v^2 + K(\varepsilon)u^*(Rx_0)^2]} dx = e^{\alpha K(\varepsilon)u^*(Rx_0)^2} \int_{|x|<R} e^{\alpha(1+\varepsilon)v^2} dx$$

e pela desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser (veja Teorema A.24 do Apêndice A),

$$\int_{|x|<R} e^{\alpha(u^*)^2} dx < \infty, \quad \forall u \in H^1(B_R(0)), \quad \forall \alpha > 0. \quad (4.3)$$

Tomando $\varepsilon > 0$ tal que $(1+\varepsilon)\alpha < 4\pi$ e observando que $\|\nabla v\|_2 = \|\nabla u^*\|_2 \leq \|\nabla u\|_2 \leq 1$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{|x|<R} e^{\alpha(u^*)^2} &\leq e^{K(\alpha,\varepsilon)u^*(Rx_0)^2} \int_{|x|<R} e^{\alpha(1+\varepsilon)v^2} dx \\ &\leq C|B_R(0)|e^{K(\alpha,\varepsilon)u^*(Rx_0)^2} = C\pi R^2 e^{K(\alpha,\varepsilon)u^*(Rx_0)^2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Pelo Lema Radial A.4 do Apêndice A,

$$|u^*(x)| \leq |x|^{-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\|u^*\|_2, \quad \forall x \neq 0$$

e para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $\|\nabla u\|_2 \leq 1$ e $\|u\|_2 \leq M$, obtemos

$$u^*(Rx_0)^2 \leq |Rx_0|^{-2}\pi^{-1}\|u^*\|_2^2 \leq \frac{M^2}{\pi R^2}.$$

Logo, pela desigualdade (4.4), segue que

$$\int_{|x|<R} e^{\alpha(u^*)^2} \leq C\pi R^2 e^{\frac{K(\alpha,\varepsilon)M^2}{\pi R^2}}. \quad (4.5)$$

Por outro lado, temos

$$e^{\alpha(u^*)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\alpha(u^*)^2]^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} (u^*)^{2k}$$

e isto implica que

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq R} [e^{\alpha(u^*)^2} - 1] dx &= \alpha \int_{|x| \geq R} (u^*)^2 dx + \int_{|x| \geq R} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} (u^*)^{2k} dx \\ &= \alpha \int_{|x| \geq R} (u^*)^2 dx + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \int_{|x| \geq R} (u^*)^{2k} dx. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Agora, temos a seguinte estimativa válida para todo número natural $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq R} \frac{1}{|x|^{2k}} dx &= 2\pi \int_R^{\infty} \frac{\rho}{\rho^{2k}} d\rho = 2\pi \int_R^{\infty} \rho^{1-2k} d\rho \\ &= \frac{2\pi}{2-2k} \left[\left(\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{2-2k} \right) - R^{2-2k} \right] \\ &= \frac{\pi R^2}{(2k-2)R^{2k}} \leq \frac{2\pi R^2}{R^{2k}}. \end{aligned}$$

Desta última estimativa e do Lema Radial A.3 do Apêndice A concluímos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \int_{|x| \geq R} (u^*)^{2k} dx &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \int_{|x| \geq R} \left[|x|^{-1} \pi^{-\frac{1}{2}} \|u^*\|_2 \right]^{2k} dx \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \left\{ \pi^{-\frac{1}{2}} \|u^*\|_2 \right\}^{2k} \int_{|x| \geq R} \frac{1}{|x|^{2k}} dx \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \left\{ \pi^{-\frac{1}{2}} \|u^*\|_2 \right\}^{2k} \frac{2\pi R^2}{R^{2k}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \int_{|x| \geq R} (u^*)^{2k} dx \leq 2\pi R^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \left\{ \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\|u^*\|_2}{R} \right\}^{2k} \quad (4.7)$$

e finalmente, por (4.3), (4.6) e (4.7), para todo $\alpha > 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} [e^{\alpha u^2} - 1] dx &= \int_{\mathbb{R}^2} [e^{\alpha(u^*)^2} - 1] dx \leq \int_{|x| < R} [e^{\alpha(u^*)^2}] dx + \int_{|x| \geq R} [e^{\alpha(u^*)^2} - 1] dx \\ &\leq \int_{|x| < R} [e^{\alpha(u^*)^2}] dx + \alpha \int_{|x| \geq R} (u^*)^2 dx + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \int_{|x| \geq R} (u^*)^{2k} dx \\ &< \infty, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^2} [e^{\alpha u^2} - 1] dx \in L^1(\mathbb{R}^2).$$

Além disso, no caso em que $\alpha < 4\pi$, $\|u\|_2 \leq M$ e $\|\nabla u\|_2 \leq 1$, escolhendo $R = M\pi^{-\frac{1}{2}}$,

temos

$$\begin{aligned}
\int_{|x| \geq R} [e^{\alpha(u^*)^2} - 1] dx &\leq \alpha \int_{|x| \geq R} (u^*)^2 dx + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \int_{|x| \geq R} (u^*)^{2k} dx \\
&\leq \alpha M^2 + 2\pi (M\pi^{-\frac{1}{2}})^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \left\{ \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{M}{M\pi^{-\frac{1}{2}}} \right\}^{2k} \\
&\leq 2 \cdot 4\pi M^2 + 2M^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(4\pi)^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2M^2 \frac{(4\pi)^k}{k!} = 2M^2 e^{4\pi}.
\end{aligned}$$

Aplicando o mesmo valor de R em (4.5), obtém-se

$$\int_{|x| < R} e^{\alpha(u^*)^2} dx \leq C\pi M^2 \pi^{-1} e^{\frac{M^2}{\pi} \frac{K(\alpha, \varepsilon)}{M^2 \pi^{-1}}} = CM^2 e^{K(\alpha, \varepsilon)},$$

e das duas últimas desigualdades, concluímos o seguinte

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} [e^{\alpha u^2} - 1] dx &\leq \int_{|x| < R} [e^{\alpha(u^*)^2}] dx + \int_{|x| \geq R} [e^{\alpha(u^*)^2} - 1] dx \\
&\leq 2M^2 e^{4\pi} + CM^2 e^{K(\alpha, \varepsilon)} := \tilde{C}.
\end{aligned}$$

Isto finaliza a prova do lema. ■

O lema subsequente, bem como a próxima observação, são fundamentais para mostrar, por exemplo, que o funcional I está bem definido.

Lema 4.5 *Sejam $\beta > 0$ e $r > 1$. Então para cada $\alpha > r$ existe uma constante positiva $C = C(\alpha)$ tal que para todo $s \in \mathbb{R}$*

$$(e^{\beta s^2} - 1)^r \leq C(e^{\alpha \beta s^2} - 1).$$

Em particular, se $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ então $(e^{\beta u^2} - 1)^r \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Prova. Desde que $r > 1$ temos

$$\lim_{s \rightarrow 0} (e^{\beta s^2} - 1)^r = \lim_{s \rightarrow 0} (e^{\alpha \beta s^2} - 1) = 0.$$

Então, pela Regra de L'Hospital, obtemos

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{(e^{\beta s^2} - 1)^r}{e^{\alpha \beta s^2} - 1} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r(e^{\beta s^2} - 1)^{r-1} e^{\beta s^2}}{\alpha e^{\alpha \beta s^2}} = 0.$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned}
\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{[e^{\beta s^2} - 1]^r}{e^{\alpha \beta s^2} - 1} &= \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{[e^{\beta s^2} (1 - e^{-\beta s^2})]^r}{e^{\alpha \beta s^2} (1 - e^{-\alpha \beta s^2})} = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{e^{r\beta s^2} (1 - e^{-\beta s^2})^r}{e^{\alpha \beta s^2} (1 - e^{-\alpha \beta s^2})} \\
&= \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{(1 - e^{-\beta s^2})^r}{(1 - e^{-\alpha \beta s^2})} e^{(r-\alpha)\beta s^2} = 0,
\end{aligned}$$

desde que $\alpha > r$. As duas últimas estimativas juntamente com a continuidade da função exponencial implicam na desigualdade desejada. ■

Observação 4.6 Como consequência dos Lemas 4.4, 4.5 e da desigualdade de Hölder, temos que, se $\beta > 0$ e $q > 0$ então a função $|u|^q(e^{\beta u^2} - 1)$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^2)$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

De fato, consideremos $r > 1$ tal que $qs \geq 2$ com $s = r/(r - 1)$. Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |u|^q (e^{\beta u^2} - 1) dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{qs} dx \right)^{\frac{1}{s}} \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta u^2} - 1)^r dx \right]^{\frac{1}{r}} \\ &= \|u\|_{qs}^q \left(\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta u^2} - 1)^r dx \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Daí, tomando $\alpha > r$, pelos lemas 4.4, 4.5 e pela imersão $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$, $2 \leq p < \infty$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^q (e^{\beta u^2} - 1) dx \leq C \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha \beta u^2} - 1) dx \right]^{\frac{1}{r}} \|u\|_{qs}^q < \infty,$$

ou seja, $|u|^q(e^{\beta u^2} - 1) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

4.3 Minimização sobre uma variedade

Encontrar uma solução fraca para o problema (4.1) equivale a determinar um ponto crítico não-trivial para o funcional energia $I : H^1(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(u) dx$$

onde $F(u) = \int_0^u f(t) dt$ e $\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} [|\nabla u|^2 + Ku^2] dx$.

Lema 4.7 O funcional I , acima, está bem definido.

Prova. De fato, como a primeira parte do funcional I corresponde a norma do espaço $H^1(\mathbb{R}^2)$, basta mostrarmos que $\int_{\mathbb{R}^2} F(u) dx < \infty$.

Inicialmente observamos que, pelas hipóteses (h_2) - (h_4) , dado $\varepsilon > 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$ e $\beta > \alpha_0$ obtemos

$$F(s) \leq \varepsilon s^2 + cs^q [e^{\beta s^2} - 1]. \quad (4.8)$$

Com efeito, por (h_3) , para todo $\beta > \alpha_0$ temos

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s^p [e^{\beta s^2} - 1]} = 0, \quad p \geq 0.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $B > 0$ tal que

$$f(s) \leq \varepsilon s^p [e^{\beta s^2} - 1], \quad \text{se } |s| > B$$

e por (h_4) , para todo $q \geq 1$ tem-se

$$F(s) \leq \frac{s}{\mu} f(s) \leq \varepsilon s^{p+1} [e^{\beta s^2} - 1] = \varepsilon s^q [e^{\beta s^2} - 1], \quad \text{se } |s| > B. \quad (4.9)$$

Por outro lado, utilizando a hipótese (h_2) e a regra de L'Hospital segue que $\lim_{s \rightarrow 0} [F(s)/s^2] = 0$. Daí, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$F(s) \leq \varepsilon s^2 \quad \text{se } |s| < \delta. \quad (4.10)$$

Finalmente, usando a continuidade de F no compacto $[\delta, B]$, obtemos para todo $q \geq 1$,

$$F(s) \leq \left(\sup_{s \in [\delta, B]} \frac{F(s)}{s^q [e^{\beta s^2} - 1]} \right) s^q [e^{\beta s^2} - 1], \quad s \in [\delta, B]. \quad (4.11)$$

Por (4.9), (4.10) e (4.11) chegamos a conclusão desejada em (4.8).

Além disso, sendo $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(u) dx \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} u^2 + c \int_{\mathbb{R}^2} u [e^{\beta u^2} - 1] dx \leq C_1 \|u\|^2 + c \int_{\mathbb{R}^2} u [e^{\beta u^2} - 1] dx.$$

Portanto, pela Observação 4.6, $u[e^{\beta u^2} - 1] \in L^1(\mathbb{R}^2)$, donde segue que $\int_{\mathbb{R}^2} F(u) dx < \infty$, ou seja, I está bem definido. ■

A técnica aqui utilizada para determinarmos a existência de pontos críticos para o funcional $I : H^1(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ será o método dos multiplicadores de Lagrange. Para isto, introduzimos a seguinte variedade:

$$M = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}; \int_{\mathbb{R}^2} F(u) dx = \frac{K}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx \right\}$$

e consideremos o número

$$I^0 = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx; u \in M \right\}. \quad (4.12)$$

Primeiramente, precisamos verificar que $M \neq \emptyset$. Para este fim, vamos usar o seguinte lema:

Lema 4.8 *Existe uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$ positiva satisfazendo*

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(u) dx > \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + K u^2) dx.$$

Prova. Pela definição de S_p dada em (4.2), existe $u_\delta \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$ tal que

$$S_p + \frac{\delta}{2} > \frac{\left[\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_\delta|^2 + K u_\delta^2) dz \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\int_{\mathbb{R}^2} |u_\delta|^p dz \right]^{\frac{1}{p}}}.$$

Seja

$$v_\delta = \left(\frac{4\pi}{\alpha_0}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{|u_\delta|}{\left[\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_\delta|^2 + K u_\delta^2) dx\right]^{\frac{1}{2}}} = \lambda |u_\delta|.$$

Recordando que $|\nabla|u|| = |\nabla u|$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v_\delta|^2 + K v_\delta^2) dx = \left(\frac{4\pi}{\alpha_0}\right) \frac{\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_\delta|^2 + K u_\delta^2) dx}{\left[\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_\delta|^2 + K u_\delta^2) dx\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{4\pi}{\alpha_0}$$

o que implica que $v_\delta \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$. Desde que

$$\frac{\left[\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v_\delta|^2 + K v_\delta^2) dz\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\int_{\mathbb{R}^2} |v_\delta|^p dz\right]^{\frac{1}{p}}} = \frac{\lambda \left[\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_\delta|^2 + K u_\delta^2) dz\right]^{\frac{1}{2}}}{\lambda \left[\int_{\mathbb{R}^2} |u_\delta|^p dz\right]^{\frac{1}{p}}} = \frac{\left[\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_\delta|^2 + K u_\delta^2) dz\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\int_{\mathbb{R}^2} |u_\delta|^p dz\right]^{\frac{1}{p}}},$$

temos também que

$$S_p + \frac{\delta}{2} > \frac{\left[\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v_\delta|^2 + K v_\delta^2) dz\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\int_{\mathbb{R}^2} |v_\delta|^p dz\right]^{\frac{1}{p}}} = \frac{\left(\frac{4\pi}{\alpha_0}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^2} v_\delta^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^2} v_\delta^p dx > \frac{\left(\frac{4\pi}{\alpha_0}\right)^{\frac{p}{2}}}{\left(S_p + \frac{\delta}{2}\right)^p}$$

e por (h_6) ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} F(v_\delta) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{v_\delta} f(s) ds dx \geq \left(\frac{p}{2}(S_p + \delta)^p \left(\frac{4\pi}{\alpha_0}\right)^{1-\frac{p}{2}}\right) \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{v_\delta} s^{p-1} ds dx \\ &= \left(\frac{p}{2}(S_p + \delta)^p \left(\frac{4\pi}{\alpha_0}\right)^{1-\frac{p}{2}}\right) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{v_\delta^p}{p} dx \\ &= \left(\frac{1}{2}(S_p + \delta)^p \left(\frac{4\pi}{\alpha_0}\right)^{1-\frac{p}{2}}\right) \int_{\mathbb{R}^2} v_\delta^p dx \\ &> \frac{1}{2}(S_p + \frac{\delta}{2})^p \left(\frac{4\pi}{\alpha_0}\right)^{1-\frac{p}{2}} \left(\frac{4\pi}{\alpha_0}\right)^{\frac{p}{2}} \left(S_p + \frac{\delta}{2}\right)^{-p} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{\alpha_0}\right) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v_\delta|^2 + K v_\delta^2) dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(v_\delta) dx > \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v_\delta|^2 + K v_\delta^2) dx. \quad (4.13)$$

■

Lema 4.9 *O conjunto M , definido acima, é não-vazio. Além disso,*

$$0 < I^0 \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_\delta|^2 dx < \frac{4\pi}{\alpha_0}.$$

Prova. Inicialmente, mostremos que existe $t \in (0, 1]$ tal que $tv_\delta \in M$. De fato, por (4.13)

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(v_\delta) dx > \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v_\delta|^2 + K v_\delta^2) dx > \frac{K}{2} \int_{\mathbb{R}^2} v_\delta^2 dx$$

o que implica que

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(v_\delta) dx - \frac{K}{2} \int_{\mathbb{R}^2} v_\delta^2 dx > 0.$$

Agora, para $t \in (0, 1]$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(tv_\delta) dx - \frac{K}{2} \int_{\mathbb{R}^2} t^2 v_\delta^2 dx = t^2 \left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(tv_\delta)}{t^2} dx - \frac{K}{2} \int_{\mathbb{R}^2} v_\delta^2 dx \right].$$

Mostremos agora o seguinte limite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(tv_\delta)}{t^2} dx = 0.$$

Com efeito, como já foi visto anteriormente, temos

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(s)}{s^2} = 0,$$

donde segue que,

$$\frac{F(tv_\delta)}{t^2 v_\delta^2} v_\delta^2 = \frac{F(tv_\delta)}{t^2} \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow 0.$$

Por (4.8) e pela Observação 4.6,

$$\frac{F(tv_\delta)}{t^2} \leq \varepsilon v_\delta^2 + c v_\delta^2 [e^{\beta t^2 v_\delta^2} - 1] \leq \varepsilon v_\delta^2 + c v_\delta^2 [e^{\beta v_\delta^2} - 1] \in L^1(\mathbb{R}^2).$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(tv_\delta)}{t^2} dx = 0.$$

A convergência acima nos diz que existe $t_0 \in (0, 1)$ suficientemente pequeno tal que

$$t_0^2 \left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(t_0 v_\delta)}{t_0^2} dx - \frac{K}{2} \int_{\mathbb{R}^2} v_\delta^2 dx \right] < 0.$$

Então, definindo

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}^2} F(tv_\delta) dx - \frac{K t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} v_\delta^2 dx, \quad t \in (0, 1],$$

temos

$$H(1) = \int_{\mathbb{R}^2} F(v_\delta) dx - \frac{K}{2} \int_{\mathbb{R}^2} v_\delta^2 dx > 0$$

e

$$H(t_0) = \int_{\mathbb{R}^2} F(t_0 v_\delta) dx - \frac{K}{2} \int_{\mathbb{R}^2} t_0^2 v_\delta^2 dx = t_0^2 \left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(t_0 v_\delta)}{t_0^2} dx - \frac{K}{2} \int_{\mathbb{R}^2} v_\delta^2 dx \right] < 0.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t \in (0, 1]$ tal que $H(t) = 0$, ou equivalentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(tv_\delta) dx = \frac{K}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (tv_\delta)^2 dx,$$

ou seja, existe $t \in (0, 1]$ tal que $tv_\delta \in M$ e $M \neq \emptyset$. Além disso,

$$I^0 \leq \frac{I^0}{t^2} \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_\delta|^2 = \frac{4\pi}{\alpha_0} - K \int_{\mathbb{R}^2} v_\delta^2 dx < \frac{4\pi}{\alpha_0}.$$

Para concluir nossa demonstração, basta provarmos que $I^0 > 0$. De fato, suponha, por contradição, que $I^0 = 0$. Então existe uma seqüência $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(u_n) dx = \frac{K}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u_n^2 dx \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n|^2 dx = 0.$$

Por (4.8), para todo $s \in \mathbb{R}$ temos

$$F(s) \leq \frac{K}{4} s^2 + cs[e^{\beta s^2} - 1].$$

Observemos também que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u_n| [e^{\beta u_n^2} - 1] dx = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} |u_n|^{2k+1} dx.$$

A seqüência das somas parciais $s_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\beta^k}{k!} |u_n|^{2k+1}$ está contida em $L^1(\mathbb{R}^2)$ pois, pela inequação de Gagliardo-Nirenberg (veja Corolário A.6 do Apêndice A), temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{2k+1} dx \leq CC_1^k \|\nabla u\|_2^{2k-1} \|u\|_2^2 < \infty.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Monótona de Beppo Levi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} \int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^{2k+1} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} s_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} |u_n|^{2k+1} dx, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u_n| [e^{\beta u_n^2} - 1] dx = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} |u_n|^{2k+1} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} \int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^{2k+1} dx.$$

Usando novamente a inequação de Gagliardo-Nirenberg, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |u_n| [e^{\beta u_n^2} - 1] dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} \int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^{2k+1} dx \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} C C_1^k \|\nabla u_n\|_2^{2k-1} \|u_n\|_2^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\beta C_1)^k}{k!} \|\nabla u_n\|_2^{2k-2} C \|\nabla u_n\|_2 \|u_n\|_2^2 \\
&= C \|\nabla u_n\|_2 \|u_n\|_2^2
\end{aligned}$$

pois a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\beta C_1)^k}{k!} \|\nabla u_n\|_2^{2k-2}$ converge. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u_n| [e^{\beta u_n^2} - 1] dx \leq C \|\nabla u_n\|_2 \|u_n\|_2^2 \quad (4.14)$$

donde obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{K}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u_n^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^2} F(u_n) dx \leq \frac{K}{4} \int_{\mathbb{R}^2} u_n^2 dx + c \int_{\mathbb{R}^2} |u_n| [e^{\beta u_n^2} - 1] dx \\
&\leq \frac{K}{4} \int_{\mathbb{R}^2} u_n^2 dx + C \|\nabla u_n\|_2 \|u_n\|_2^2.
\end{aligned}$$

Então,

$$C \|\nabla u_n\|_2 \|u_n\|_2^2 \geq \frac{K}{4} \int_{\mathbb{R}^2} u_n^2 dx$$

o que implica que

$$\|\nabla u_n\|_2 \geq \frac{K}{4C} > 0$$

o que é uma contradição, pois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n|^2 dx = 0.$$

Isto conclui a prova do nosso lema. ■

Lema 4.10 *Existe $u \in M$ tal que $I^0 = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx$, ou seja, I^0 é atingido.*

Prova. Seja $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$ uma sequência minimizante de I^0 . Então

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(u_n) dx = \frac{K}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u_n^2 dx \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n|^2 dx = I^0.$$

Além disso, tomando $\tilde{u}_n(x) = u_n(\sigma_n x)$ onde $\sigma_n = \|u_n\|_2$ e $x = (x_1, x_2)$, temos

$$\|\tilde{u}_n\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} u_n^2(\sigma_n x) dx = \frac{1}{\sigma_n^2} \int_{\mathbb{R}^2} u_n^2(y) dy = 1,$$

$$\begin{aligned}
\|\nabla \tilde{u}_n\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \tilde{u}_n(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_1}(x) \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_2}(x) \right)^2 \right] dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_1}(\sigma_n x) \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_2}(\sigma_n x) \right)^2 \right] dx = \sigma_n^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(\sigma_n x)|^2 dx \\
&= \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(y)|^2 dy = \|\nabla u_n\|_2^2
\end{aligned}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(\tilde{u}_n(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^2} F(u_n(\sigma_n x)) dx = \frac{1}{\sigma_n^2} \frac{K}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u_n^2(y) dy = \frac{K}{2} > 0.$$

As duas primeiras igualdades mostram que $\|\tilde{u}_n\|$ é limitada. Então, a menos de subsequência, podemos assumir que $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$, $\tilde{u}_n(x) \rightarrow \tilde{u}(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^2$ e $\|\nabla \tilde{u}_n\|_2^2 = \|\nabla u_n\|_2^2 < 4\pi/\alpha_0$. Afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} F(\tilde{u}_n) dx = \int_{\mathbb{R}^2} F(\tilde{u}) dx. \quad (4.15)$$

Para mostrarmos este fato, usamos simetrização de Schwarz. Podemos assumir que $\tilde{u}_n(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$ (pois estamos a procura de soluções positivas e $f(s) = 0$ quando $s < 0$). Como $F(s)$ é uma função crescente (pois por (h_4) , $F'(s) = f(s) \geq 0$ para todo $s \geq 0$) e $F(0) = 0$ então, pelo Teorema A.17 do Apêndice A,

$$\int_{\{|x| \geq R\}} F(\tilde{u}_n) dx = \int_{\{|x| \geq R\}} F(\tilde{u}_n^*) dx$$

onde $\tilde{u}_n^*$ denota a simetrização de Schwarz de $\tilde{u}_n$. Pelas hipóteses (h_2) e (h_3) , dado $\eta_1 > 0$, existem $\rho_1, \rho_2 > 0$ tais que

$$F(s) \leq \eta_1 s^2 \quad \text{sempre que } |s| < \rho_1 \quad (4.16)$$

e

$$F(s) \leq \eta_1 s^2 [e^{\beta s^2} - 1] \quad \text{sempre que } |s| \geq \rho_2, \quad (4.17)$$

onde $\beta > \alpha_0$ é um número a ser determinado. Pelo Lema Radial A.3 do Apêndice A, $\tilde{u}_n^*(x) = U_n(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^2$, onde $U_n(x)$ é contínua para $x \neq 0$ e

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}_n^*(x)|^2 &\leq C \frac{\|\tilde{u}_n^*\|^2}{|x|} = C \frac{\|\tilde{u}_n^*\|_2^2 + \|\nabla \tilde{u}_n^*\|_2^2}{|x|} \\
&\leq C \frac{\|u_n\|_2^2 + \|\nabla u_n\|_2^2}{|x|} = C \frac{\|u_n\|^2}{|x|} \leq C_2 \frac{1}{|x|}
\end{aligned}$$

o que implica em

$$|\tilde{u}_n^*(x)| \leq C_2 \frac{1}{\sqrt{|x|}}. \quad (4.18)$$

Agora, por (4.16), (4.17) e (4.18), para todo $\eta > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\int_{\{|x| \geq R\}} F(\tilde{u}_n) dx = \int_{\{|x| \geq R\}} F(\tilde{u}_n^*) dx < \eta. \quad (4.19)$$

De fato, por (4.16) e (4.17), dado $\eta_1 > 0$, existe $C > 0$ tal que, para todo $s \geq 0$, temos

$$F(s) \leq \frac{\eta_1}{2}s^2 + \tilde{C}s^2[e^{\beta s^2} - 1].$$

Além disso, existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$\int_{|x| \geq R} [e^{2\beta u_n^2} - 1] u_n^2 dx \leq \frac{C_3}{R}, \quad R > 0.$$

Com efeito, novamente pelo Teorema A.17 do Apêndice A, temos

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq R} [e^{2\beta u_n^2} - 1] u_n^2 dx &= \int_{|x| \geq R} [e^{2\beta (u_n^*)^2} - 1] (u_n^*)^2 dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\beta)^k}{k!} \int_{|x| \geq R} (u_n^*)^{2k+2} dx. \end{aligned}$$

Desde que $\|u_n^*\|_2 = \|u_n\|_2 \leq C$, de acordo com (4.18), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq R} (u_n^*)^{2k+2} dx &\leq (C_2)^{2k+2} \int_{|x| \geq R} \frac{1}{|x|^{k+1}} dx \\ &= \pi (C_2)^{2k+2} \frac{1}{R^k} \quad \text{para todo } k \geq 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq R} F(\tilde{u}_n^*) dx &\leq \frac{\eta_1}{2} \int_{|x| \geq R} (\tilde{u}_n^*)^2 dx + C \int_{|x| \geq R} (\tilde{u}_n^*)^2 [e^{\beta (\tilde{u}_n^*)^2} - 1] dx \\ &\leq \frac{\eta_1}{2} \int_{|x| \geq R} (\tilde{u}_n^*)^2 dx + \frac{\pi C C_2^2}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\beta C_2^2)^k}{k!} \end{aligned}$$

e como $\eta_1 > 0$, $R > 0$ são arbitrários, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\beta C_2^2)^k}{k!}$ converge e $\int_{|x| \geq R} (\tilde{u}_n^*)^2 dx < \infty$, dado $\eta > 0$, obtemos

$$\int_{|x| \geq R} F(\tilde{u}_n^*) dx < \eta$$

para $R > 0$ suficientemente grande, e isto prova nossa afirmação.

Seja $A \subset \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < R\}$ um conjunto mensurável a Lebesgue. Usando (4.16) e (4.17) temos

$$F(s) \leq \eta_1 s^2 + \eta_1 s [e^{\beta s^2} - 1] + \sup_{\rho_1 \leq |s| \leq \rho_2} F(s)$$

para todo $s \geq 0$, donde segue que

$$\begin{aligned} \int_A F(\tilde{u}_n) dx &\leq \eta_1 \int_A |\tilde{u}_n|^2 dx + \eta_1 \int_A |\tilde{u}_n| [e^{\beta \tilde{u}_n^2} - 1] dx + \int_A \sup_{\rho_1 \leq |s| \leq \rho_2} F(s) dx \\ &= \eta_1 \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}_n|^2 dx + \eta_1 \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}_n| [e^{\beta \tilde{u}_n^2} - 1] dx + |A| \sup_{\rho_1 \leq |s| \leq \rho_2} F(s). \end{aligned}$$

Tomando $\gamma > r$, $r > 1$ e $s = r/(r - 1)$ temos, pela Observação (4.6),

$$\begin{aligned} \int_A F(\tilde{u}_n) dx &\leq \eta_1 \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}_n^2| dx + \eta_1 C \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\gamma \tilde{u}_n^2} - 1) dx \right]^{\frac{1}{r}} \|\tilde{u}_n\|_s + |A| \sup_{\rho_1 \leq |s| \leq \rho_2} F(s) \\ &= \eta_1 \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}_n^2| dx + \eta_1 C \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\xi \tilde{u}_n^2} - 1) dx \right]^{\frac{1}{r}} \|\tilde{u}_n\|_s + |A| S. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Mas,

$$\int_{\mathbb{R}^2} [e^{\xi \tilde{u}_n^2} - 1] dx = \int_{\mathbb{R}^2} [e^{\xi \|\nabla \tilde{u}_n\|_2^2 \frac{\tilde{u}_n}{\|\nabla \tilde{u}_n\|_2} - 1} dx$$

e notando que

$$\left\| \frac{\tilde{u}_n}{\|\nabla \tilde{u}_n\|_2} \right\|_2 = \frac{1}{\|\nabla \tilde{u}_n\|_2} \leq M,$$

pois $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla \tilde{u}_n\|_2^2 = I^0 > 0$, temos

$$\left\| \nabla \left(\frac{\tilde{u}_n}{\|\nabla \tilde{u}_n\|_2} \right) \right\|_2 = 1.$$

Como $\alpha_0 \|\nabla \tilde{u}_n\|_2^2 < 4\pi$, podemos escolher $\xi > \alpha_0$ suficientemente próximo de α_0 , tal que $\xi \|\nabla \tilde{u}_n\|_2^2 < 4\pi$. Logo, pelo Lema 4.4, existe uma constante $C(\xi, M)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} [e^{\xi \tilde{u}_n^2} - 1] dx = \int_{\mathbb{R}^2} [e^{\xi \|\nabla \tilde{u}_n\|_2^2 \frac{\tilde{u}_n}{\|\nabla \tilde{u}_n\|_2} - 1} dx < C(\xi, M).$$

Assim, pela estimativa (4.20), temos

$$\int_A F(\tilde{u}_n) dx < \eta \quad (4.21)$$

se $|A|$ é suficientemente pequena. Em vista de (4.19) e (4.21), segue aplicando o Teorema de Convergência de Vitali que $F(\tilde{u}_n) \rightarrow F(\tilde{u})$ em $L^1(\mathbb{R}^2)$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} F(\tilde{u}_n) dx = \int_{\mathbb{R}^2} F(\tilde{u}) dx,$$

o que prova nossa afirmação.

Vamos concluir agora a demonstração do lema, ou seja, vamos mostrar que

$$I^0 = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \tilde{u}|^2 dx.$$

De fato, como $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$ (e portanto $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$), temos que $\|\cdot\|$ é fracamente semicontínua inferiormente, donde segue que

$$\begin{aligned} \frac{K}{2} \|\tilde{u}\|_2^2 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{K}{2} \|\tilde{u}_n\|_2^2 \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_n\|_2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{K}{2} \|\tilde{u}_n\|_2^2 \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} F(\tilde{u}_n) dx = \int_{\mathbb{R}^2} F(\tilde{u}) dx. \end{aligned}$$

Mas, necessariamente, temos

$$\frac{K}{2} \|\tilde{u}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^2} F(\tilde{u}) dx.$$

Para provarmos este fato, supomos, por contradição, que

$$\frac{K}{2} \|\tilde{u}\|_2^2 < \int_{\mathbb{R}^2} F(\tilde{u}) dx.$$

Então, de modo análogo ao que fizemos na prova do Lema 4.9, existe $t \in (0, 1)$ tal que $t\tilde{u} \in M$, donde obtém-se

$$I^0 \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(t\tilde{u})|^2 dx = t^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\tilde{u}|^2 dx < \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\tilde{u}|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\tilde{u}_n|^2 dx = I^0,$$

o que é uma contradição. Logo, $\tilde{u} \in M$ e

$$I^0 \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\tilde{u}|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\tilde{u}_n|^2 dx = I^0$$

o que implica que

$$I^0 = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\tilde{u}|^2 dx,$$

ou seja, I^0 é atingido em $\tilde{u}$ e isto prova o lema. ■

4.4 Existência de solução positiva radialmente simétrica

Nesta seção vamos aplicar os Lemas 4.9, 4.10 e o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange para obter existência de soluções para o problema (4.1). Usando o Princípio do Máximo Fraco, mostramos que tais soluções são positivas. Além disso, tais soluções possuem uma simetria radial, o que segue diretamente da Observação feita por Berestycki-Lions em [3, pag. 321], como já foi comentado na introdução deste capítulo.

Lema 4.11 *Suponha que a não-linearidade f satisfaz (h_1) – (h_6) . Então o problema (4.1) possui uma solução positiva de energia mínima ω no nível*

$$c = I(\omega) = \inf_{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I(tv) < \frac{4\pi}{\alpha_0}.$$

Prova. Definindo

$$\Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^2} F(u) dx - \frac{K}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx \quad \text{e} \quad \Psi(u) = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx,$$

vimos pelo Lema 4.9 que $M = \{u \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}; \Phi(u) = 0\} \neq \emptyset$. Sabendo que

$$\Phi'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^2} f(u)\varphi dx - K \int_{\mathbb{R}^2} u\varphi dx$$

para todo $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^2)$, mostremos que $\Phi'(u) \neq 0$ para qualquer $u \in M$. De fato, suponha, por absurdo, que $\Phi'(u) = 0$ para algum $u \in M$. Então $\Phi'(u)u = 0$, o que implica que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u)u dx = K \int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx = 2 \int_{\mathbb{R}^2} F(u) dx,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^2} f(u)u dx - 2 \int_{\mathbb{R}^2} F(u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^2} \mu F(u) dx - 2 \int_{\mathbb{R}^2} F(u) dx \\ &= (\mu - 2) \int_{\mathbb{R}^2} F(u) dx > 0 \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Além disso, pelo Lema 4.10, existe uma função $\tilde{u} \in M$ tal que $\Psi(\tilde{u}) = \inf_M \Psi(u)$. Logo, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Psi'(\tilde{u})\varphi = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \tilde{u} \nabla \varphi dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^2} [f(\tilde{u}) - K\tilde{u}]\varphi dx = \lambda \Phi'(\tilde{u})\varphi, \quad \varphi \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Escolhendo a função teste $\varphi = \tilde{u}$, temos

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^2} [f(\tilde{u}) - K\tilde{u}]\tilde{u} dx = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \tilde{u}|^2 dx > 0.$$

Também é válido que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} [f(\tilde{u}) - K\tilde{u}]\tilde{u} dx &> \int_{\mathbb{R}^2} [\mu F(\tilde{u}) - K\tilde{u}^2] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mu F(\tilde{u}) dx - K \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} \mu F(\tilde{u}) dx - 2 \int_{\mathbb{R}^2} F(\tilde{u}) dx \\ &= (\mu - 2) \int_{\mathbb{R}^2} F(\tilde{u}) dx \geq 0 \end{aligned}$$

e então λ é um número positivo, ou seja, $\tilde{u}$ é solução do problema

$$-\Delta u = \lambda[f(u) - Ku].$$

Escolhendo a função teste $u^- = \max\{-\tilde{u}, 0\}$, concluímos que $\tilde{u} \geq 0$. De fato,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^N} [-(\nabla u^+ - \nabla u^-) \nabla u^- - \lambda K(u^+ - u^-)u^-] dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u^- dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^-|^2 + \lambda K(u^-)^2) + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u^- dx, \end{aligned}$$

onde $u^+ \equiv \max\{u, 0\}$ (o que implica que $\nabla u^+ \nabla u^- = 0$ e $u^+ u^- = 0$) e $u = u^+ - u^-$. Como, $f(s) = 0$ quando $s \leq 0$, temos $\int_{\mathbb{R}^N} f(u)u^- = 0$, e assim

$$\|u^-\|^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^-|^2 + K(u^-)^2) dx = 0.$$

Portanto, $u = u^+ - u^- \geq 0$.

Então, seja $\omega(x) = \tilde{u}(\lambda^{-1/2}x)$. Para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^2)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} K\tilde{u}(\lambda^{-1/2}x)\varphi(\lambda^{-1/2}x)dx = \frac{1}{(\lambda^{-1/2})^2} \int_{\mathbb{R}^2} K\tilde{u}(y)dy = \lambda \int_{\mathbb{R}^2} K\tilde{u}\varphi dy,$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\tilde{u}(\lambda^{-1/2}x))\varphi(\lambda^{-1/2}x)dx = \frac{1}{(\lambda^{-1/2})^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(\tilde{u}(y))\varphi(y)dy = \lambda \int_{\mathbb{R}^2} f(\tilde{u})\varphi dy$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla \tilde{u}(\lambda^{-1/2}x) \nabla \varphi(\lambda^{-1/2}x) dx = \frac{(\lambda^{-1/2})^2}{(\lambda^{-1/2})^2} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \tilde{u}(y) \nabla \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \tilde{u} \nabla \varphi dy,$$

donde segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \omega \nabla \varphi dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \tilde{u}(\lambda^{-1/2}x) \nabla \varphi(\lambda^{-1/2}x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \tilde{u}(y) \nabla \varphi(y) dy \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^2} [f(\tilde{u}(y)) - K\tilde{u}(y)] \varphi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} [f(\tilde{u}(\lambda^{-1/2}x)) - K\tilde{u}(\lambda^{-1/2}x)] \varphi(\lambda^{-1/2}x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} [f(\omega) - K\omega] \varphi dx. \end{aligned}$$

Portanto ω é solução fraca do problema (4.1).

A seguir, mostremos que ω é uma solução clássica. Basta mostrarmos que $\omega \in C_{loc}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ e portanto $\omega \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Com efeito, seja $R > 0$ e B_R uma bola arbitrária em $\mathbb{R}^2$. Temos

$$-\Delta \omega = g(\omega) \quad \text{em } \mathbb{R}^2$$

no sentido fraco, onde

$$g(\omega(x)) := f(\omega(x)) - K\omega(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Note que, para $p \geq 2$ e $\alpha > p$ temos

$$\begin{aligned} |g(\omega)|^p &= |f(\omega) - K\omega|^p \leq 2^{p-1}(|f(\omega)|^p + K^p|\omega|^p) \\ &\leq 2^{p-1}|\omega|^p(e^{\alpha\beta\omega^2} - 1) + K^p|\omega|^p \end{aligned}$$

em qualquer bola B_R . Daí,

$$\int_{B_R} |g(\omega)|^p dx \leq 2^{p-1} \int_{B_R} |\omega|^p (e^{\alpha\beta\omega^2} - 1) dx + K^p \int_{B_R} |\omega|^p dx < \infty.$$

Logo, pela Observação 4.6 e pelas imersões de Sobolev, $g \in L^p(B_R)$, para todo $p \geq 2$. Assim, o Teorema A.28 do Apêndice A implica que

$$\omega \in W^{2,p}(B_R) \quad \text{para todo } p \geq 2.$$

Logo, pelas imersões de Sobolev (confira Teorema A.25 do Apêndice A), $\omega \in C_{loc}^{1,\lambda}(\mathbb{R}^2)$ com $0 < \lambda < 1$ e isto implica que g é localmente Hölder contínua. Além disso, como $f \in C^1(B_R)$ temos, pelo Teorema A.26 do Apêndice A, que

$$f \in C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2), \quad 0 < \alpha < 1,$$

donde segue que $g \in C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$, $0 < \alpha < 1$. Logo pelo Teorema A.29 do Apêndice A, temos

$$\omega \in C_{loc}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2) \quad \text{para algum } \alpha \in (0, 1).$$

Em particular, $\omega \in C^2(\mathbb{R}^2)$, ou seja, ω é solução clássica do nosso problema e aplicando o Princípio do Máximo $\omega > 0$ em $\mathbb{R}^2$.

Agora, pela identidade de Pohozaev,

$$\frac{N-2}{N} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \omega|^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^2} G(\omega) dx$$

o que implica que

$$\int_{\mathbb{R}^2} G(\omega) dx = 0,$$

onde

$$G(\omega) = F(\omega) - \frac{K}{2} \omega^2.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(\omega) dx = \frac{K}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \omega^2 dx.$$

Então, temos

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} [|\nabla \omega|^2 + K\omega^2] dx - \int_{\mathbb{R}^2} F(\omega) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \omega|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \tilde{u}|^2 dx < \frac{4\pi}{\alpha_0}. \end{aligned}$$

Desde que $I'(\omega)\omega = 0$, temos que $\max_{t \geq 0} I(t\omega) = I(\omega)$. De fato, se $I'(t\omega)\omega = 0$ temos

$$tK \int_{\mathbb{R}^2} \omega^2 dx + t \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \omega|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(t\omega)\omega dx = 0,$$

isto é,

$$\|\omega\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(t\omega)}{t\omega} \omega^2 dx.$$

Como $f(s)/s$ é crescente, existe um único número $t \geq 0$ satisfazendo $I'(t\omega)\omega = 0$, pois se existisse outro ($t_1 < t$, por exemplo) teríamos

$$\|\omega\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(t_1\omega)}{t_1\omega} \omega^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(t\omega)}{t\omega} \omega^2 dx$$

o que é um absurdo. Além disso,

$$I(t\omega) = \frac{t^2}{2} \|\omega\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(t\omega) dx = t^2 \left[\frac{\|\omega\|^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(t\omega)}{t^2} dx \right]$$

Já vimos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(t\omega)}{t^2} \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow 0,$$

ou seja, existe t suficientemente pequeno, tal que $I(t\omega) > 0$. Agora, mostremos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(t\omega)}{t^2} \rightarrow +\infty \quad \text{quando } s \rightarrow +\infty.$$

De fato, por (h_4) , temos

$$\frac{F(s)}{s^2} \geq C_1 s^{\mu-2} \quad \text{se } |s| \geq \delta,$$

ou seja, $F(s)/s^2 \rightarrow +\infty$, quando $s \rightarrow +\infty$, ou ainda,

$$\frac{F(tu)}{t^2 u^2} u^2 \rightarrow +\infty \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty.$$

Logo, pelo Lema de Fatou,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(t\omega)}{t^2} = +\infty.$$

Daí, para t suficientemente grande temos que $I(t\omega) < 0$. Logo, $I(t\omega)$ possui um único ponto de máximo para todo $t \geq 0$, e desde que $I'(\omega)\omega = 0$ concluímos que $\max_{t \geq 0} I(t\omega) = I(\omega)$.

Para finalizarmos a demonstração do lema, vamos provar que

$$c = \inf_{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I(tv) = \frac{1}{2} I^0 = I(\omega).$$

Com efeito, temos

$$c = \inf_{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I(tv) \leq \max_{t \geq 0} I(t\omega) = I(\omega) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{\nabla}|^2 dx = \frac{1}{2} I^0.$$

Por outro lado, note que dado $\eta > 0$, existe $v \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$ tal que

$$c \leq \max_{t \geq 0} I(tv) \leq c + \eta.$$

Temos também, pelo Teorema do Valor Intermediário, que existe $t_0 > 0$ tal que $t_0 v \in M$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(t_0 v) dx = \frac{K t_0^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} v^2 dx.$$

Assim,

$$\frac{1}{2} I^0 \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(t_0 v)|^2 dx = I(t_0 v) \leq \max_{t \geq 0} I(tv) \leq c + \eta,$$

e portanto

$$c = I(\omega) = \inf_{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I(tv) = \frac{1}{2} I^0 < \frac{4\pi}{\alpha_0}.$$

■

Como já observado após o enunciado do Teorema 4.3, para provarmos que a solução ω obtida acima é esfericamente simétrica em torno de algum ponto de $\mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial \omega}{\partial r}$ é negativa para todo $r > 0$, onde r é a coordenada radial em relação a este ponto, vamos usar uma observação em Berestycki-Lions, (ver [3, pag. 321]). Basta verificarmos que $g'(0) < 0$ e $\hat{g}(s) = g(s) - g'(0)s$ é uma função crescente, onde

$$-\Delta \omega = g(\omega) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2$$

com

$$g(\omega(x)) := f(\omega(x)) - K\omega(x)$$

De fato, é fácil ver que $g'(0) < 0$. Além disso, pela hipótese (h_5) a função $f(s)/s$ é crescente e isto implica que a função

$$\hat{g}(s) = g(s) - g'(0)s = f(s) - Ks - g'(0)s = s \left(\frac{f(s)}{s} - K - g'(0) \right)$$

também é crescente. Esta observação conclui a prova do Teorema 4.3.

Apêndice A

Resultados auxiliares

Este apêndice apresenta alguns resultados importantes utilizados em nosso trabalho. Na medida do possível, mostramos também suas demonstrações.

A.1 Algumas estimativas

Considere a equação de Laplace

$$-\Delta u = 0 \text{ em } \Omega \subseteq \mathbb{R}^N.$$

A solução fundamental da equação de Laplace é dada por

$$\Gamma(x - y) = \Gamma(|x - y|) = \begin{cases} \frac{1}{N(2 - N)\omega_N} |x - y|^{2-N}, & N > 2 \\ \frac{1}{2\pi} \log |x - y|, & N = 2 \end{cases}$$

Para uma função integrável f num domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, o *potencial Newtoniano* de f é a função w definida em $\mathbb{R}^N$ por

$$w(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x - y) f(y) dy.$$

Teorema A.1 (Calderon-Zygmund) *Seja $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ e seja w o potencial Newtoniano de f . Então $w \in W^{2,p}(\Omega)$, $\Delta w = f$ q.t.p. em Ω e*

$$\|D^2 w\|_p \leq C \|f\|_p$$

onde C depende apenas de N e p . Além disso, quando $p = 2$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |D^2 w|^2 dx = \int_{\Omega} f^2 dx.$$

Prova. Veja [10, pag. 230]. ■

Corolário A.2 *Sejam Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$ e $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Então*

$$\|D^2 u\|_p \leq C \|\Delta u\|_p$$

onde $C = C(N, p)$. Se $p = 2$,

$$\|D^2 u\|_2 = \|\Delta u\|^2.$$

Prova. Veja [10, pag. 235]. ■

Lema A.3 (Lema Radial I) *Seja $N \geq 2$; toda função radial $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é quase sempre igual a uma função $U(x)$, contínua para $x \neq 0$ e tal que*

$$|U(x)| \leq C_N |x|^{(1-N)/2} \|u\| \quad \text{para } |x| \geq \alpha_N$$

onde C_N e α_N dependem apenas da dimensão N .

Prova. Veja [3, pag. 339]. ■

Lema A.4 (Lema Radial II) *Se $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, é uma função radial não-crescente (isto é, $0 \leq u(x) \leq u(y)$ se $|x| \geq |y|$), então temos*

$$|u(x)| \leq |x|^{-\frac{N}{p}} \left(\frac{N}{|S^{N-1}|} \right)^{\frac{1}{p}} \|u\|_p, \quad x \neq 0.$$

Prova. Veja [3, pag. 341]. ■

Proposição A.5 (Gagliardo-Nirenberg) *Sejam Ω um domínio de $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p \leq N$ e $1 \leq r \leq \infty$. Então existe uma constante $C(p, \theta, N)$ tal que para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ temos*

$$\|u\|_q \leq C \|u\|_r^{1-\theta} \|\nabla u\|_p^\theta$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$, com $\theta > 0$ se $p = N \geq 2$, e

$$\frac{1}{q} = \theta \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{N} \right) + \frac{1-\theta}{r}.$$

Prova. Veja [13, pag. 31]. ■

Corolário A.6 *Se $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ então*

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{2k+1} dx \leq C C_1^k \|u\|_2^2 \|\nabla u\|_2^{2k-1}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Prova. Pela proposição anterior, temos

$$\|u\|_{2k+1}^{2k+1} \leq C^{2k+1} \|u\|_2^{(1-\theta)(2k+1)} \|\nabla u\|_2^{\theta(2k+1)}$$

onde

$$\frac{1}{2k+1} = \frac{1-\theta}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{2k-1}{2k+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{2k+1} dx &= \|u\|_{2k+1}^{2k+1} \leq C^{2k+1} \|u\|_2^{(1-\theta)(2k+1)} \|\nabla u\|_2^{\theta(2k+1)} \\ &= C C_1^k \|u\|_2^2 \|\nabla u\|_2^{2k-1}. \end{aligned}$$

■

A.2 Regularidade de funcionais

O objetivo desta seção é mostrar que os funcionais $I, I_\lambda : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$, $N \geq 2$, $\lambda \in J$, onde J é um intervalo de $\mathbb{R}$, definidos nos Capítulos 2, 3 e 4 são de classe C^1 . Para isto, utilizamos a definição e o lema que seguem.

Definição A.7 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. No espaço $L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, definimos a norma*

$$\|u\|_{p \wedge q} = \|u\|_p + \|u\|_q$$

e no espaço $L^p(\Omega) + L^q(\Omega)$, definimos a norma

$$\|u\|_{p \vee q} = \inf \{ \|v\|_p + \|w\|_q; v \in L^p(\Omega), w \in L^q(\Omega), u = v + w \}.$$

Lema A.8 *Assuma que $1 \leq p, q, r, s < \infty$, $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua na segunda variável e*

$$|f(x, u)| \leq C(\|u\|^{\frac{p}{r}} + \|u\|^{\frac{q}{s}}).$$

Então, para todo $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, $f(\cdot, u) \in L^r(\Omega) + L^s(\Omega)$ e o operador

$$\begin{aligned} A : L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega) &\longrightarrow L^r(\Omega) + L^s(\Omega) \\ u &\longmapsto f(x, u) \end{aligned}$$

é contínuo.

Prova. Veja [25, pag. 134]. ■

O próximo lema é suficiente para garantirmos que os funcionais $I, I_\lambda : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$, definidos nos Capítulos 2, 3 e 4, são de classe C^1 .

Lema A.9 *Suponha que (f_1) – (f_4) ocorrem. Então os funcionais $\Phi : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\Psi : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidos por*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + Ku^2] dx \text{ e } \Psi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx$$

onde $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds$, pertencem a $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e possuem derivadas dadas por

$$\Phi'(u) \cdot v = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + Kuv) dx \text{ e } \Psi'(u) \cdot v = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u) v dx.$$

Prova. De acordo com Schwartz [19, Lema 1.15], é suficiente mostrarmos que as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) $\Phi, \Psi : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ são Gateaux diferenciáveis;
- (ii) $\Phi'(u), \Psi'(u) : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ são lineares e limitadas;
- (iii) $\Phi'(u_n) \rightarrow \Phi'(u)$ e $\Psi'(u_n) \rightarrow \Psi'(u)$ em H' quando $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, onde H' denota o dual topológico de $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Inicialmente verifiquemos (i). Sejam $u, h \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $t \in \mathbb{R}$. Temos

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(u + th) - \Phi(u)}{t} &= \frac{1}{2t} \left(\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla(u + th)|^2 + K(u + th)^2] - \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + Ku^2] \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(t \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla h + \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla h|^2 + tK \int_{\mathbb{R}^N} uh + \frac{t^2 K}{2} \int_{\mathbb{R}^N} h^2 \right), \end{aligned}$$

donde segue que

$$\Phi'(u) \cdot v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(u + th) - \Phi(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla h + K u h] dx,$$

ou seja, Φ é Gateaux diferenciável. Agora, mostremos que Ψ é Gateaux diferenciável. De fato, dado $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in [0, 1]$, defina $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\eta(s) = F(x, u(x) + sth(x))$$

e temos $\eta(0) = F(x, u(x))$ e $\eta(1) = F(x, u(x) + th(x))$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{F(x, u(x) + th(x)) - F(x, u(x))}{t} = f(x, u(x) + \lambda th(x))h(x)$$

donde segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x, u(x) + th(x)) - F(x, u(x))}{t} = f(x, u(x))h(x), \quad \text{q.t.p. em } x \in \mathbb{R}^N.$$

Além disso, por (2.3)

$$\begin{aligned} &\frac{F(x, u(x) + th(x)) - F(x, u(x))}{t} \\ &\leq [\varepsilon |u(x) + \lambda th(x)| + C_\varepsilon |u(x) + \lambda th(x)|^{p-1}] h(x) \\ &\leq [\varepsilon (|u(x)| + |h(x)|) + C_\varepsilon |u(x) + h(x)|^{p-1}] h(x) \\ &\leq [\varepsilon (|u(x)| + |h(x)|) + 2^{p-2} C_\varepsilon (|u(x)|^{p-1} + |h(x)|^{p-1})] |h(x)| \\ &= \varepsilon (|u(x)h(x)| + |h(x)|^2) + 2^{p-1} C_\varepsilon (|u(x)|^{p-1} |h(x)| + |h(x)|^p). \end{aligned}$$

Note que $|h(x)| \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e pela desigualdade de Hölder $|u(x)h(x)| \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, usando a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$, com p satisfazendo (f_2) , temos

$$\|h\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \|h\| < \infty,$$

ou seja, $|h(x)|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Usando, novamente, a desigualdade de Hölder, com $1/p + 1/q = 1$, a imersão acima e a desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p-1} |h(x)| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{p(1-\frac{1}{p})} \|h\| = C \|u\|_p^{p-1} \\ &\leq C \left(\frac{1}{p} \|h\|^p + \frac{p-1}{p} \|u\|_p^p \right) \leq \tilde{C} (\|h\|^p + \|u\|_p^p) < \infty. \end{aligned}$$

Logo, segue que $\varepsilon(|u(x)h(x)| + |h(x)|^2) + 2^{p-1}C_\varepsilon(|u(x)|^{p-1}|h(x)| + |h(x)|^p) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Daí, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\begin{aligned}\Psi'(u) \cdot h &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(u + th) - \Psi(u)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, u(x) + th(x)) - F(x, u(x))}{t} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x, u(x) + th(x)) - F(x, u(x))}{t} dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u(x)) dx.\end{aligned}$$

Em seguida, vamos verificar (ii). Temos

$$|\Phi'(u) \cdot v| = \langle u, v \rangle \leq \|u\| \|v\| \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\begin{aligned}|\Psi'(u) \cdot v| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x, u)| |v| dx \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u| |v| dx + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} |v| dx \\ &\leq \varepsilon \|u\|_2 \|v\|_2 + C_\varepsilon \|u\|_p^{p-1} \|v\|_p \\ &\leq (\varepsilon C_1 \|u\|_2 + C_\varepsilon C_2 \|u\|_p^{p-1}) \|v\| \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N)\end{aligned}$$

mostrando que $\Phi'(u), \Psi'(u) : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ são lineares e limitadas. Finalmente, verifiquemos (iii). Suponha que $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Então

$$\begin{aligned}\|\Phi'(u_n) - \Phi'(u)\|_{H'} &= \sup_{\|v\|=1} |\Phi'(u_n) \cdot v - \Phi'(u) \cdot v| \\ &= \sup_{\|v\|=1} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n - u) \nabla v dx + K \int_{\mathbb{R}^N} (u_n - u) v dx \right| \\ &= \sup_{\|v\|=1} |\Phi'(u_n - u) \cdot v| \\ &\leq \|u_n - u\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } u_n \rightarrow u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).\end{aligned}$$

Finalmente, mostremos a continuidade de Ψ' em H' . Como a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$ é contínua, temos que $u_n \rightarrow u$ em $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$. Note que, por (2.3)

$$|f(x, u)| \leq \varepsilon |u| + C_\varepsilon |u|^{p-1} \leq C(|u| + |u|^{p-1}) = C(|u|^{\frac{2}{2}} + |u|^{\frac{p}{q}}).$$

Pelo Lema anterior, para todo $u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$ temos $f(\cdot, u) \in L^2(\mathbb{R}^N) + L^p(\mathbb{R}^N)$ e $f(x, u_n) \rightarrow f(x, u)$ em $L^2(\mathbb{R}^N) + L^p(\mathbb{R}^N)$, onde $1/p + 1/q = 1$. Note que

$$|(\Psi'(u_n) - \Psi'(u)) \cdot h| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x, u_n) - f(x, u)| |h| dx.$$

Como $f(x, u_n), f(x, u) \in L^2(\mathbb{R}^N) + L^q(\mathbb{R}^N)$ temos

$$f(x, u_n) = v + w, \quad v \in L^2(\mathbb{R}^N), \quad w \in L^q(\mathbb{R}^N)$$

e

$$f(x, u) = v_1 + w_1, \quad v_1 \in L^2(\mathbb{R}^N), \quad w_1 \in L^q(\mathbb{R}^N)$$

donde $f(x, u_n) - f(x, u) = (v - v_1) + (w - w_1) \in L^2(\mathbb{R}^N) + L^q(\mathbb{R}^N)$. Daí, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x, u_n) - f(x, u)| |h| dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |(v - v_1) + (w - w_1)| |h| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |v - v_1| |h| dx + \int_{\mathbb{R}^N} |w - w_1| |h| dx \\ &\leq \|v - v_1\|_2 \|h\|_2 + \|w - w_1\|_q \|h\|_p \\ &\leq \|v - v_1\|_2 (\|h\|_2 + \|h\|_p) + \|w - w_1\|_q (\|h\|_2 + \|h\|_p) \\ &= (\|v - v_1\| + \|w - w_1\|) \|h\|_{2 \wedge p} \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} |(\Psi'(u_n) - \Psi'(u)) \cdot h| &\leq \inf\{\|v - v_1\|_2 + \|w - w_1\|_q\} \|h\|_{2 \wedge p} \\ &= \|(v - v_1) + (w - w_1)\|_{2 \vee q} \|h\|_{2 \wedge p} \\ &= \|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{2 \vee q} (\|h\|_2 + \|h\|_p) \\ &\leq C_1 \|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{2 \vee q} \|h\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\Psi'(u_n) - \Psi'(u)\| \leq C_1 \|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{2 \vee q} \rightarrow 0$$

e portanto Ψ' é contínua em H' . ■

Observação A.10 *Podemos chegar as mesmas conclusões do Lema acima, supondo que as hipóteses (g_1) - (g_4) e (h_1) - (h_4) são válidas.*

A.3 Resultados em Espaços de Banach

Sejam X um espaço de Banach, $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional e $S \subset X$. Definamos $I^d = I^{-1}((-\infty, d])$ e $S_\delta = \{u \in X; \text{dist}(u, S) \leq \delta\}$. Temos o seguinte resultado, conhecido como Lema de Deformação:

Lema A.11 *Sejam X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon, \delta > 0$ tais que*

$$\text{para todo } u \in I^{-1}([(c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}) \text{ temos } \|I'(u)\| \geq \frac{8\varepsilon}{\delta}.$$

Então existe $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$ tal que

- (i) $\eta(t, u) = u$, se $t = 0$ ou se $u \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$;
- (ii) $\eta(1, I^{c+\varepsilon} \cap S) \subset I^{c-\varepsilon}$;
- (iii) $\eta(t, \cdot)$ é um homeomorfismo de X , para todo $t \in [0, 1]$;
- (iv) $\|\eta(t, u) - u\| \leq \delta$, para todo $u \in X$ e $t \in [0, 1]$;
- (v) $I(\eta(\cdot, u))$ é não-crescente, para todo $u \in X$;

(vi) $I(\eta(t, u)) < c$, para todo $u \in I^c \cap S_\delta$ e $t \in (0, 1]$.

Prova. Veja [25, pag. 38]. ■

Teorema A.12 (Multiplicadores de Lagrange) *Seja X um espaço de Banach, $F, J \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $S = \{u \in X; F(u) = 0\}$. Suponha que para todo $u \in S$ tenhamos $F'(u) \neq 0$. Se existe $u_0 \in X$ tal que $J(u_0) = \inf_S J(u)$ então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $J'(u_0) = \lambda F'(u_0)$.*

Prova. Veja [13, pag. 55]. ■

A.4 Resultados envolvendo os Espaços L^p

Denotaremos por Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ com a medida de Lebesgue dx .

Lema A.13 *Sejam $\{f_n\}$ uma seqüência em $L^p(\Omega)$, Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$ e $f \in L^p(\Omega)$ tais que $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$. Então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ tal que*

(i) $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω ;

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e q.t.p. em Ω com $h \in L^1(\Omega)$.

Prova. Veja [4, pag. 58]. ■

Uma noção importante sobre convergência de funções integráveis é a noção de seqüência eqüi-integrável que introduzimos aqui (este conceito é comparável com o de uma família eqüi-contínua de funções).

Definição A.14 *Diz-se que uma seqüência de funções $\{f_n\}$ em $L^1(\Omega)$ é eqüi-integrável se for satisfeita a seguinte condição: para todo $\varepsilon > 0$ existe um conjunto mensurável A , com medida finita maior do que $\delta > 0$, tal que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{para todo } n \geq 1 \text{ temos, } \int_{A^c} |f_n(x)| dx < \varepsilon; \\ \text{para todo } E \subset \Omega \text{ mensurável, } |E| < \delta \Rightarrow \int_E |f_n(x)| dx < \varepsilon. \end{array} \right.$$

Teorema A.15 (Convergência de Vitali) *Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções em $L^1(\Omega)$ convergente q.t.p. para uma função mensurável f . Então $\{f_n\}$ tende para f em $L^1(\Omega)$ se, e somente se, a seqüência $\{f_n\}$ é eqüi-integrável.*

Prova. Veja [13, pag. 13]. ■

Abordaremos, de forma concisa, a simetrização de Schwarz. Para definir a Simetrização de Schwarz ou rearranjo de uma função $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$, começamos considerando funções simples.

Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ borelianos de $\mathbb{R}^N$, dois a dois disjuntos e de medida finita, e $0 < a_n < a_{n-1} < \dots < a_1$ números reais. Se f é uma função simples, digamos

$f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$, onde χ_{A_i} designa a função característica do conjunto A_i , definimos seu rearranjo por

$$f^* = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{R_{i-1} \leq |x| < R_i},$$

onde $R_0 = 0$ e $R_i \geq R_{i-1}$ são dados pela relação

$$m(\{R_{i-1} \leq |x| < R_i\}) = m(A_i)$$

onde m é a medida de Lebesgue.

Observação A.16 *Seja f uma função simples tomando os valores $a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0$. Se $A_i = \{a_i\}$ então $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$. Também podemos escrever*

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$$

onde $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_n$ e todos os λ_i são dados por

$$f_i = \chi_{\{f \geq a_i\}}, \quad \lambda_i = a_i - a_{i+1} \quad \text{para } 1 \leq i \leq n, \quad a_{n+1} = 0.$$

O rearranjo de f é dado por

$$f^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^*$$

com $f_1^* \geq f_2^* \geq \dots \geq f_n^*$ (Veja, por exemplo, [13]).

O teorema seguinte nos permite definir o rearranjo de qualquer função mensurável não-negativa.

Teorema A.17 *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ uma função não-negativa. Então existe uma única função $f^* \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que $f^* \geq 0$ e para todo $\lambda > 0$*

$$m(\{f \geq \lambda\}) = m(\{f^* \geq \lambda\}),$$

onde o conjunto $\{f^* \geq \lambda\}$ é uma bola $B_{R_\lambda}(0)$. A função f^* é radial decrescente e a chamamos o **Rearranjo decrescente** ou **Simetrizada de Schwarz** da função f . Além disso, para toda função contínua e crescente $G: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $G(0) = 0$ tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(f) = \int_{\mathbb{R}^N} G(f^*).$$

Prova. Veja [13, pag. 260]. ■

Observação A.18 *Note que se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq \infty$ então segue pelo Teorema anterior que $\|f\|_p^p = \|f^*\|_p^p$.*

Proposição A.19 *Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ uma função positiva. Então a simetrizada u^* pertence a $H^1(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Prova. Veja [13, pag. 264]. ■

Observação A.20 *Para $1 \leq p < \infty$, também podemos mostrar que $\|\nabla u^*\|_p \leq \|\nabla u\|_p$ (veja [13, pag. 264]).*

A.5 Resultados envolvendo Espaços de Sobolev

Lema A.21 (Identidade de Pohozaev) *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto de classe C^1 , $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, G a função primitiva de g tal que $G(0) = 0$ e $u \in H_0^1(\Omega) \cap H_{loc}^2(\overline{\Omega})$ uma função satisfazendo a equação*

$$-\Delta u = g(u) \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

Se $G(u) \in L^1(\Omega)$ e $n(\sigma)$ designa a normal exterior de $\partial\Omega$, então para todo $z^ \in \mathbb{R}^N$ fixo, temos*

$$\frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma - z^*) \cdot n(\sigma) d\sigma = N \int_{\Omega} G(u(x)) dx.$$

Em particular, se $\Omega = \mathbb{R}^N$, temos

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx.$$

Prova. Veja, por exemplo, [16, 25]. ■

Corolário A.22 *O problema de autovalor*

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x), \quad \lambda > 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^N$$

não possui solução positiva em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Prova. De fato, o problema acima pode ser escrito como

$$-\Delta u = f(u)$$

onde $f(u) = \lambda u$. Logo, pela identidade de Pohozaev, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx = \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$$

onde $F(u) = \int_0^u f(s) ds = \int_0^u \lambda s ds = \lambda u^2/2$. Daí, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda u^2}{2} dx = \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx. \quad (i)$$

Por outro lado, se u for solução temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda u^2 dx \quad (ii)$$

e por (i) e (ii)

$$2^* \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda u^2}{2} dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx$$

o que implica que

$$\left(\frac{2^*}{2} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = 0,$$

ou seja, $u = 0$. Portanto $u \neq 0$ não pode ser solução do problema dado. ■

Lema A.23 (P. L. Lions, 1984) *Sejam $r > 0$ e $2 \leq q < 2^*$. Se $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e se*

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |u_n|^q dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

então $u_n \rightarrow 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^$.*

Prova. Consideremos o caso $N \geq 3$ (quando $N = 2$ a prova é similar; veja por exemplo [14]). Sejam $q < s < 2^*$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. As desigualdades de Hölder e Sobolev implicam que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^s(B(y,r))} &\leq \|u\|_{L^q(B(y,r))}^{1-\lambda} \|u\|_{L^{2^*}(B(y,r))}^\lambda \\ &\leq C \|u\|_{L^q(B(y,r))}^{1-\lambda} \left[\int_{B(y,r)} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx \right]^{\lambda/2} \end{aligned}$$

onde $\lambda = \frac{s-q}{2^*-q} \frac{2^*}{s}$. Escolhendo $\lambda = 2/s$, obtemos

$$\int_{B(y,r)} |u|^s dx \leq C^s \|u\|_{L^q(B(y,r))}^{(1-\lambda)s} \int_{B(y,r)} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx$$

Agora, cobrindo $\mathbb{R}^N$ por bolas de raios r , de tal modo que cada ponto do $\mathbb{R}^N$ esteja contido em no máximo $N+1$ bolas, encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^s dx &\leq \int_{\bigcup_{i=1}^\infty B(y_i,r)} |u|^s dx \leq \sum_{i=1}^\infty \int_{B(y_i,r)} |u|^s dx \\ &\leq \sum_{i=1}^\infty \left(C^s \|u\|_{L^q(B(y_i,r))}^{(1-\lambda)s} \int_{B(y_i,r)} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx \right) \\ &\leq C^s \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left[\int_{B(y,r)} |u|^q dx \right]^{(1-\lambda)(s/q)} \sum_{i=1}^\infty \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^2 + |\nabla u|^2) \chi_{B(y_i,r)} dx \\ &\leq C^s \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left[\int_{B(y,r)} |u|^q dx \right]^{(1-\lambda)(s/q)} \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^2 + |\nabla u|^2) \sum_{i=1}^\infty \chi_{B(y_i,r)} dx \\ &\leq (N+1) C^s \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left[\int_{B(y,r)} |u|^q dx \right]^{(1-\lambda)(s/q)} \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx \end{aligned}$$

Usando a desigualdade anterior e as hipóteses sobre $\{u_n\}$, segue que $u_n \rightarrow 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 < s < 2^*$ e o lema está provado. ■

Teorema A.24 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave e $u \in W^{1,N}(\Omega)$, $N \geq 2$, tais que*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^N dx \leq 1.$$

Então, existe uma constante $C(N)$, que depende somente de N , tal que

$$\int_{\Omega} e^{\alpha_N |u|^N} dx \leq C|\Omega|,$$

onde $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ e ω_{N-1} é o volume da esfera unitária $N - 1$ -dimensional. A integral do lado esquerdo é finita para qualquer $\alpha > 0$; porém, se $\alpha > \alpha_N$ ela pode assumir valores arbitrariamente grandes pela escolha apropriada de u .

Prova. Veja [17]. ■

Teorema A.25 *Seja U um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave. Assuma que $u \in W^{k,p}(U)$.*

(i) Se $k < N/p$ então

$$W^{k,p}(U) \hookrightarrow L^q(u), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}.$$

(ii) Se $k > N/p$ então

$$W^{k,p}(U) \hookrightarrow C^{k-[N/p]-1,\gamma}(\overline{U})$$

onde

$$\gamma = \begin{cases} \left[\frac{k}{p} \right] + 1 - \frac{N}{p}, & \text{se } \frac{N}{p} \text{ não for um inteiro} \\ \text{qualquer número positivo} < 1 & \text{se } \frac{N}{p} \text{ for um inteiro.} \end{cases}$$

Prova. Veja [9, pag. 270]. ■

Teorema A.26 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto convexo, m um inteiro não-negativo e $0 < \lambda < 1$. Então valem as seguintes imersões*

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,1}(\overline{\Omega})$$

e

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}).$$

Prova. Veja [1, pag. 11]. ■

Teorema A.27 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de classe C^1 . Então as seguintes imersões são compactas:*

(i) Se $p < N$ então, para todo $q \in [1, p^*)$, temos

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N};$$

(ii) Se $p = N$ então, para todo $q \in [1, +\infty)$, temos

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega);$$

(iii) Se $p > N$ então

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}).$$

Prova. Veja por exemplo [4]. ■

Teorema A.28 *Suponhamos que $f \in L^p(B)$, com $1 < p < \infty$, onde B é uma bola de $\mathbb{R}^N$. Então, existe uma única função $u \in W^{2,p}(B) \cap W_0^{1,p}(B)$ tal que*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$

Prova. Veja [13, pag. 46]. ■

Teorema A.29 *Suponha que $f \in C^{0,\alpha}(B)$ onde $B \subset \mathbb{R}^N$ é uma bola. Então o problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$

tem uma única solução $u \in C(\overline{B}) \cap C^{2,\alpha}(B)$.

Prova. Veja [10, pag. 106]. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Arcoya, D., Gámez, J. L., Orsina, L., Peral, I., *Local existence results for sub-super-critical elliptic problems*, Commun. Appl. Anal. 5 (2001), 557-569.
- [3] Berestycki, H., Lions, P. L., *Nonlinear scalar field equations, I. Existence of ground state*, Arch. Rational Mech. Anal. 82 (1983), 313-346.
- [4] Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle, Theorie et Applications*, Masson, Paris, 1987.
- [5] Brezis H., *Private communication and Nonlinear Analysis* (in collaboration with Nirenberg L), To appear.
- [6] Cao, D. M., *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in $\mathbb{R}^2$* , Comm. Partial Differential Equations 17 (1992), 407-435.
- [7] do Ó, J. M., Medeiros, E., Severo, U., *A nonhomogeneous elliptic problem involving critical growth in dimension two*, J. Math. Anal. Appl. 345 (2008) 286-304.
- [8] do Ó, J. M., Souto, M. A. S. *On a class of nonlinear Schrödinger equations in $\mathbb{R}^2$ involving critical growth*, J. Differential Equations 174, 2001, no. 2, 289-311.
- [9] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in mathematics, American Mathematical Society, Volume 19, 1998.
- [10] Gilbarg, D., Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Verlag, 2001.
- [11] Jeanjean, L., *Local conditions insuring bifurcation from the continuous spectrum*, Math. Z., 232, 4, 1999, 651-664.
- [12] Jeanjean, L., *On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer type problem set on $\mathbb{R}^N$* , Proc. Roy. Soc. Edinburgh A, 129, 4, 1999, 787-809.
- [13] Kavian, O., *Introduction à la théorie des points critiques*, Springer-Verlag France, Paris, 1993.
- [14] Lions, P. L., *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. Part I and II.*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non-lin., 1 (1984), 109-145 and 223-283.

- [15] Liu, Z., Wang, Z. Q., *Schrödinger equations with concave and convex nonlinearities*, Z. Angew. Math. Phys. 56 (4) (2005) 609-629.
- [16] Mitidieri, E., Pohozaev, S. I., *Nonexistence of positive solutions for quasilinear elliptic problems on $\mathbb{R}^N$* , PSMI 227, 1999, 1-32.
- [17] Moser, J., *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. 20 (1971) 1077-1092.
- [18] Rabinowitz, P. H., *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. Angew. Math. Phys. 43 (1992) 270-291.
- [19] Schwartz, J., *Nonlinear Functional Analysis*, Courant Institute, NYU (1964).
- [20] Strauss, W., *Mathematical Aspects of Classical Nonlinear Field Equations. Nonlinear Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Phys*, vol. 98, Springer, Berlin-New York, 1979.
- [21] Struwe, M., *Variational Methods*, Springer, Second Edition, 1996.
- [22] Struwe, M., *The existence of surfaces of constant mean curvature with free boundaries*, Acta Math. 160 (1988), 19-64.
- [23] Trudinger, N. S., *On the embedding into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. 17 (1967) 473-484.
- [24] Wheeden, R. L., Zygmund, A., *Measure and Integral. An Introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker, Inc., (1977).
- [25] Willem, M., *Minimax Theorems*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin, 1996.