Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Análise Matemática do Problema de Navier-Stokes no $\mathbb{R}^3$

Maria de Jesus Rodrigues da Silva

2007

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Análise Matemática do Problema de Navier-Stokes no $\mathbb{R}^3$

por

Maria de Jesus Rodrigues da Silva

sob orientação do

Prof. Dr. Marivaldo Pereira Matos

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Junho /2007

João Pessoa-Pb

Análise Matemática do Problema de Navier-Stokes no $\mathbb{R}^3$

por

Maria de Jesus Rodrigues da Silva

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Marivaldo Pereira Matos (orientador)

Prof. Dr. Aldo Bezerra Maciel

Prof. Dr. Nelson Nery de Oliveira Castro

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna (suplente)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

.

Ao meu esposo Ednaldo.
Aos meus pais José (in memorian) e Antonia. Aos meus irmãos, especialmente à Josineide.

Agradecimentos

A DEUS que é minha fortaleza, por estar sempre presente em minha vida.

Ao meu orientador prof. Dr. MARIVALDO PEREIRA MATOS pela competente orientação, por toda a atenção, dedicação, paciência, compreensão e apoio a mim dedicados.

Ao professor Dr. ALDO B. MACIEL pelas valiosas contribuições dadas a este trabalho, além de todo apoio e incentivo a mim concedidos ao ingressar no mestrado e estímulo para que eu continue seguindo o caminho acadêmico.

Ao professor Dr. NELSON NERY pelas sugestões e correções inerentes a este trabalho e por toda a atenção e disponibilidade a mim dispensadas.

Ao professor Dr. FÁGNER D. ARARUNA por ter aceitado colaborar, de forma gentil, com nosso trabalho.

A todos os professores do DM/UFPB, especialmente os professores da Pós-Graduação pelos conhecimentos transmitidos com tanta presteza.

Aos professores da UEPB, em particular os que participaram da minha formação e de um modo muito especial agradeço aos professores OSMUNDO A. LIMA, ISABELLE BORGES, SAMUEL DUARTE, WANDENBERG e ALDO TRAJANO.

Ao meu amado esposo EDNALDO, que mesmo distante esteve sempre presente me incentivando e apoiando, por toda compreensão e amor.

À toda minha família pelo constante incentivo, em particular aos meus pais JOSÉ RODRIGUES FILHO (in memorian) e ANTONIA DOS SANTOS RODRIGUES e irmã JOSINEIDE que são meu alicerce.

À dona MARIA que me acolheu em sua casa como uma filha, a TOINHO, VIVIANE e VENÍCIO por toda torcida e carinho.

Aos colegas da pós-graduação pela ótima convivência, especialmente às minhas amigas CÉLIA E KALINA, modelo de amizade e companheirismo.

Aos órgãos financiadores PIBIC/CNPQ e CAPES, pelo apoio financeiro durante minha vida acadêmica.

Ficha Catalográfica

Resumo

No presente trabalho, estudamos a existência e unicidade de solução das equações estacionárias de Navier-Stokes, as quais regem o escoamento de fluidos homogêneos, incompressíveis e viscosos. Analisamos tanto o problema homogêneo quanto o não homogêneo, sempre considerando um aberto limitado do $\mathbb{R}^3$, com fronteira bem regular. Para garantirmos a existência de solução, usamos o método de Galerkin e para a unicidade, o processo formal.

Palavras-Chave: Solução Fraca, Problema Estacionário, Navier-Stokes.

Abstract

The aim of this work was to study the existence and uniqueness of solution of the stationary Navier-Stokes equations, which govern the drainage of fluids homogeneous, incompressible and viscous. We analyzed so much the homogeneous problem as well as the not homogeneous, always considering an open limited of $\mathbb{R}^3$, with very regular border. In order to guarantee the solution existence, we used the method of Galerkin and for the uniqueness, the formal process.

Key-Words: Weak Solution, Stationary Problem, Navier-Stokes.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **10**

1.1 Espaços Funcionais 10

1.1.1 Distribuições Escalares 10

1.1.2 Espaços de Sobolev 15

1.2 Resultados Preliminares 19

1.2.1 Desigualdades 19

1.2.2 Resultados de Existência, Convergência e Imersão 20

1.2.3 Resultados Específicos 23

2 O Problema Homogêneo **33**

2.1 Formulação Fraca do Problema (P) 34

2.2 Existência de Solução 35

2.2.1 Etapa 1: O Problema Aproximado 35

2.2.2 Etapa 2: Estimativas a Priori 37

2.2.3 Etapa 3: Passagem ao Limite 37

2.3 Unicidade de Solução 39

3 O Problema Não Homogêneo **42**

3.1 Formulação Fraca do Problema (P_1) 43

3.2 Existência de Solução 44

3.3 Estimativas a Priori 45
3.4 Passagem ao Limite 45
3.5 Unicidade de Solução 47

Referências Bibliográficas **50**

.

Introdução

Desenvolvemos esta dissertação, tomando como base um dos diversos trabalhos de J.L.Lions, ver [9]. Aqui vamos enfatizar o caso em que Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^3$, que é o caso físico mais importante.

No primeiro capítulo, procuramos objetivamente, apresentar alguns conceitos, notações básicas e demonstrar os principais resultados necessários aos demais capítulos.

No segundo capítulo, estudamos a existência e unicidade de solução para o Problema Homogêneo de Navier-Stokes no $\mathbb{R}^3$. O método utilizado para garantirmos a existência de solução foi o de Galerkin.

No terceiro capítulo, analisamos pelo mesmo método o Problema Não Homogêneo, mostrando também a existência e unicidade de solução.

A seguir, apresentaremos uma dedução modelo matemático de Navier-Stokes para o escoamento de fluidos homogêneos, incompressíveis e viscosos, por meio de argumentos elementares e intuitivos, dirigido às pessoas interessadas em ciência, em geral. Esta dedução é devida ao Prof. Luiz Adauto Medeiros [10].

Iniciamos com considerações físicas e geométricas, intuitivas para obter o que se entende por fluxo de fluido através de uma superfície, para obter a equação de continuidade que traduz, matematicamente, o princípio de conservação de massa. Por meio desta equação, definimos o que entendemos por fluido incompressível. Da lei de conservação de quantidade de movimento encontramos o modelo que procuramos, conhecido sob a denominação de equações de Navier-Stokes.

1. Considerações Físicas e Geométricas

Consideremos um fluido em movimento. Para fixar idéia, pensamos em água fluindo em um canal. Representemos por Ω um aberto limitado contido no ambiente onde se encontra o fluido. Pensamos Ω cheio do fluido, com fronteira regular Γ. O espaço onde Ω está imerso é o $\mathbb{R}^3$, constituído de pontos $x = (x_1, x_2, x_3)$. Representamos por Γ a fronteira de Ω, a qual é uma superfície do $\mathbb{R}^3$. Com $\vec{n}$ representamos a normal unitária externa à fronteira Γ. Denotamos por $\vec{u}$ o vetor de componentes $(u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$, denominado velocidade do fuido, isto é, das partículas do fluido. Denotamos por $\vec{u}$ o vetor $\vec{u}(x,t)$ velocidade no ponto x no instante t.

Consideremos uma porção $d\Gamma$ da superfície Γ. Denominamos fluxo através de $d\Gamma$, a massa de fluido que atravessa $d\Gamma$, na direção da normal, $\vec{n}$, na unidade de tempo. Calculamos, de modo intuitivo, o fluxo, considerando a velocidade $\vec{u}$ das partículas. De fato, no instante Δt uma partícula se desloca de $\vec{u}\Delta t$, na direção de $\vec{u}$. Considerando os pontos de $d\Gamma$, no instante Δt, o total de partículas atravessando $d\Gamma$ é a massa de fluido contida no prisma de altura $u\Delta t$, onde u é o módulo de $\vec{u}$, e base $d\Gamma$. Se desejarmos este fluxo na direção da normal $\vec{n}$, projetamos $\vec{u}$ sobre $\vec{n}$, obtendo $u_n\Delta t$ para a altura do prisma, sendo $u_n = \operatorname{proj}_{\vec{n}} \vec{u} = (\vec{u}, \vec{n})$, onde $(.,.)$ denota o produto escalar no $\mathbb{R}^3$. Portanto o total de partículas atravessando $d\Gamma$ na unidade de tempo Δt, na direção da normal $\vec{n}$, mede-se pelo total de partículas de fluido contido no prisma de base $d\Gamma$ e altura $u_n\Delta t$, isto é, seu volume é dado por

$$d\Gamma \times u_n \Delta t.$$

O fluxo sendo a massa do fluido contida neste prisma, será dado por

$$\rho \; u_n \; \Delta t \; d\Gamma,$$

onde por $\rho = \rho(x,t)$ representamos a densidade do fluido, massa por unidade de volume.

Temos a visão geométrica na Fig.1

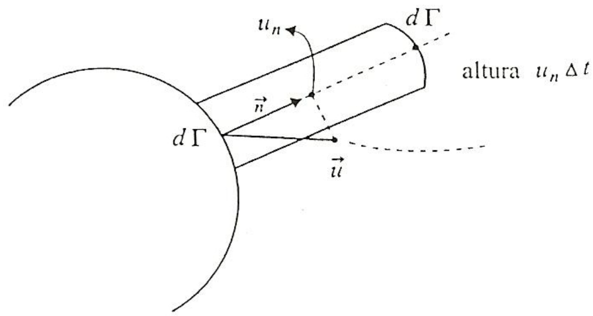

Fig. 1

Convencionamos que o fluxo é positivo se calculado no sentido positivo de $\vec{n}$ e negativo no sentido oposto.

Portanto, o fluxo através de Γ, no intervalo $\Delta t = 1$, será o somatório dos fluxos elementares $\rho\ u_n\ \Delta t\ d\Gamma$, isto é:

$$\int_{\Gamma} \rho\,(x,t)\,u_n\,(x,t)\,d\Gamma, \tag{1}$$

integral sobre a superfície Γ.

2. Equação de Continuidade

Admitiremos o

Princípio de Conservação de Massa de Fluido: *"a variação da massa de fluido no interior de Ω, em relação ao tempo, é igual ao fluxo de fluido através da fronteira Γ de Ω."*

Traduziremos, a seguir, matematicamente, este princípio. De fato, sendo $\rho\,(x,t)$ a densidade do fluido, a massa de fluido contida em Ω é dada por:

$$M\,(t) = \int_{\Omega} \rho\,(x,t)\ \ dx,$$

sendo $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ a medida no $\mathbb{R}^3$. A variação, em relação ao tempo, é:

$$\frac{dM\,(t)}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t}\ dx. \tag{2}$$

Suponhamos a variação devido ao fluido entrando em Ω, isto é,

$$-\int_{\Gamma} \rho\,(x,t)\;\; u_n\,(x,t)\, d\Gamma. \tag{3}$$

O princípio de conservação de massa diz que as integrais (2) e (3) são iguais, para todo aberto limitado Ω, com fronteira Γ. Notemos que se supõe Ω limitado e do mesmo lado de Γ. Algo como na fig. 2

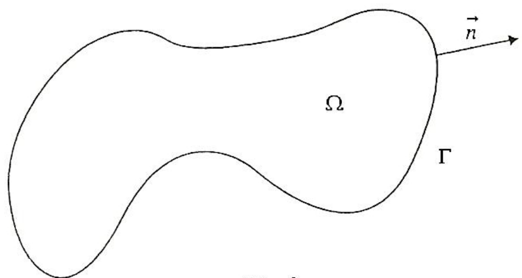

Fig. 2

Portanto, pelo princípio de conservação de massa, resulta, da igualdade das integrais (2) e (3):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t}\; dx + \int_{\Gamma} \rho\; u_n\; d\Gamma = 0,$$

para todo Ω. Usando o teorema da divergência, obtemos:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\,(\rho \vec{u}) \right]\; dx = 0$$

para todo Ω. Supondo o integrando uma função contínua, obtemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\,(\rho \vec{u}) = 0, \;\text{ pontualmente, em } \Omega. \tag{4}$$

Notemos que a componente u_i da velocidade $\vec{u}$ é $\dfrac{dx_i}{dt}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ vetor do $\mathbb{R}^3$, posição da partícula x no tempo t, isto é, $x_i = x_i\,(t)$ $i = 1, 2, 3$. Daí obtemos

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} u_i = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\operatorname{grad} \rho, \vec{u})\,. \tag{5}$$

Efetuando o cálculo, temos:

$$\operatorname{div}\,(\rho \vec{u}) = \rho\;\operatorname{div} \vec{u} + (\operatorname{grad} \rho, \vec{u}) \tag{6}$$

Substituindo (5) e (6) em (4), obtemos:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ em } \Omega. \tag{7}$$

É claro que (4) e (7) são equivalentes. A equação (7) (ou a (4)) é denominada lei de conservação de massa (ou equação de continuidade).

Dizemos que um fluido é incompressível e homogêneo quando sua densidade é constante ou, equivalentemente, $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ em todo Ω, isto é,

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ em } \Omega. \tag{8}$$

3. Equações de Navier-Stokes

As Equações de Navier-Stokes constituem um modelo matemático para a descrição do movimento de fluidos homogêneos (densidade ρ constante), incompressíveis ($\operatorname{div} \vec{u} = 0$) e viscosos. A dedução deste modelo será obtida por meio do princípio de conservação de quantidade de movimento. Estamos supondo

$$\rho \text{ constante e } \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ em } \Omega. \tag{9}$$

Consideremos um prisma de faces Δx_1, Δx_2, Δx_3 contido em Ω, cujo volume é $\Delta x = \Delta x_1 . \Delta x_2 . \Delta x_3$ e massa $\rho \Delta x$. A quantidade de movimento desta massa, é $\rho(\Delta x)\vec{u}$, sendo $\vec{u}$ a velocidade. Da definição de integral tripla, concluimos que a quantidade de movimento da massa de Ω é dada por:

$$m(t) = \int_\Omega \rho \vec{u}(x,t) \ dx. \tag{10}$$

Princípio de Conservação de Quantidade de Movimento: *"a variação da quantidade de movimento $m(t)$ de Ω, em relação ao tempo, é igual ao somatório das forças aplicadas ao Ω."*

A variação da quantidade de movimento de Ω é:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \int_\Omega \rho \frac{d\vec{u}}{dt} dx. \tag{11}$$

As forças aplicadas em Ω, são de dois tipos:

(i) volumétricas aplicadas a Ω de densidade $\vec{f}(x,t) = (f_1(x,t),\ f_2(x,t),\ f_3(x,t))$.

(ii) tensões internas e viscosidades na fronteira Γ de Ω, cujas componentes admitiremos da forma:

$$F_i(x,t) = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(x,t)\,\eta_j,$$

$i = 1,2,3$. Os números reais η_j, $j = 1,2,3$, são as componentes da normal unitária $\vec{n}$, externa à Γ.

Suponhamos as funções $\sigma_{ij}(x,t)$, $x \in \overline{\Omega}$ e $t \geq 0$, contínuas e continuamente diferenciáveis em relação a x, para todo $t \geq 0$. As funções $f_i(x,t)$ são supostas integráveis em Ω para todo $t > 0$. A matriz $\sigma_{ij}(x,t)$, $i,\ j = 1,2,3$, é denominada "tensor de tensões".

Deduzimos, do princípio de conservação da quantidade de movimento, a equação seguinte:

$$\int_\Omega \rho \frac{d\vec{u}}{dt} dx = \int_\Omega \overrightarrow{f}(x,t) dx + \int_\Gamma F(x,t)\, d\Gamma. \tag{12}$$

Escrevendo a (12) para as componentes dos vetores dos integrandos, obtemos:

$$\int_\Omega \rho \frac{du_i}{dt} dx = \int_\Omega f_i(x,t)\, dx + \int_\Gamma \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(x,t)\, \eta_j d\Gamma, \tag{13}$$

para $i = 1,2,3$.

Do Lema de Gauss, obtemos:

$$\sum_{j=1}^{3} \int_\Gamma \sigma_{ij}(x,t)\, \eta_j d\Gamma = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(x,t)\, dx,$$

que substituido em (13), resulta:

$$\int_\Omega \rho \frac{du_i}{dt} dx = \int_\Omega f_i(x,t)\, dx + \int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dx, \tag{14}$$

para $i = 1,2,3$.

Para fluidos homogêneos, incompressíveis e viscosos encontramos que $\sigma_{ij}(x,t)$ tem a representação:

$$\sigma_{ij}(x,t) = -p(x,t)\, \delta_{ij} + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \tag{15}$$

$p(x,t)$ número positivo e $\nu > 0$ dita viscosidade do fluido, cf. Landau-Lifschitz[5]. Sendo $\operatorname{div} \vec{u} = 0$, obtemos

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \nu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Notemos que $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$. Logo, $\dfrac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ restando $\dfrac{\partial p}{\partial x_i}$, portanto:

$$-\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}. \tag{16}$$

Temos: $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ em Ω, logo

$$\nu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \nu \Delta u_i. \tag{17}$$

Substituindo (16) e (17) em (14) obtemos:

$$\int_{\Omega} \rho \frac{du_i}{dt} dx = \int_{\Omega} f_i(x,t)\, dx + \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i \right) dx, \tag{18}$$

$i = 1,2,3$, para todo Ω imerso no fluido, resultando, devido a continuidade dos integrandos em (18):

$$\rho \frac{du_i}{dt} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i \text{ em } \Omega, \quad i = 1,2,3. \tag{19}$$

O sistema de equações (19) é denominado sistema de Navier-Stokes, para fluidos homogêneos, incompressíveis e viscosos. Notemos que $\dfrac{du_i}{dt}$ é a aceleração do fluido.

Modificamos (19), observando que $\vec{u}(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ para $x = (x_1, x_2, x_3)$. Portanto, a velocidade das partículas é dada por $u_j(x,t) = \dfrac{dx_j}{dt}$, e daí:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j,$$

que substituida em (19) resulta:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \Delta u_i + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \text{ em } \Omega, \tag{20}$$

com $i = 1,2,3$, para $t \in (0,T)$, $T > 0$. Podemos supor $\rho = 1$, pois ela é constante.

Trata-se de um sistema de três equações diferenciais parciais nas incógnitas u_1, u_2, u_3 e p. A questão matemática consiste em saber se um problema de valor inicial e de contorno, para (20), é bem posto, no sentido de Hadamard. Isto significa que devemos investigar se: existe solução para o problema, é única e se depende continuamente dos dados.

De fato, dado Ω aberto limitado, não vazio do $\mathbb{R}^3$, com fronteira Γ de classe C^2, definamos o cilindro $Q = \Omega \times (0,T)$, $T > 0$, do $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^x \times \mathbb{R}^t$, com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$. O problema matemático consiste em determinar $u_i : Q \longrightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1,2,3$, isto é, o vetor $\vec{u}(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$, solução do problema de valor inicial e de fronteira seguinte:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \Delta u_i + \displaystyle\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \text{ em } Q \\ u_i = 0 \text{ em } \Sigma \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ em } Q \\ u_i(x,0) = u_{0i}(x) \ \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{21}$$

Seja $\vec{u}(x,t) = u(x,t)$ e representemos por ∇p o vetor $\operatorname{grad} p = \left(\dfrac{\partial p}{\partial x_1}, \dfrac{\partial p}{\partial x_2}, \dfrac{\partial p}{\partial x_3} \right)$. Além disso sejam

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) \quad \text{e} \quad \Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3).$$

Daí obtemos a expressão vetorial

$$\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = \left(\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_2}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \right).$$

Com esta notação, escrevemos o sistema de Navier-Stokes (21) sob a forma:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \displaystyle\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - \nabla p \text{ em } Q \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ em } Q \\ u = 0 \text{ em } \Sigma \\ u(x,0) = u_0(x) \ \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{22}$$

Neste trabalho estudamos o *caso estacionário*, isto é, o caso em que as variáveis envolvidas não dependem do tempo. Desta forma, as equações (22) tornam-se:

$$\left| \begin{array}{l} -\nu \Delta u + \displaystyle\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - \nabla p \text{ em } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ em } \Gamma. \end{array} \right.$$

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e notações da teoria das Equações Diferenciais Parciais, bem como resultados relevantes que empregaremos nos capítulos subsequentes. Por serem de uso frequente, omitiremos algumas demonstrações, contudo, indicaremos as referências bibliográficas onde podem ser encontradas. Em seguida, mostraremos os resultados que são mais específicos deste trabalho.

1.1 Espaços Funcionais

1.1.1 Distribuições Escalares

Denotemos por $x = (x_1, ..., x_n)$ os pontos do $\mathbb{R}^n$. Por um multi-índice entendemos uma n-upla de números inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ cuja ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ e representamos por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

o operador derivação parcial de ordem α. No caso em que $\alpha = (0, 0, \dots, 0) = 0$, D^0 denota o operador identidade.

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua. O suporte da função u, anotado $\operatorname{supp}(u)$, é, por definição, o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}$. Em outras palavras, o $\operatorname{supp}(u)$ é o menor fechado de Ω fora do qual a função u se anula. Seguem as seguintes relações:

(a) $\operatorname{supp}(u+v) \subset \operatorname{supp}(u) \cup \operatorname{supp}(v)$;

(b) $\operatorname{supp}(uv) \subset \operatorname{supp}(u) \cap \operatorname{supp}(v)$;

(c) $\operatorname{supp}(\lambda u) = \lambda \operatorname{supp}(u),\ \lambda \neq 0.$

Mesmo que o suporte de uma função contínua seja fechado em Ω, existem funções cujos suportes não são compactos.

Exemplo 1.1 *Seja $u : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $u(x) = 1,\ \forall\ x \in (0,1)$. Notemos que* $\operatorname{supp}(u) = (0,1)$, *que não é um conjunto compacto da reta.*

Como estamos interessados em trabalhar com funções cujo suporte seja um compacto contido em Ω e, além disto, possuindo derivadas contínuas de todas as ordens, consideraremos o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω. O exemplo a seguir mostra que esta classe de funções é bastante ampla.

Exemplo 1.2 *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ e $B_r(x_0)$ a bola aberta de centro x_0 e raio r, isto é, $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x - x_0\| < r\}$. Sendo $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset \Omega$, definimos $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ por*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{\|x - x_0\|^2 - r^2}\right) & , \textit{ se } \|x - x_0\| < r \\ 0 & , \textit{ se } \|x - x_0\| \geq r. \end{cases}$$

Para esta função temos que $\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{B_r(x_0)}$ é compacto. Temos também que $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. De fato: observemos que a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t},\ t > 0 \\ 0,\ t \leq 0 \end{cases}$$

pertence a $C^{\infty}(\mathbb{R})$ e se $\theta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ for definida por $\theta(x) = r^2 - \|x - x_0\|^2$, então $\theta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Logo $\varphi = f \circ \theta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ e como $\text{supp}(\varphi) = \overline{B_r(x_0)}$, o qual é compacto, temos que $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

A seguir estabeleceremos a noção de convergência no espaço vetorial $C_0^{\infty}(\Omega)$, tornando-o um espaço vetorial topológico. Tal noção foi introduzida por Schwartz como segue.

Dizemos que uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^{\infty}(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\text{supp}(\varphi) \subset K \ \text{e} \ \text{supp}(\varphi_n) \subset K, \ \forall\, n \in \mathbb{N};$$

(ii) $D^{\alpha}\varphi_n \to D^{\alpha}\varphi$ uniformemente em K, para todo multi-índice α.

Representamos por $\mathcal{D}(\Omega)$, o espaço $C_0^{\infty}(\Omega)$ munido da convergência definida acima e o denominamos *espaço das funções testes.*

Por *distribuição escalar* sobre Ω entendemos toda aplicação linear contínua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, toda aplicação $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$;

(ii) T é contínua, ou seja, se $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T\varphi_n \to T\varphi$ em $\mathbb{R}$.

Normalmente, denotamos o valor da distribuição T na função teste φ por $\langle T, \varphi \rangle$.

Representamos por $L^q_{loc}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|u|^q$ é integrável sobre qualquer compacto K de Ω. Em $L^q_{loc}(\Omega)$ consideramos a seguinte noção de convergência: $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $L^q_{loc}(\Omega)$ quando $\left(\|u_\nu\|_{L^q(K)}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$ convergir para zero, $\forall\, K \subset \Omega$, compacto.

Definição 1.1 *Definimos $\mathcal{D}'(\Omega)$ como sendo o espaço vetorial das distribuições escalares sobre Ω, com a seguinte noção de convergência: Dizemos que a sequência $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, a sequência $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$. Com esta noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ passa a ser um espaço vetorial topológico.*

Simbolicamente temos

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \text{ linear e contínua}\}.$$

Exemplo 1.3 *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, uma função de Ω em $\mathbb{R}$, integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. Então, o funcional linear $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\,dx, \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

é uma distribuição escalar sobre Ω.

De fato, seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de funções testes sobre Ω que converge para uma função teste φ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Temos:

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \varphi_n \rangle - \langle T_u, \varphi \rangle| = |\langle T_u, \varphi_n - \varphi \rangle| &= \left| \int_\Omega u(x)(\varphi_n - \varphi)(x)dx \right| \leq \\ &\leq \int_\Omega |u(x)|\,|(\varphi_n - \varphi)(x)|\,dx \leq \\ &\leq \max_{x\in K} |(\varphi_n - \varphi)(x)| \int_K |u(x)|\,dx \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

onde K é um compacto de Ω que contém $\operatorname{supp}(\varphi_n - \varphi)$, $\forall\ n$.

A distribuição T_u, definida no exemplo anterior é dita *gerada* pela função localmente integrável u. E além disso, T_u é univocamente determinada por u, no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente, se $u = v$ quase sempre em Ω. Com efeito: segue do Lema de Du Bois Raymond, o qual enunciaremos na próxima seção, que:

$$\begin{aligned} T_u = T_v \ &\Longleftrightarrow \langle T_u, \varphi \rangle = \langle T_v, \varphi \rangle\,, \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ &\Longleftrightarrow \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega v(x)\varphi(x)dx \\ &\Longleftrightarrow \int_\Omega (u - v)(x)\varphi(x)dx = 0, \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ &\Longleftrightarrow u - v = 0 \text{ q. s. em } \Omega. \end{aligned}$$

Por essa razão, identificamos u à distribuição por ela definida, nos referindo a u como uma distribuição de $L^1_{loc}(\Omega)$. Desta forma, podemos ver o espaço das funções localmente integráveis como uma parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$, ou seja, $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Mostremos que esta inclusão é própria.

Exemplo 1.4 *Consideremos o funcional* $\delta_0 : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, *com* $0 \in \Omega$, *definido por*

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Este funcional é linear e contínuo em $\mathcal{D}(\Omega)$, *logo uma distribuição sobre* Ω. *No entanto,* δ_0 *não é gerado por uma função de* $L^1_{loc}(\Omega)$, *isto é, não existe* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que* $\delta_0 = T_u$. *A distribuição* δ_0 *é denominada* ***medida de Dirac concentrada no ponto zero****.*

De fato, se existisse $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\delta_0 = T_u$, então

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Como $\psi(x) = x\varphi(x)$ também pertence a $\mathcal{D}(\Omega)$ temos:

$$0 = \psi(0) = \langle \delta_0, \psi \rangle = \int_\Omega u(x)\psi(x)dx = \int_\Omega xu(x)\varphi(x)dx, \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pelo Lema de Du Bois Raymond, temos que $xu(x) = 0$ q.s. em Ω. Logo $u(x) = 0$ q.s em Ω e portanto,

$$\varphi(0) = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega 0\varphi(x)dx = 0, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

um absurdo, pois nem toda função teste φ leva zero no zero.

Destes dois últimos exemplos, concluímos que toda função localmente integrável identifica-se a distribuição por ela definida, entretanto, nem toda distribuição é definida por uma função localmente integrável.

Definição 1.2 *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *dizemos (segundo Sobolev) que* u *possui derivada fraca (derivada no sentido das distribuições), quando existir uma* $h \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_\Omega h(x)\varphi(x)\,dx, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

A função h *é denominada* ***derivada fraca*** *de* u.

Notemos que a noção de derivada fraca, segundo Sobolev, serve apenas para as funções que são localmente integráveis. Todavia, vimos anteriormente que existem distribuições que não são geradas por uma função localmente integrável e, portanto, para essas funções, tal noção de derivada não serve. Baseando-se nessa dificuldade Schwarz formulou o seguinte conceito de derivada distribucional.

Definição 1.3 *Sejam T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A* ***derivada distribucional*** *de ordem α de T é o funcional definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ por*

$$\langle D^{\alpha}T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^{\alpha}\varphi \rangle, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Este conceito de derivada distribucional generaliza o conceito de derivada dado na definição precedente e, neste sentido o operador derivada é linear e contínuo de $\mathcal{D}'(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Apresentaremos na próxima seção uma importante classe de espaços para o estudo das Equações Diferenciais Parciais, que são os Espaços de Sobolev.

1.1.2 Espaços de Sobolev

Dado Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ denotamos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω, equipado da norma:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

No caso $p = \infty$, denotamos por $L^{\infty}(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis à Lebesgue e essencialmente limitadas em Ω, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq C, \ q.s \text{ em } \Omega.$$

Neste espaço, consideremos a seguinte norma

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \operatorname*{supess}_{x \in \Omega} |u(x)|, \ \forall \ u \in L^{\infty}(\Omega).$$

O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, com sua respectiva norma, torna-se um espaço de Banach. No caso particular, onde $p = 2$ temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, cuja norma e produto interno são definidos, respectivamente, por

$$|u|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \qquad \text{e} \qquad (u, v) = \int_{\Omega} u(x) v(x) \, dx.$$

Como $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, para todo $1 \leq p \leq \infty$, concluímos que toda função $u \in L^p(\Omega)$ pode ser identificada a uma distribuição por ela definida e temos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas:

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega), \; 1 \leq p < \infty.$$

Observemos que, se $u \in L^p(\Omega)$, então sua derivada no sentido das distribuições não pertence necessariamente a $L^p(\Omega)$. Motivado pela idéia de conhecer o espaço onde jaz as derivadas de determinadas funções, Sobolev (em 1936) introduziu novos espaços, naturalmente denominados *Espaços de Sobolev*, os quais passaremos a descrever.

Sejam $m > 0$ um número inteiro e $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω, denotado por $W^{m,p}(\Omega)$ é por definição, o espaço vetorial das distribuições de $L^p(\Omega)$ para as quais sua derivada de ordem α, no sentido das distribuições, pertence a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq m$. Simbolicamente escrevemos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) ; D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ equipado da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p},$$

quando $1 \leq p < \infty$, ou

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

quando $p = \infty$, é um espaço de Banach reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.

Quando $p = 2$, os espaços $W^{m,2}(\Omega)$ são representados por $H^m(\Omega)$. Em símbolos, temos:

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) ; \, D^\alpha u \in L^2(\Omega), \; |\alpha| \leq m\right\},$$

cuja norma e produto interno são dados, respectivamente, por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

e

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} .$$

Esta estrutura topológica, torna $H^m(\Omega)$ um espaço de Hilbert separável continuamente imerso em $L^2(\Omega)$.

Para que tenhamos uma idéia melhor desses espaços, descreveremos alguns casos particulares. Em dimensão $n = 1$, temos

$$H^1(a,b) = \left\{u \in L^2(a,b);\ u' \in L^2(a,b)\right\},$$

neste caso

$$\|u\|^2_{H^1(a,b)} = \int_a^b |u(t)|^2\, dt + \int_a^b |u'(t)|^2\, dt,$$
$$((u,v))_{H^1(a,b)} = \int_a^b u(t)\, v(t)\, dt + \int_a^b u'(t)\, v'(t)\, dt.$$

Em dimensão $n \geq 2$, teremos

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ i = 1,...,n\right\}$$

com norma e produto escalar

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^2\, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^2 dx.$$
$$((u,v))_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx.$$

Apresentaremos a seguir os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,p}(\Omega)$ os quais são de grande valia no tratamento moderno das Equações Diferenciais Parciais e, em particular, neste trabalho.

Um fato importante é que o espaço das funções testes $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, ver [4]. Todavia, não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ seja denso em $W^{m,p}(\Omega)$, $m \geq 1$, inteiro. Motivado por esta razão, define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é:

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Quando $p=2$, o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H_0^m(\Omega)$.

O espaço dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, denotado por $W^{-m,q}(\Omega)$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ é constituido dos funcionais lineares e contínuos,

$$T : W_0^{m,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Consequentemente, representamos o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ por $H^{-m}(\Omega)$.

Quando Ω for um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ, bastante regular, representaremos por $H_0^1(\Omega)$ o espaço de Sobolev das (classes de) funções $u \in H^1(\Omega)$, com $u=0$ sobre a fronteira de Ω.

Por $\left(L^2(\Omega)\right)^n$, representamos o produto cartesiano de n cópias de $L^2(\Omega)$, munido do produto escalar

$$(u,v)=\sum_{i=1}^{n}\left(u^{(i)},v^{(i)}\right)_{L^2(\Omega)}$$

e norma

$$|v|^2=\sum_{i=1}^{n}\left|v^{(i)}\right|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

Aqui uma função vetorial $u \in \left(L^2(\Omega)\right)^n$ é representada por $u=\left(u^{(1)},u^{(2)},...,u^{(n)}\right)$.

Analogamente, $\left(H_0^1(\Omega)\right)^n$representa o produto cartesiano de n cópias de $H_0^1(\Omega)$, cujo produto escalar e norma são dados por

$$((u,v))=\sum_{i=1}^{n}\left(u^{(i)},v^{(i)}\right)_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|u\|=((u,u))^{1/2}.$$

Da desigualdade de Poincaré, a qual enunciaremos mais adiante, segue que esta norma é equivalente à

$$\|u\|^2=\sum_{i=1}^{n}\left|\nabla u^{(i)}\right|_{L^2(\Omega)}^2,\ u \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n .$$

Consideremos as formas bilinear e trilinear respectivamente:

$$a(u,v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_j}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial x_j}dx,$$

$$b(u,v,w)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega u^{(i)}D_i v^{(j)}w^{(j)}dx.$$

Definamos agora o espaço

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^n ; \ \operatorname{div} \varphi = 0\}.$$

Representando por H a aderência de $\mathcal{V}$ em $(L^2(\Omega))^n$, resulta que H é um subespaço fechado de $(L^2(\Omega))^n$ e, portanto, um espaço de Hilbert.

Seja V a aderência de $\mathcal{V}$ em $(H^1(\Omega))^n$. É claro que V é também um espaço de Hilbert e, como veremos adiante, V é caracterizado por:

$$V = \left\{v \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n ; \ \operatorname{div} v = 0\right\},$$

onde div $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} D_i u^{(i)} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x_n}$.

Definição 1.4 *Seja H um espaço de Hilbert real e $\langle .,. \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ seu produto interno. Uma sequência (u_n) de vetores de H, tal que*

(i) $\|u_n\| = 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\langle u_m, u_n \rangle = 0$, $\forall\ m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$;

(ii) Se F é o subespaço de H gerado por $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$, então $\bar{F} = H$, ou seja, as combinações lineares finitas dos u_n são densas em H,

é denominada *Base de Hilbert* de H.

1.2 Resultados Preliminares

Com o intuito de não sobrecarregar a notação, usaremos aqui e no decorrer do trabalho a letra C para representar diversas constantes.

1.2.1 Desigualdades

Enunciaremos algumas desigualdades importantes e de grande utilidade na demonstração de alguns resultados relevantes deste trabalho.

Lema 1.1 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$, *com* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *e* $1 \leq p \leq \infty$. *Então* $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |f \cdot g| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} .$$

Demonstração: Ver [2]. ■

Lema 1.2 ***(Desigualdade de Hölder Generalizada)*** *Sejam* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *números reais* ≥ 1 *e tais que* $1/p_1 + 1/p_2 + \ldots + 1/p_k = 1$. *Se* $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots k$, *então* $u_1 \cdot u_2 \cdot \cdots \cdot u_k \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |u_1 \cdot u_2 \cdot \cdots \cdot u_k| \leq \prod_{i=1}^{k} \|u_i\|_{L^{p_i}(\Omega)} .$$

Demonstração: Ver [2]. ■

Lema 1.3 ***(Desigualdade de Minkowsky)*** *Se* f, $g \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, *então:*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)} .$$

Demonstração: Ver [2]. ■

Lema 1.4 ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Seja* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$. *Se* $v \in H_0^1(\Omega)$, *então*

$$|v|_{L^2(\Omega)} \leq C\, |\nabla v|_{L^2(\Omega)} ,$$

onde a constante C *depende de* Ω.

Demonstração: Ver [11]. ■

1.2.2 Resultados de Existência, Convergência e Imersão

Lema 1.5 ***(Du Bois Raymond)*** *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Então,*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

se, e somente se, $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Demonstração: Ver [12]. ■

Lema 1.6 ***(Lions)*** *Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $(g_m)_m$ e g funções de $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, tais que:*

$$\|g_m\|_{L^q(\Omega)} \leq C \quad e \quad g_m \to g \ q.s \ em \ \Omega.$$

Então, $g_m \rightharpoonup g$ (convergência fraca) q.s em $L^q(\Omega)$.

Demonstração: Ver [9]. ■

Teorema 1.1 *Todo espaço de Hilbert separável admite uma base Hilbertiana.*

Demonstração: Ver [2]. ■

Teorema 1.2 ***(Imersão de Sobolev)*** *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira bastante regular*

(1) Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $1 \leq q < \infty$;

(2) Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0\left(\bar{\Omega}\right) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$;

(3) Se $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Demonstração: Ver [15]. ■

Teorema 1.3 ***(Ponto Fixo de Brouwer)*** *Seja B a bola fechada de centro 0 e raio 1 em $\mathbb{R}^{n+1}$. Toda aplicação $f : B \to B$ contínua possui (pelo menos) um ponto fixo, ou seja, existe $x_0 \in B$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Demonstração: Ver [7]. ■

Teorema 1.4 *Sejam $f \in L^1(\Omega)$ e $g \in L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Então para quase todo $x \in \Omega$ a função $y \mapsto f(x-y)\,g(y)$ é integrável sobre Ω. Definamos o produto da convolução de f com g por*

$$(f * g)(x) = \int_\Omega f(x-y)\,g(y)\,dy.$$

Então, $(f * g) \in L^p(\Omega)$ e $\|f * g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \|g\|_{L^p(\Omega)}$.

Demonstração: Ver [2]. ■

Proposição 1.1 *Sejam* Ω *um aberto do* $\mathbb{R}^n$ *e* $f = \left(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}\right)$, $f^{(i)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$. *Uma condição necessária e suficiente para que* $f = \operatorname{grad} p$, *para algum* $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$, *é que* $\langle f, v \rangle = 0$, $\forall\ v \in \mathcal{V}$.

Demonstração: Ver [15]. ■

Proposição 1.2 *Seja* Ω *um conjunto aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$

(i) Se uma distribuição p tem todas as derivadas de primeira ordem $D_i p$, $1 \leq i \leq n$ em $L^2(\Omega)$, então $p \in L^2(\Omega)$ e $\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C(\Omega)\, \|\operatorname{grad} p\|_{(L^2(\Omega))^n}$.

(ii) Se uma distribuição p tem todas as suas derivadas primeiras $D_i p$, $1 \leq i \leq n$ em $H^{-1}(\Omega)$, então $p \in L^2(\Omega)$ e $\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C(\Omega)\, \|\operatorname{grad} p\|_{(H^{-1}(\Omega))^n}$.

Onde $L^2(\Omega)/\mathbb{R} = \{p \in L^2(\Omega);\ \int_\Omega p(x)dx = 0\}$.
Demonstração: Ver [15]. ■

Observação 1.1 *Combinando os resultados das proposições 1.1 e 1.2 vemos que se* $f \in (H^{-1}(\Omega))^n$ *(ou* $(L^2_{loc}(\Omega))^n$*) e* $\langle f, v \rangle = 0$, $\forall\ v \in \mathcal{V}$, *então* $f = \operatorname{grad} p$ *com* $p \in L^2_{loc}(\Omega)$. *Se além disso,* Ω *é um conjunto aberto limitado, então* $p \in L^2(\Omega)$ *(ou* $H^1(\Omega)$*).*

Proposição 1.3 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto,* $1 \leq p \leq \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ *e* $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *com* $u_k \to u$ *em* $L^p(\Omega)$. *Então existe uma subsequência de* (u_k), *ainda denotada por* (u_k), *tal que:*

(i) $u_k(x) \to u(x)$, q.s. em Ω;

(ii) $|u_k(x)| \leq h(x)$, q.s. em Ω, $\forall\ k$, com $h \in L^p(\Omega)$.

Demonstração: Ver [2]. ■

Proposição 1.4 *Se* $v_i \in L^2(\Omega), i = 0, 1, ..., n$ *então* $f = v_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x}$ *é uma forma linear e contínua sobre* $H^1_0(\Omega)$, *isto é,* $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Demonstração: Ver [11]. ■

Teorema 1.5 *Se* $1 \leq p < \infty$ *e* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$*,* $n \geq 2$*, então* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q_{loc}(\Omega)$ *para todo* $q \geq 1$*, sendo a injeção contínua.*

Demonstração: Ver [12]. ■

Teorema 1.6 ***(Rellich)*** *Seja* Ω *um aberto, limitado e bem regular. Então a imersão do* $H^1(\Omega)$ *no* $L^2(\Omega)$ *é compacta.*

Demonstração: Ver [11]. ■

1.2.3 Resultados Específicos

A partir de agora, fixaremos $n = 3$ e mostraremos os resultados mais específicos deste trabalho.

Observação 1.2 *Sobre a caracterização do espaço* V*, mostraremos que as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) V é a aderência de $\mathcal{V}$ em $(H^1(\Omega))^3$;

(b) $V = \left\{ v \in (H_0^1(\Omega))^3;\ \operatorname{div} v = 0 \right\}$

Demonstração: Seja $\widetilde{V} = \left\{ v \in (H_0^1(\Omega))^3;\ \operatorname{div} v = 0 \right\}$. Para mostrar que $V \subset \widetilde{V}$, consideremos $v \in V$. Por (a) existe (v_k) em $\mathcal{V}$ tal que $v = \lim\limits_{k\to\infty} v_k$, onde o limite é considerado na norma de $(H^1(\Omega))^3$. Assim, $\operatorname{div} v_k \to \operatorname{div} v$ e sendo $v_k \in \mathcal{V}$ temos que $\operatorname{div} v_k = 0$, logo $\operatorname{div} v = 0$. Agora observemos que $v \in (H_0^1(\Omega))^3$, pois $v \in \overline{\mathcal{V}}^{\left(H^1(\Omega)\right)^3} \subset \overline{\left(\mathcal{D}(\Omega)^3\right)}^{\left(H^1(\Omega)\right)^3} = (H_0^1(\Omega))^3$. Portanto $v \in \widetilde{V}$.

Para verificar a inclusão contrária, mostraremos que toda forma linear e contínua sobre $\widetilde{V}$ nula sobre V, também é nula sobre $\widetilde{V}$.

Seja L uma forma linear e contínua sobre $\widetilde{V}$, nula sobre V. Como $\widetilde{V}$ é um subespaço fechado de $\left(H_0^1(\Omega)\right)^3$ podemos estender L, via teorema de Hahn-Banach, a uma forma linear e contínua sobre $\left(H_0^1(\Omega)\right)^3$, isto é, a uma forma $L : \left(H_0^1(\Omega)\right)^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, sendo

$$\langle L, v\rangle = \sum_{i=1}^{3} \left\langle L^{(i)}, v^{(i)}\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),\, H_0^1(\Omega)}.$$

Agora, observemos que o vetor distribuição $L = \left(L^{(1)}, L^{(2)}, L^{(3)}\right) \in \left(H^{-1}(\Omega)\right)^3$ e $\langle L, v\rangle = 0$, $\forall\ v \in \mathcal{V}$, pois L é nula sobre V. Usando as proposições 1.1, 1.2 e a Observação 1.1 podemos concluir que $L = grad\ p$, $p \in L^2(\Omega)$. Logo

$$\begin{aligned}\left\langle L^{(i)}, v^{(i)}\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),\, H_0^1(\Omega)} &= \left\langle D_i p, v^{(i)}\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),\, H_0^1(\Omega)} = \\ &= -\left(p, D_i v^{(i)}\right)_{L^2(\Omega)},\ \forall\ v^{(i)} \in H_0^1(\Omega).\end{aligned}$$

E, portanto

$$\begin{aligned}\langle L, v\rangle &= \sum_{i=1}^{3} \left\langle L^{(i)}, v^{(i)}\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),\ H_0^1(\Omega)} = -\sum_{i=1}^{3} \left(p, D_i v^{(i)}\right)_{L^2(\Omega)} = \\ &= -\left(p, \sum_{i=1}^{3} D_i v^{(i)}\right)_{L^2(\Omega)} = -\left(p, \operatorname{div} v\right)_{L^2(\Omega)} = 0, \forall\ v \in \widetilde{V}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Lema 1.7 *A forma trilinear definida por* $b(u, v, w) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u^{(i)} D_i v^{(j)} w^{(j)}\ dx$ *é contínua sobre* $V \times V \times V$.

Demonstração: Do teorema de Imersão de Sobolev, no caso em que $p = 2$ e $n = 3$, concluímos que $H_0^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^6(\Omega)$, e isto significa que existe $C > 0$ tal que: $\|v\|_{L^6(\Omega)} \leq C \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$. Assim, usando a Desigualdade de Hölder com a combinação $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = 1$, obtemos:

$$\begin{aligned}|b(u, v, w)| &\leq \sum_{i,j=1}^{3} \left|\int_\Omega u^{(i)} D_i v^{(j)} w^{(j)} dx\right| \leq \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \left|u^{(i)} D_i v^{(j)} w^{(j)}\right| dx \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{3} \left\|u^{(i)}\right\|_{L^6(\Omega)} \left|D_i v^{(j)}\right|_{L^2(\Omega)} \left\|w^{(j)}\right\|_{L^3(\Omega)}.\end{aligned}$$

Usando imersão de Sobolev, obtemos

$$
\begin{aligned}
|b(u,v,w)| &\le \sum_{i,j=1}^{3} \left\|u^{(i)}\right\|_{L^6(\Omega)} \left|D_i v^{(j)}\right|_{L^2(\Omega)} \left\|w^{(j)}\right\|_{L^3(\Omega)} \le \\
&\le C \sum_{i,j=1}^{3} \left\|u^{(i)}\right\|_{H_0^1(\Omega)} \left|D_i v^{(j)}\right|_{L^2(\Omega)} \left\|w^{(j)}\right\|_{L^3(\Omega)} \le \\
&\le C \sum_{i,j=1}^{3} \left\|u^{(i)}\right\|_{H_0^1(\Omega)} \left\|v^{(j)}\right\|_{H_0^1(\Omega)} \left\|w^{(j)}\right\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
|b(u,v,w)| \le C \sum_{i,j=1}^{3} \left\|u^{(i)}\right\|_{H_0^1(\Omega)} \left\|v^{(j)}\right\|_{H_0^1(\Omega)} \left\|w^{(j)}\right\|_{H_0^1(\Omega)}.
$$

Observando que $\left\|v^{(i)}\right\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|v\|_V$ (pois $\|v\|_V^2 = \sum_{i=1}^{3} \left\|v^{(i)}\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2$) e substituindo na desigualdade anterior, deduzimos que:

$$
|b(u,v,w)| \le C \sum_{i,j=1}^{3} \|u\|_V \|v\|_V \|w\|_V \le C \|u\|_V \|v\|_V \|w\|_V. \ \blacksquare
$$

Lema 1.8 *A forma trilinear $b(u,v,w)$ definida no Lema 1.7 satisfaz a seguinte igualdade $b(u,v,w) + b(u,w,v) = 0$.*

Demonstração: Por definição, temos

$$
\begin{aligned}
b(u,v,w) + b(u,w,v) &= \sum_{i,j=1}^{3} \left(\int_\Omega u^{(i)} D_i v^{(j)} w^{(j)} dx + \int_\Omega u^{(i)} D_i w^{(j)} v^{(j)} dx \right) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u^{(i)} \left(D_i v^{(j)} w^{(j)} + D_i w^{(j)} v^{(j)} \right) dx = \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u^{(i)} D_i \left(v^{(j)} w^{(j)} \right) dx = \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega D_i \left(u^{(i)} v^{(j)} w^{(j)} \right) dx - \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega D_i u^{(i)} \left(v^{(j)} w^{(j)} \right) dx.
\end{aligned}
$$

Então,

$$b(u,v,w)+b(u,w,v)=\sum_{j=1}^{3}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}D_i\left(u^{(i)}v^{(j)}w^{(j)}\right)dx-\sum_{j=1}^{3}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\left(D_iu^{(i)}\right)v^{(j)}w^{(j)}dx=$$
$$=\sum_{j=1}^{3}\int_{\Omega}div\left(u\ v^{(j)}w^{(j)}\right)dx-\sum_{j=1}^{3}\int_{\Omega}v^{(j)}w^{(j)}div\ u\ dx.$$

Do teorema da Divergência de Gauss, segue que

$$b(u,v,w)+b(u,w,v)=\sum_{j=1}^{3}\int_{\Gamma}u\ v^{(j)}w^{(j)}\eta\ d\Gamma-\sum_{j=1}^{3}\int_{\Omega}v^{(j)}w^{(j)}div\ u\ dx=0,$$

porque $u,v,w\in V=\left\{v\in\left(H_0^1(\Omega)\right)^3;\ div\ v=0\right\}$. ■

Observação 1.3 *Notemos que se* $v=w$ *no Lema 1.8, então* $b(u,w,w)=0$ *e consequentemente* $b(u,u,u)=0$.

Lema 1.9 *Sejam* X *um espaço de Hilbert de dimensão finita com produto escalar* $(\cdot\ ,\cdot)$, *norma* $|\cdot|$ *e* P *uma aplicação contínua de* X *em* X *tal que*

$$(P(\xi),\xi)>0\ \textit{para}\ |\xi|=k>0.$$

Então, existe $\xi\in X$, *com* $|\xi|\leq k$, *tal que* $P(\xi)=0$.

Demonstração: Mostraremos por absurdo.

Suponhamos que $P(\xi)\neq 0$ na bola $\bar{B}_k=\{\xi\in X;\ |\xi|\leq k\}$, então, a aplicação $S:\bar{B}_k\to\bar{B}_k$, definida por:

$$S(\xi)=-k\frac{P(\xi)}{|P(\xi)|}$$

é contínua e usando o teorema do Ponto Fixo de Brouwer, existe $\xi_0\in\bar{B}_k$ tal que $S(\xi_0)=\xi_0$, isto é:

$$-k\frac{P(\xi_0)}{|P(\xi_0)|}=\xi_0 \tag{1.1}$$

e, conseqüentemente, $|\xi_0|=k$. Tomando o produto escalar de (1.1) por ξ_0, encontramos:

$$-k\frac{P(\xi_0,\xi_0)}{|P(\xi_0)|}=|\xi_0|^2=k^2,\ \text{ou seja,}\ (P(\xi_0),\xi_0)=-k|P(\xi_0)|<0$$

o que contradiz a hipótese. Portanto $P(\xi)=0$ para algum $\xi\in\bar{B}_k\subset X$. ■

Lema 1.10 *Qualquer que seja $\beta > 0$, podemos escolher G verificando*

$$\left| \begin{array}{l} G \in \left(H^1(\Omega)\right)^3 \\ \operatorname{div} G = 0 \ \text{em } \Omega \\ G = F \ \text{sobre } \Gamma \end{array} \right. \tag{1.2}$$

de modo que

$$|b(v, G, v)| \leq \beta \|v\|^2 . \tag{1.3}$$

Onde $F = \operatorname{rot} \psi$ *com* $\psi = \left(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(3)}\right)$, $\psi^{(i)} \in H^2(\Omega)$, $\dfrac{\partial \psi^{(i)}}{\partial x_j} \in L^3(\Omega)$ *e* $\psi^{(i)} \in L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Para provarmos o Lema 1.10 precisaremos de dois outros lemas.

Lema 1.11 *Ponhamos $\rho(x) = d(x, \Gamma)$, isto é, distância de x a fronteira de Ω. Para todo $\varepsilon > 0$ (suficientemente pequeno), existe uma função $\theta_\varepsilon \in C^2\left(\bar{\Omega}\right)$ tal que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_\varepsilon = 1 \ \text{numa vizinhaça de } \Gamma \, (\text{variável com } \varepsilon) \\ \theta_\varepsilon = 0, \ \text{se } \rho(x) \geq \delta(\varepsilon), \text{onde } \delta(\varepsilon) = \exp(-1/\varepsilon) \\ \left| \dfrac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial x_k}(x) \right| \leq \dfrac{\varepsilon}{\rho(x)}, \ \text{se } \rho(x) \leq \delta(\varepsilon), \forall \ k. \end{array} \right. \tag{1.4}$$

Demonstração: Definamos primeiro a função $\lambda \mapsto \xi_\varepsilon(\lambda)$ para $\lambda \geq 0$ por:

$$\xi_\varepsilon(\lambda) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ se } \lambda < \delta(\varepsilon)^2 \\ \varepsilon \log(\delta(\varepsilon)/\lambda), \text{ se } \delta(\varepsilon)^2 < \lambda < \delta(\varepsilon) \\ 0, \text{ se } \lambda > \delta(\varepsilon) \end{array} \right.$$

e então definamos χ_ε por

$$\chi_\varepsilon(x) = \xi_\varepsilon(\rho(x)).$$

Desde que a função $\rho \in C^2\left(\bar{\Omega}\right)$, χ_ε verifica (1.4). Agora, consideremos uma função $\sigma \in C^2\left(\bar{\Omega}\right)$ e obtemos $\theta_\varepsilon = \sigma * \chi_\varepsilon \in C^2\left(\bar{\Omega}\right)$. Mais detalhes ver [6]. ■

Lema 1.12 *Existe uma contante C_1 tal que*

$$\left| \frac{1}{\rho} v \right|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \|v\|_{H_0^1(\Omega)} .$$

Demonstração: Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto bem regular, podemos considerar

$$\Omega = \left\{ \left(x', x_3\right),\ x_3 > 0 \text{ e } x' = \left(x_1, x_2\right) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Neste caso, $\rho\left(x\right) = x_3 > 0$ e é suficiente mostrar que

$$\int_\Omega \frac{v\left(x\right)^2}{x_3^2} dx \leq C_1 \int_\Omega \left|D_n v\left(x\right)\right|^2 dx,\ \forall\ v \in \mathcal{D}\left(\Omega\right).$$

Esta desigualdade é verificada, se provarmos a seguinte desigualdade unidimensional:

$$\int_0^\infty \left|\frac{v\left(s\right)}{s}\right|^2 ds \leq 4 \int_0^\infty \left|v'\left(s\right)\right|^2 ds,\ \forall\ v \in \mathcal{D}\left(0, +\infty\right). \tag{1.5}$$

Passaremos a demonstrar (1.5) que é conhecida como desigualdade de Hardy.

Façamos $s = e^\sigma$, $t = e^\tau$ e $\dfrac{v\left(s\right)}{s} = \dfrac{1}{s}\displaystyle\int_0^s w\left(t\right) dt$, onde $w = v'$. Então,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left|\frac{v\left(s\right)}{s}\right|^2 ds &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{s}\int_0^s w\left(t\right) dt\right)^2 ds = \\ &= \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{e^\sigma}\int_0^{e^\sigma} w\left(t\right) dt\right)^2 e^\sigma d\sigma = \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-\sigma}\left(\int_0^{e^\sigma} w\left(t\right) dt\right)^2 d\sigma. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Considerando a função de Heaviside

$$\chi\left(\sigma\right) = \begin{cases} 1, \text{ se } \sigma > 0 \\ 0, \text{ se } \sigma < 0, \end{cases}$$

obtemos

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\sigma}\left(\int_0^{e^\sigma} w\left(t\right) dt\right)^2 d\sigma = \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty \chi\left(\sigma - \tau\right) e^{\frac{-\left(\sigma-\tau\right)}{2}} w\left(e^\tau\right) e^{\frac{\tau}{2}} d\tau\right)^2 d\sigma. \tag{1.7}$$

Agora, usaremos em (1.7), o Teorema 1.4, considerando $f\left(x\right) = \chi\left(x\right) e^{-x/2} \in L^1\left(\mathbb{R}\right)$ e $g\left(z\right) = w\left(e^z\right) e^{z/2} \in L^2\left(\mathbb{R}\right)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\chi\left(\sigma-\tau\right)e^{\frac{-(\sigma-\tau)}{2}}w\left(e^{\tau}\right)e^{\frac{\tau}{2}}d\tau\right)^{2}d\sigma &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(f*g\right)\left(\sigma\right)\right|^{2}d\sigma = \\
&= \left|\left(f*g\right)\right|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} \leq \left|f\right|_{L^{1}(\mathbb{R})}^{2}\left|g\right|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} = \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\sigma\right)d\sigma\right)^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g\left(\tau\right)\right|^{2}d\tau = \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\chi\left(\sigma\right)e^{\frac{-\sigma}{2}}d\sigma\right)^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|w\left(e^{\tau}\right)\right|^{2}e^{\tau}d\tau = \\
&= 4\int_{0}^{\infty}\left|w\left(t\right)\right|^{2}dt.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\chi\left(\sigma-\tau\right)e^{\frac{-(\sigma-\tau)}{2}}w\left(e^{\tau}\right)e^{\frac{\tau}{2}}d\tau\right)^{2}d\sigma \leq 4\int_{0}^{\infty}\left|w\left(t\right)\right|^{2}dt,$$

substituindo a última desigualdade em (1.7) e em seguida em (1.6), obtemos (1.5). ■

Demonstração do Lema 1.10:

Provaremos com o auxílio dos Lemas 1.11 e 1.12 que $G = \operatorname{rot}\left(\theta_{\varepsilon}\psi\right)$ verifica (1.2) e (1.3).

De fato: Notemos que, se $\theta_{\varepsilon} \in C^{2}\left(\bar{\Omega}\right)$ e $\psi^{(i)} \in H^{2}\left(\Omega\right)$, então $\theta_{\varepsilon}\psi^{(i)} \in H^{2}\left(\Omega\right)$ o que implica que $\theta_{\varepsilon}\psi \in \left(H^{2}\left(\Omega\right)\right)^{3}$. Como G envolve as derivadas parciais de primeira ordem de $\theta_{\varepsilon}\psi$, temos que $G = \operatorname{rot}\left(\theta_{\varepsilon}\psi\right) \in \left(H^{1}\left(\Omega\right)\right)^{3}$. Com isto mostramos $(1.2)_{1}$.

Observemos que $\operatorname{div} G = \operatorname{div}\operatorname{rot}\left(\theta_{\varepsilon}\psi\right) = 0$, e por (1.4) temos $G = \operatorname{rot}\left(\theta_{\varepsilon}\psi\right) = \operatorname{rot}\psi = F$ sobre Γ. Logo (1.2) é satisfeita.

Queremos agora, mostrar que $G = \operatorname{rot}\left(\theta_{\varepsilon}\psi\right)$ satisfaz (1.3), para isto, consideremos $B_{\varepsilon} = \left\{x \in \Omega;\ \rho\left(x\right) \leq \delta\left(\varepsilon\right)\right\}$ e observemos o vetor

$$G = \operatorname{rot}\left(\theta_{\varepsilon}\psi\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_{2}}\left(\theta_{\varepsilon}\psi^{(3)}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x_{3}}\left(\theta_{\varepsilon}\psi^{(2)}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_{3}}\left(\theta_{\varepsilon}\psi^{(1)}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x_{1}}\left(\theta_{\varepsilon}\psi^{(3)}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_{1}}\left(\theta_{\varepsilon}\psi^{(2)}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x_{2}}\left(\theta_{\varepsilon}\psi^{(1)}\right) \end{bmatrix}.$$

Usando as propriedades de θ_ε vemos que

$$\begin{aligned}
\left|G^{(2)}(x)\right| &= \left|\frac{\partial}{x_3}\left(\theta_\varepsilon(x)\psi^{(1)}(x)\right)-\frac{\partial}{x_1}\left(\theta_\varepsilon(x)\psi^{(3)}(x)\right)\right| \leq \\
&\leq \left|\frac{\partial}{x_3}\theta_\varepsilon(x)\right|\left|\psi^{(1)}(x)\right|+|\theta_\varepsilon(x)|\left|\frac{\partial}{x_3}\psi^{(1)}(x)\right|+ \\
&+\left|\frac{\partial}{x_1}\theta_\varepsilon(x)\right|\left|\psi^{(3)}(x)\right|+|\theta_\varepsilon(x)|\left|\frac{\partial}{x_1}\psi^{(3)}(x)\right| \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\rho(x)}\left(\left|\psi^{(1)}(x)\right|+\left|\psi^{(3)}(x)\right|\right)+\sup_{x\in\Omega}|\theta_\varepsilon(x)|\left(\left|\frac{\partial}{x_3}\psi^{(1)}(x)\right|+\left|\frac{\partial}{x_1}\psi^{(3)}(x)\right|\right),
\end{aligned}$$

se $\rho(x)\leq\delta(\varepsilon)$. Consequentemente,

$$\left|G^{(2)}(x)\right|\leq C\left(\frac{\varepsilon}{\rho(x)}|\psi(x)|_{\mathbb{R}^3}+|D\psi(x)|\right),$$

se $\rho(x)\leq\delta(\varepsilon)$, onde $|D\psi(x)|=\left(\sum_{i,j=1}^{3}\left|D_i\psi^{(j)}(x)\right|^2\right)^{1/2}$ e $C=\max_{x\in\Omega}\left\{1,\sup_{x\in\Omega}|\theta_\varepsilon(x)|\right\}$. O mesmo ocorre quando fazemos $j=1,3$ e, dessa forma, temos

$$\left|G^{(j)}(x)\right|\leq C\left(\frac{\varepsilon}{\rho(x)}|\psi(x)|+|D\psi(x)|\right),$$

se $\rho(x)\leq\delta(\varepsilon)$, para $j=1,2,3$ e $G^{(j)}=0$, se $\rho(x)>\delta(\varepsilon)$, pois nesse caso $\theta_\varepsilon=0$.

Como $\psi^{(i)}\in L^\infty(\Omega)$, então:

$$\left|G^{(j)}(x)\right|\leq C\left(\frac{\varepsilon}{\rho(x)}\operatorname*{supess}_{x\in\Omega}|\psi(x)|+|D\psi(x)|\right),$$

ou seja,

$$\left|G^{(j)}(x)\right|\leq C\left(\frac{\varepsilon}{\rho(x)}+|D\psi(x)|\right),\ j=1,2,3 \tag{1.8}$$

com $\rho(x)\leq\delta(\varepsilon)$ e $C=\max\left\{\operatorname*{supess}_{x\in\Omega}|\psi(x)|,1\right\}$.

Multiplicando (1.8) por $\left|v^{(i)}(x)\right|$ e elevando ao quadrado, obtemos

$$\left|v^{(i)}G^{(j)}(x)\right|^2\leq C\left(\varepsilon^2\left|\frac{v^{(i)}(x)}{\rho(x)}\right|^2+\left|v^{(i)}(x)\right|^2|D\psi(x)|^2\right),\ \rho(x)\leq\delta(\varepsilon),\ j=1,2,3.$$

Integrando sobre B_ε e observando que

$$\int_\Omega\left|v^{(i)}G^{(j)}(x)\right|^2dx=\int_{B_\varepsilon}\left|v^{(i)}G^{(j)}(x)\right|^2dx,$$

pois fora de B_ε, sabemos que $G^{(j)} = 0$. Chegamos a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|v^{(i)} G^{(j)}(x)\right|^2 dx &= \int_{B_\varepsilon} \left|v^{(i)} G^{(j)}(x)\right|^2 dx \leq \\
&\leq C\left(\varepsilon^2 \int_{B_\varepsilon} \left|\frac{v^{(i)}(x)}{\rho(x)}\right|^2 dx + \int_{B_\varepsilon} \left|v^{(i)}(x)\right|^2 |D\psi(x)|^2 dx\right) \leq \\
&\leq C\left(\varepsilon^2 \int_\Omega \left|\frac{v^{(i)}(x)}{\rho(x)}\right|^2 dx + \int_{B_\varepsilon} \left|v^{(i)}(x)\right|^2 |D\psi(x)|^2 dx\right),
\end{aligned}$$

$\rho(x) \leq \delta(\varepsilon)$, $j = 1, 2, 3$. Logo

$$\left|v^{(i)} G^{(j)}\right|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\varepsilon^2 \left|\frac{v^{(i)}}{\rho}\right|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\rho \leq \delta(\varepsilon)} \left|v^{(i)}\right|^2 |D\psi|^2 dx\right),$$

o que implica

$$\left|v^{(i)} G^{(j)}\right|_{L^2(\Omega)} \leq C\left[\varepsilon \left|\frac{v^{(i)}}{\rho}\right|_{L^2(\Omega)} + \left(\int_{\rho \leq \delta(\varepsilon)} \left|v^{(i)}\right|^2 |D\psi|^2 dx\right)^{1/2}\right].$$

Agora, usando a Desigualdade de Hölder, com $p = 3$ e $q = 3/2$, resulta:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\rho \leq \delta(\varepsilon)} \left|v^{(i)}\right|^2 |D\psi|^2 dx\right)^{1/2} &\leq \left\{\left(\int_{\rho \leq \delta(\varepsilon)} \left|v^{(i)}\right|^6 dx\right)^{1/3} \left(\int_{\rho \leq \delta(\varepsilon)} |D\psi|^3 dx\right)^{2/3}\right\}^{1/2} = \\
&= \left|v^{(i)}\right|_{L^6(\Omega)} \varphi(\varepsilon),
\end{aligned}$$

onde $\varphi(\varepsilon) = \left(\int_{\rho \leq \delta(\varepsilon)} |D\psi|^3 dx\right)^{1/3}$. Notemos que $\varphi(\varepsilon) \to 0$ se $\varepsilon \to 0$, pois $D_i\psi^{(i)} \in L^3(\Omega)$ e daí obtemos

$$\left|v^{(i)} G^{(j)}\right|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\varepsilon \left|\frac{v^{(i)}}{\rho}\right|_{L^2(\Omega)} + \left|v^{(i)}\right|_{L^6(\Omega)} \varphi(\varepsilon)\right). \tag{1.9}$$

Usando (1.9) e o Lema (1.12), deduzimos que

$$\begin{aligned}
\left|v^{(i)} G^{(j)}\right|_{L^2(\Omega)} &\leq C\left(\varepsilon \left|\frac{v^{(i)}}{\rho}\right|_{L^2(\Omega)} + \left|v^{(i)}\right|_{L^6(\Omega)} \varphi(\varepsilon)\right) \leq \\
&\leq C\left(\varepsilon \left|\frac{v}{\rho}\right|_{L^2(\Omega)} + \|v\| \varphi(\varepsilon)\right) \leq \\
&\leq C\left(\varepsilon \|v\| + \|v\| \varphi(\varepsilon)\right) = \\
&= C\left(\varepsilon + \varphi(\varepsilon)\right) \|v\|.
\end{aligned}$$

Portanto, do Lema 1.8 e da Desigualdade de Hölder, segue:

$$\begin{aligned}
|b(v,G,v)| = |b(v,v,G)| &\leq \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \left| v^{(i)} D_i v^{(j)} G^{(j)} \right| dx \leq \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{3} \left| D_i v^{(j)} \right|_{L^2(\Omega)} \left| v^{(i)} G^{(j)} \right|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{i,j=1}^{3} \left\| v^{(j)} \right\| \left| v^{(i)} G^{(j)} \right|_{L^2(\Omega)} \leq \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{3} \|v\| \left| v^{(i)} G^{(j)} \right|_{L^2(\Omega)} = \|v\| \sum_{i,j=1}^{3} \left| v^{(i)} G^{(j)} \right|_{L^2(\Omega)} \leq \\
&\leq \|v\| \sum_{i,j=1}^{3} C(\varepsilon + \varphi(\varepsilon)) \|v\| = \|v\|^2 C(\varepsilon + \varphi(\varepsilon)) = \beta \|v\|^2 ,
\end{aligned}$$

com $\beta = C(\varepsilon + \varphi(\varepsilon))$. ■

Capítulo 2

O Problema Homogêneo

O objetivo deste capítulo é estudar a existência e unicidade de solução para o problema homogêneo de Navier-Stokes. Dividiremos o capítulo em três seções: na primeira seção apresentaremos a formulação fraca do problema; na segunda estudaremos a existência de solução e, por fim, estabeleceremos, sob certas condições, a unicidade de solução.

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^3$, cuja fronteira representamos por Γ, a qual admitimos bem regular. Dado um campo vetorial $u = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$ definido em Ω, adotaremos as seguintes notações:

$$
\begin{aligned}
&D_i u = (D_i u^{(1)}, D_i u^{(2)}, D_i u^{(3)}) = \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_i}, \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_i}, \frac{\partial u^{(3)}}{\partial x_i} \right), \ i = 1, 2, 3;\\
&\Delta u = \left(\Delta u^{(1)}, \Delta u^{(2)}, \Delta u^{(3)} \right);\\
&\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{3} D_i u^{(i)} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u^{(3)}}{\partial x_3}.
\end{aligned}
$$

O problema estacionário de Navier-Stokes consiste em determinar um campo vetorial $u = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$ definido em Ω, e p verificando

$$
(P) \quad \left|
\begin{array}{l}
-\nu \Delta u + \displaystyle\sum_{i=1}^{3} u^{(i)} D_i u + \operatorname{grad} p = f \text{ em } \Omega,\\
\operatorname{div} u = 0 \text{ em } \Omega,\\
u = 0 \text{ sobre } \Gamma
\end{array}
\right.
$$

onde u é uma função vetorial e p uma função escalar que representam, respectivamente, a velocidade e pressão do fluido.

2.1 Formulação Fraca do Problema (P)

Procedendo formalmente, multiplicamos $(P)_1$ por $v \in V$ e integramos sobre Ω para encontrarmos:

$$-\int_\Omega \nu \Delta u \ v \ dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} u^{(i)} D_i u \ v \ dx + \int_\Omega \operatorname{grad} p \ v \ dx = \int_\Omega f v dx,$$

isto é:

$$(-\nu \Delta u, v) + \left(\sum_{i=1}^{3} u^{(i)} D_i u, v \right) + (\operatorname{grad} p, v) = (f, v)\,, \ \text{com } v \in V.$$

Agora, usamos a Fórmula de Green e obtemos:

$$\begin{aligned}
(-\nu \Delta u, v) &= -\nu \int_\Omega v(x)\, \Delta u(x)\, dx = \\
&= \nu \int_\Omega \nabla u(x)\, \nabla v(x)\, dx - \nu \int_\Gamma v(x)\, \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma = \\
&= \nu \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_3} \right) dx = \\
&= \nu \int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \nu \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_j} \frac{\partial v^{(i)}}{\partial x_j} \ dx = \nu a(u, v)\,.
\end{aligned}$$

Da definição de $b(u, v, w)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{3} u^{(i)} D_i u, v \right) &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} u^{(i)} D_i u \ v \ dx = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u^{(i)} D_i u^{(j)} v^{(j)} dx = \\
&= b(u, u, v)\,.
\end{aligned}$$

Finalmente, para todo $v \in V$, temos:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{grad} p, v) &= \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3} \right), \left(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)} \right) \right) = \\
&= \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial p}{\partial x_j}, v^{(j)}\right) = -\sum_{j=1}^{3} \left(p, D_j v^{(j)} \right) = -(p, \sum_{j=1}^{3} D_j v^{(j)}) = -(p, \operatorname{div} v) = 0.
\end{aligned}$$

Isto motiva a formulação do seguinte problema:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Dado } f \in V', \text{ encontrar } u \in V \text{ tal que} \\ \nu a(u,v) + b(u,u,v) = \langle f, v \rangle, \ \forall\ v \in V, \end{array} \right.$$

que é a formulação fraca do Problema (P).

2.2 Existência de Solução

A seguir, estudaremos o Problema (P) em sua formulação fraca, cuja solução u denominaremos solução fraca do Sistema Homogêneo de Navier-Stokes.

Teorema 2.1 *Dado f em V', existe u em V solução de*

$$\nu a(u,v) + b(u,u,v) = \langle f, v \rangle, \ \forall\ v \in V. \tag{2.1}$$

Demonstração: A demonstração é baseada no Método de Galerkin, o qual consiste de três etapas: (i) o problema aproximado; (ii) estimativas a priori e (iii) passagem ao limite.

2.2.1 Etapa 1: O Problema Aproximado

Consideremos uma base hilbertiana $\{w_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ de V e seja $V_m = [w_1, ..., w_m]$ o subespaço de V gerado pelos m primeiros vetores de $\{w_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$.

O Problema Aproximado (PA) associado a (2.1) consiste do seguinte:

$$(PA) \left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } u_m : \Omega \to \mathbb{R} \text{ da forma } u_m(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} \xi_{jm} w_j(x), \ \xi_{jm} \in \mathbb{R}, \text{ tal que} \\ \nu a(u_m, v) + b(u_m, u_m, v) = \langle f, v \rangle, \ \forall\ v \in V_m. \end{array} \right. \tag{2.2}$$

No Lema 1.9, consideremos $X = V_m$ e seja $P = P_m : V_m \to V_m$, definida por: $P_m(u)$ é o vetor de V_m satisfazendo a identidade

$$((P_m(u), v)) = \nu a(u,v) + b(u,u,v) - \langle f, v \rangle, \ \forall\ v \in V_m.$$

O próximo passo é verificar que P_m é contínua e $((P_m(u), u)) > 0$.

(i) P_m é contínua.

De fato: Se u está próximo de u_0, isto é, $|u-u_0|<\delta$, então

$$|(u,u,v)-(u_0,u_0,v)| = |(u-u_0,u-u_0,0)| \leq$$
$$\leq |u-u_0| + |u-u_0| < 2\delta.$$

Sendo $\dim V_m < \infty$, temos $V_m \simeq V'_m \simeq V''_m$ e, conseqüentemente:

$$\begin{aligned}
\|P_m(u) - P_m(u_0)\| &= \sup_{\substack{\|v\|\leq 1 \\ v\in V_m}} |((P_m(u) - P_m(u_0), v))| = \\
&= \sup_{\substack{\|v\|\leq 1 \\ v\in V_m}} |((P_m(u), v)) - ((P_m(u_0), v))| = \\
&= \sup_{\substack{\|v\|\leq 1 \\ v\in V_m}} |\nu a(u,v) - \nu a(u_0,v) + b(u,u,v) - b(u_0,u_0,v)| \leq \\
&\leq |\nu| \sup_{\substack{\|v\|\leq 1 \\ v\in V_m}} |a(u,v) - a(u_0,v)| + \sup_{\substack{\|v\|\leq 1 \\ v\in V_m}} |b(u,u,v) - b(u_0,u_0,v)|.
\end{aligned}$$

Logo:

$$\|P_m(u) - P_m(u_0)\| \leq \epsilon,$$

pois $a(u,v)$ é contínua, o que implica que

$$|a(u,v) - a(u_0,v)| < \frac{\epsilon}{2|\nu|}$$

sempre que $|(u,v)-(u_0,v)|<\delta$; e $|(u,u,v)-(u_0,u_0,v)|<2\delta$ acarreta

$$|b(u,u,v) - b(u_0,u_0,v)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

(ii) $((P_m(u), u)) > 0$.

Com efeito: usando o Lema 1.8 e a hipótese de $f \in V'$ obtemos

$$\begin{aligned}
((P_m(u), u)) &= \nu a(u,u) + b(u,u,u) - \langle f, u\rangle_{V',V} = \\
&= \nu a(u,u) - \langle f, u\rangle_{V',V} \geq \nu \|u\|_V^2 - \|f\|_{V'} \|u\|_V.
\end{aligned}$$

resultando em,

$$((P_m(u), u)) \geq \|u\|_V (\nu \|u\|_V - \|f\|_{V'}).$$

Daí, segue que $((P_m(u), u)) > 0$ para $\|u\| = k$ e k suficientemente grande: mais precisamente $k > \frac{1}{\nu} \|f\|_{V'}$. Com isto, as hipóteses do Lema 1.9 são satisfeitas e, portanto, existe u_m solução de (2.2).

2.2.2 Etapa 2: Estimativas a Priori

Façamos em $(2.2)_2$ $v = u_m \in V_m$ e obtemos

$$\nu a(u_m, u_m) + b(u_m, u_m, u_m) = \langle f, u_m \rangle,$$

usando o Lema 1.8, temos

$$\nu \|u_m\|_V^2 = \langle f, u_m \rangle,$$

e como $\langle f, u_m \rangle \leq \|f\|_{V'} \|u_m\|_V$, chegamos a

$$\|u_m\|_V \leq \frac{1}{\nu} \|f\|_{V'}. \tag{2.3}$$

2.2.3 Etapa 3: Passagem ao Limite

Segue de (2.3) que (u_m) é limitada em $V \subset (H_0^1(\Omega))^3$, que é reflexivo, então $\bar{B}_V$ é fracamente compacta, e isto acarreta que (u_m) possui uma subsequência, ainda denotada por (u_m), fracamente convergente, isto é,

$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } V. \tag{2.4}$$

Sendo $V \subset (H_0^1(\Omega))^3 \hookrightarrow (H^1(\Omega))^3$, temos que (u_m) é limitada em $(H^1(\Omega))^3$ e o Teorema de Rellich nos diz que $(H^1(\Omega))^3$ está imerso compactamente em $(L^2(\Omega))^3$. Assim, existe uma subsequência de (u_m) que denotamos da mesma forma tal que

$$u_m \to u \text{ em } \left(L^2(\Omega)\right)^3. \tag{2.5}$$

Pela Proposição 1.3, existe ainda uma subsequência de modo que

$$u_m \to u \ q.s \text{ em } \Omega. \tag{2.6}$$

De (2.4), segue que

$$a\left(u_m, v\right) \to a\left(u, v\right), \ \forall \ v \in V_m \tag{2.7}$$

e para estabelecer a convergência

$$b\left(u_m, u_m, v\right) \to b\left(u, u, v\right), \ \forall \ v \in V_m \tag{2.8}$$

usaremos o Lema 1.8. De fato:

$$b\left(u_m, u_m, v\right) = -b\left(u_m, v, u_m\right) = -\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u_m^{(i)} D_i v^{(j)} u_m^{(j)} dx \longrightarrow$$

$$\longrightarrow -\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u^{(i)} D_i v^{(j)} u^{(j)} \ dx = -b\left(u, v, u\right) = b\left(u, u, v\right).$$

O que precisamos mostrar, na verdade, é a convergência

$$\int_\Omega u_m^{(i)} D_i v^{(j)} u_m^{(j)} \ dx \longrightarrow \int_\Omega u^{(i)} D_i v^{(j)} u^{(j)} dx.$$

Para isto, mostremos primeiro que

$$u_m^{(i)} u_m^{(j)} \text{ é limitada em } L^2\left(\Omega\right), \ 1 \leq i, j \leq 3. \tag{2.9}$$

De fato, segue de (2.3) que (u_m) é limitada em V e assim, $u_m^{(i)}, u_m^{(j)}$ são limitadas em $H_0^1\left(\Omega\right) \hookrightarrow L^6\left(\Omega\right) \hookrightarrow L^4\left(\Omega\right)$. Logo,

$$\int_\Omega \left|u_m^{(i)} u_m^{(j)}\right|^2 dx = \int_\Omega \left|u_m^{(i)}\right|^2 \left|u_m^{(j)}\right|^2 dx$$

e usando a Desigualdade de Hölder na última igualdade, temos

$$\int_\Omega \left|u_m^{(i)} u_m^{(j)}\right|^2 dx \leq \left(\int_\Omega \left|u_m^{(i)}\right|^4 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left|u_m^{(j)}\right|^4 dx\right)^{1/2} =$$

$$= \left\|u_m^{(i)}\right\|_{L^4(\Omega)}^2 \left\|u_m^{(j)}\right\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C.$$

Por (2.9) e passando a uma subseqüência, se necessário for, podemos admitir que

$$u_m^{(i)} u_m^{(j)} \rightharpoonup \chi_{ij} \text{ em } L^2(\Omega) . \tag{2.10}$$

Notemos que: $\chi_{ij} = u^{(i)} u^{(j)}$. Com efeito: segue de (2.9) que $\left| u_m^{(i)} u_m^{(j)} \right|_{L^2(\Omega)} \leq C$, e em (2.6) temos $u_m \rightarrow u$ $q.s$ em Ω, logo $u_m^{(i)} \rightarrow u^{(i)}$ $q.s$ em Ω, implicando $u_m^{(i)} u_m^{(j)} \rightarrow u^{(i)} u^{(j)}$ $q.s$ em Ω. Assim as hipóteses do Lema de Lions são satisfeitas, e portanto

$$u_m^{(i)} u_m^{(j)} \rightharpoonup u^{(i)} u^{(j)} \text{ em } L^2(\Omega) . \tag{2.11}$$

De (2.10), (2.11) e a unicidade do limite, temos $\chi_{ij} = u^{(i)} u^{(j)}$. Sendo $v^{(j)} \in H_0^1(\Omega)$, então $D_i v^{(j)} \in L^2(\Omega)$, e portanto obtemos

$$\left(D_i v^{(j)}, u_m^{(i)} u_m^{(j)} \right)_{L^2(\Omega)} \rightarrow \left(D_i v^{(j)}, u^{(i)} u^{(j)} \right)_{L^2(\Omega)},$$

com esta convergência, temos mostrado (2.8).

Fixado m_0 e considerando $m_0 \leq m$, temos que:

$$\nu a(u_m, v) + b(u_m, u_m, v) = \langle f, v \rangle , \forall \; v \in V_{m_0}.$$

Com as convergências (2.7) e (2.8), podemos passar o limite quando $m \rightarrow \infty$ na última equação para obtermos

$$\nu a(u, v) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle , \forall \; v \in V_{m_0}, \forall \; m_0. \tag{2.12}$$

Como as combinações lineares finitas dos $\{w_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ são densas em V, temos que (2.12) vale para todo $v \in V$, isto é,

$$\nu a(u, v) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle , \forall \; v \in V. \; \blacksquare$$

2.3 Unicidade de Solução

Mostraremos agora um teorema que garante, sob certas condições, a unicidade de solução para o Problema Homogêneo de Navier-Stokes.

Teorema 2.2 *Se* $n = 3$ *e* ν *suficientemente grande ou* f *suficientemente pequeno de modo que*

$$\nu^2 \geq C \|f\|_{V'} . \tag{2.13}$$

Então existe uma única solução u *de*

$$\nu a (u, v) + b (u, u, v) = \langle f, v \rangle , \; \forall \; v \in V. \tag{2.14}$$

A contante C *em (2.13) é a mesma da demonstração do Lema 1.7.*

Demonstração: Sejam u e $\hat{u}$ duas soluções de (2.14), então

$$\nu a (u, v) + b (u, u, v) = \langle f, v \rangle , \; \forall \; v \in V,$$

$$\nu a (\hat{u}, v) + b (\hat{u}, \hat{u}, v) = \langle f, v \rangle , \; \forall \; v \in V.$$

Consideremos $w = u - \hat{u}$ e obtemos

$$\nu a (w, v) + b (u, u, v) - b (\hat{u}, \hat{u}, v) = 0, \; \forall \; v \in V,$$

ou ainda,

$$\nu a (w, v) + b (u, w, v) + b (w, u, v) - b (w, w, v) = 0, \; \forall \; v \in V. \tag{2.15}$$

Agora, fazendo $v = w$ em (2.15) e usando novamente o Lema 1.8, obtemos

$$\nu \|w\|_V^2 + b (w, u, w) = 0,$$

resultando em,

$$\nu \|w\|_V^2 \leq |b (w, u, w)| .$$

Assim, pelo Lema 1.7

$$\nu \|w\|_V^2 \leq C \|w\|_V^2 \|u\|_V . \tag{2.16}$$

Como temos

$$\nu a (u, v) + b (u, u, v) = \langle f, v \rangle_{V', V} , \; \forall \; v \in V,$$

façamos $v = u$, para obtermos

$$\nu \|u\|_V^2 = \langle f, u \rangle \leq \|f\|_{V'} \|u\|_V ,$$

isto é,

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\nu} \|f\|_{V'} \tag{2.17}$$

substituindo (2.17) em (2.16), obtemos:

$$\nu \|w\|_V^2 \leq \frac{C}{\nu} \|w\|_V^2 \|f\|_{V'},$$

ou melhor,

$$\|w\|_V^2 \left(\nu - \frac{C}{\nu} \|f\|_{V'} \right) \leq 0.$$

Desta forma, usando a hipótese (2.13), concluimos que $w = 0$ e isto significa que $u = \hat{u}$. Portanto, obtemos a unicidade para o Sistema de Navier-Stokes.

Capítulo 3

O Problema Não Homogêneo

Neste capítulo estamos interessados no estudo do problema não homogêneo de Navier-Stokes, ainda no caso em que Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^3$ com fronteira Γ bastante regular. O método consiste basicamente em transformar o problema não homogêneo em um problema homogêneo equivalente e, usando o mesmo procedimento do capítulo 2, mostrar a existência e unicidade de solução.

Consideremos um campo vetorial $\psi = \left(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(3)}\right)$ com as seguintes propriedades:

$$\psi^{(i)} \in H^2(\Omega), \ \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial x_j} \in L^3(\Omega), \ \psi^{(i)} \in L^\infty(\Omega). \tag{3.1}$$

Com auxílio das Imersões de Sobolev (Teorema 1.2), observamos que a primeira condição em (3.1) implica nas outras duas. De fato: lembremos que

$$H^2(\Omega) = W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega), \text{ pois } \frac{1}{2} - \frac{2}{3} < 0,$$

de modo que: se $\psi^{(i)} \in H^2(\Omega)$, então $\psi^{(i)} \in L^\infty(\Omega)$.

Agora, se

$$\psi^{(i)} \in H^2(\Omega), \text{então } \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial x_j} \in H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega), \text{ pois } \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} > 0,$$

como $L^6(\Omega) \hookrightarrow L^3(\Omega)$ temos que:

$$\psi^{(i)} \in H^2(\Omega) \text{ acarreta } \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial x_j} \in L^3(\Omega).$$

Observemos que sendo $F = \text{rot}\ \psi$, resulta de (3.1) que

$$F \in \left(H^1(\Omega)\right)^3. \tag{3.2}$$

Teorema 3.1 *Suponhamos* $f = \left(f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}\right)$ *com* $f^{(i)} \in H^{-1}(\Omega)$, $i = 1,2,3$ *e* $F = \text{rot}\,\psi$, $\psi^{(i)}$ *verificando (3.1). Então, existem* $U \in \left(H^1(\Omega)\right)^3$ *e uma distribuição* $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *satisfazendo*

$$(P_1) \quad \left| \begin{array}{l} -\nu\Delta U + \displaystyle\sum_{i=1}^{3} U^{(i)} D_i U = f - grad\ p \ \text{ em } \Omega, \\ \operatorname{div} U = 0 \ \text{ em } \Omega, \\ U - F \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3. \end{array} \right.$$

Notemos que a condição *não homogênea* $(P_1)_3$ significa que:

$$U^{(i)} = F^{(i)} \text{ sobre } \Gamma,\ i = 1, 2, 3.$$

Demonstração: Trabalharemos com o mesmo método utilizado para provar o Teorema 2.1 e iniciaremos com a formulação fraca do Problema (P_1).

3.1 Formulação Fraca do Problema (P_1)

De acordo com o Lema (1.10), existe um vetor G com as seguintes propriedades:

$$\left| \begin{array}{l} G \in \left(H^1(\Omega)\right)^3, \\ \operatorname{div} G = 0 \text{ em } \Omega, \\ G = F \text{ sobre } \Gamma, \end{array} \right. \tag{3.3}$$

e consideremos $u = U - G$.

Fazendo $U = u + G$ em $(P_1)_1$, obtemos

$$-\nu\Delta(u+G) + \sum_{i=1}^{3}(u^{(i)} + G^{(i)})(D_i u + D_i G) = f - \operatorname{grad} p,$$

ou seja,

$$-\nu\Delta u - \nu\Delta G + \sum_{i=1}^{3} u^{(i)} D_i u + \sum_{i=1}^{3} u^{(i)} D_i G + \sum_{i=1}^{3} G^{(i)} D_i u + \sum_{i=1}^{3} G^{(i)} D_i G = f - \operatorname{grad} p.$$

Desta forma,

$$-\nu\Delta u+\sum_{i=1}^{3}u^{(i)}D_iu+\sum_{i=1}^{3}u^{(i)}D_iG+\sum_{i=1}^{3}G^{(i)}D_iu=\tilde{f}-\operatorname{grad}p, \tag{3.4}$$

onde $\widetilde{f}=f+\nu\Delta G-\sum\limits_{i=1}^{3}G^{(i)}D_iG$ está em $\left(H^{-1}(\Omega)\right)^3$. De fato: basta observarmos que $f\in\left(H^{-1}(\Omega)\right)^3$, $G\in\left(H^{1}(\Omega)\right)^3$ e $\Delta G\in\left(H^{-1}(\Omega)\right)^3$.

Por outro lado,

$$\operatorname{div}u=0. \tag{3.5}$$

Pois, $\operatorname{div}u=\operatorname{div}(U-G)=\operatorname{div}U-\operatorname{div}G=0$.

Em $(P_1)_3$ temos $U-F\in\left(H_0^1(\Omega)\right)^3$, mas com $U=u+G$ obtemos $u+G-F\in\left(H_0^1(\Omega)\right)^3$, como $G=F$ sobre Γ conseguimos

$$u\in\left(H_0^1(\Omega)\right)^3. \tag{3.6}$$

Segue de (3.5) e (3.6) que $u\in V$, onde $V=\left\{v\in\left(H_0^1(\Omega)\right)^3;\operatorname{div}v=0\right\}$. Portanto, temos o seguinte

Problema: Encontrar $u\in V$ tal que

$$\nu a(u,v)+b(u,u,v)+b(u,G,v)+b(G,u,v)=\left\langle\widetilde{f},v\right\rangle,\ \forall\ v\in V. \tag{3.7}$$

que é a *formulação fraca* do problema (P_1).

O próximo passo é garantir para (3.7) a existência de solução.

3.2 Existência de Solução

O método de demonstração do Teorema 2.1, nos assegura a existência de u solução de (3.7) se pudermos escolher G de forma que

$$\begin{aligned}((P(v),v))&=\nu a(v,v)+b(v,v,v)+b(v,G,v)+b(G,v,v)-\left\langle\tilde{f},v\right\rangle\\&\geq\alpha\|v\|^2,\ \alpha>0,\ \forall\ v\in V.\end{aligned}$$

Mas, podemos garantir a escolha de G verificando (3.3) pelo Lema 1.10, de modo que $|b(v,G,v)| \leq \beta \|v\|^2$ para qualquer $\beta > 0$. Supondo $\nu > \beta$, temos que $\gamma = \nu - \beta > 0$ e considerando $\gamma > \dfrac{||\tilde{f}||_{V'}}{\|v\|_V}$ obtemos

$$
\begin{aligned}
((P(v), v)) &= \nu a(v,v) + b(v,G,v) - \left\langle \tilde{f}, v \right\rangle \geq \\
&\geq \nu \|v\|_V^2 - \beta \|v\|_V^2 - ||\tilde{f}||_{V'} \|v\|_V = \\
&= \left(\gamma - \frac{||\tilde{f}||_{V'}}{\|v\|_V} \right) \|v\|_V^2 = \alpha \|v\|^2, \text{ com } \alpha = \gamma - \frac{||\tilde{f}||_{V'}}{\|v\|_V} > 0.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, garantimos a existência de solução para o problema aproximado:

$$
\nu a(u_m, v) + b(u_m, u_m, v) + b(u_m, G, v) + b(G, u_m, v) = \left\langle \tilde{f}, v \right\rangle, \; \forall \; v \in V_m. \tag{3.8}
$$

3.3 Estimativas a Priori

Fazendo em (3.8), $v = u_m(x) \in V_m$ deduzimos que

$$
\nu a(u_m, u_m) + b(u_m, u_m, u_m) + b(u_m, G, u_m) + b(G, u_m, u_m) = \left\langle \tilde{f}, u_m \right\rangle.
$$

Pelo Lema 1.10, obtemos $b(u_m, G, u_m) \geq -\beta \|u_m\|^2$ e usando o Lema 1.8, chegamos a

$$
\left\langle \tilde{f}, u_m \right\rangle_{V',V} = \nu a(u_m, u_m) + b(u_m, G, u_m) \geq \nu \|u_m\|_V^2 - \beta \|u_m\|_V^2,
$$

o que implica,

$$
(\nu - \beta) \|u_m\|_V^2 \leq \left\langle \tilde{f}, u_m \right\rangle_{V',V} \leq ||\tilde{f}||_{V'} \|u_m\|_V,
$$

considerando $\nu > \beta$, onde β é dada pelo Lema 1.10 temos

$$
\|u_m\|_V \leq \frac{1}{(\nu - \beta)} ||\tilde{f}||_{V'}. \tag{3.9}
$$

3.4 Passagem ao Limite

Segue de (3.9) que (u_m) é limitada em V, assim temos

$$
u_m \rightharpoonup u \text{ em } V. \tag{3.10}
$$

Sendo $V \subset \left(H_0^1(\Omega)\right)^3 \hookrightarrow \left(H^1(\Omega)\right)^3$, temos que (u_m) é limitada em $\left(H^1(\Omega)\right)^3$ e o Teorema de Rellich garante a existência uma subsequência de (u_m), que denotamos da mesma forma, tal que

$$u_m \to u \text{ em } \left(L^2(\Omega)\right)^3 \text{ e } q.s. \text{ em } \Omega. \tag{3.11}$$

No caso homogêneo, já obtivemos as convergências:

$$a(u_m, v) \to a(u, v), \ \forall\ v \in V_m, \tag{3.12}$$

e

$$b(u_m, u_m, v) \to b(u, u, v), \ \forall\ v \in V_m \tag{3.13}$$

e, agora, mostraremos que:

$$b(u_m, G, v) \to b(u, G, v), \ \forall\ v \in V_m, \tag{3.14}$$

e

$$b(G, u_m, v) \to b(G, u, v), \ \forall\ v \in V_m. \tag{3.15}$$

Para mostrar (3.14), observemos inicialmente que $(u_m^{(i)})$ é limitada em $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ e como $v \in V_m$ teremos $v^{(j)} \in L^4(\Omega)$. Logo, pela Desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|u_m^{(i)} v^{(j)}\right|^2 dx = \int_\Omega \left|u_m^{(i)}\right|^2 \left|v^{(j)}\right|^2 dx \leq \\
\leq \left(\int_\Omega \left|u_m^{(i)}\right|^4 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left|v^{(j)}\right|^4 dx\right)^{1/2} = \\
= \left\|u_m^{(i)}\right\|_{L^4(\Omega)}^2 \left\|v^{(j)}\right\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_\Omega u_m^{(i)} D_i G^{(j)} v^{(j)} dx \longrightarrow \int_\Omega u^{(i)}\ D_i G^{(j)} v^{(j)} dx$$

e, portanto:

$$\begin{aligned}
b(u_m, G, v) = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u_m^{(i)} D_i G^{(j)} v^{(j)}\ dx \longrightarrow \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u^{(i)}\ D_i G^{(j)}\ v^{(j)}\ dx = \\
= b(u, G, v).
\end{aligned}$$

A demonstração de (3.15) é análoga a anterior. Basta observarmos que $b\left(G,u_m,v\right) = -b\left(G,v,u_m\right)$.

Fixado m_0 e considerando $m_0 \leq m$, resulta:

$$\nu a\left(u_m,v\right) + b\left(u_m,u_m,v\right) + b\left(u_m,G,v\right) + b\left(G,u_m,v\right) = \left\langle \tilde{f},v\right\rangle,\ \forall\ v \in V_{m_0}.$$

Podemos agora, passar o limite quando $m \to \infty$ na equação anterior para obtermos

$$\nu a\left(u,v\right) + b\left(u,u,v\right) + b\left(u,G,v\right) + b\left(G,u,v\right) = \left\langle \tilde{f},v\right\rangle,\ \forall\ v \in V_{m_0},\ \forall\ m_0 \tag{3.16}$$

e sendo as combinações lineares finitas dos $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ densas em V, temos que (3.16) vale para todo $v \in V$, isto é,

$$\nu a\left(u,v\right) + b\left(u,u,v\right) + b\left(u,G,v\right) + b\left(G,u,v\right) = \left\langle \tilde{f},v\right\rangle,\ \forall\ v \in V.\ \blacksquare$$

3.5 Unicidade de Solução

A seguir mostraremos, sob certas condições, a unicidade de solução para o Problema Não Homogêneo de Navier-Stokes.

Teorema 3.2 *Suponhamos $n = 3$ e que a norma de F em $\left(L^3\left(\Omega\right)\right)^3$ é suficientemente pequena de modo que:*

$$\left|b\left(v,F,v\right)\right| \leq \frac{\nu}{2}\left\|v\right\|^2,\ \forall\ v \in V, \tag{3.17}$$

e ν é suficientemente grande tal que

$$\nu^2 > 4C||\tilde{f}||_{V'}, \tag{3.18}$$

onde C é uma constante e $\tilde{f} = f + \nu\Delta F - \sum_{i=1}^{3} F_i D_i F$. Então existe uma única solução U do problema:

$$(P_1)\ \left|\begin{array}{l} -\nu\Delta U + \sum_{i=1}^{3} U^{(i)} D_i U = f - grad\ p\ \text{em}\ \Omega, \\ \operatorname{div} U = 0\ \text{em}\ \Omega, \\ U = F\ \text{sobre}\ \Gamma. \end{array}\right. \tag{3.19}$$

A função p é única a menos de constante.

Demonstração: Se U_1 é solução de (P_1), então $u_1 = U_1 - F$ é uma solução de

$$\nu a(u,v) + b(u,u,v) + b(u,G,v) + b(G,u,v) = \left\langle \tilde{f}, v \right\rangle, \forall\ v \in V. \tag{3.20}$$

Consideremos $G = F$ e obtemos

$$\nu a(u_1,v) + b(u_1,u_1,v) + b(u_1,F,v) + b(F,u_1,v) = \left\langle \tilde{f}, v \right\rangle, \forall\ v \in V. \tag{3.21}$$

Tomando $v = u_1$ em (3.21) e aplicando o Lema (1.8), teremos

$$\nu \|u_1\|_V^2 + b(u_1,F,u_1) = \left\langle \tilde{f}, u_1 \right\rangle$$

implicando na seguinte desigualdade

$$\nu \|u_1\|_V^2 \le |b(u_1,F,u_1)| + \left| \left\langle \tilde{f}, u_1 \right\rangle \right|,$$

usando a hipótese (3.17) e o fato de $\tilde{f}$ ser linear e contínua, deduzimos que:

$$\nu \|u_1\|_V^2 \le \frac{\nu}{2} \|u_1\|_V^2 + \left\| \tilde{f} \right\|_{V'} \|u_1\|_V ,$$

e daí

$$\left(\nu - \frac{\nu}{2}\right) \|u_1\|_V^2 \le ||\tilde{f}||_{V'} \|u_1\|_V ,$$

logo,

$$\|u_1\|_V \le \frac{2}{\nu} ||\tilde{f}||_{V'}. \tag{3.22}$$

Suponhamos U_0 e U_1 soluções de (P_1) e sejam $u_0 = U_0 - F$, $u_1 = U_1 - F$, $w = u_0 - u_1$, u_0 e u_1 satisfazendo (3.20) com $G = F$:

$$\nu a(u_0,v) + b(u_0,u_0,v) + b(u_0,F,v) + b(F,u_0,v) = \left\langle \tilde{f}, v \right\rangle,\ \forall\ v \in V.$$
$$\nu a(u_1,v) + b(u_1,u_1,v) + b(u_1,F,v) + b(F,u_1,v) = \left\langle \tilde{f}, v \right\rangle,\ \forall\ v \in V.$$

Tomando $v = w$ nestas equações e subtraindo, temos

$$\nu a(w,w) + b(u_0,u_0,w) - b(u_1,u_1,w) + b(u_0,F,w) - b(u_1,F,w) +$$
$$+ b(F,u_0,w) - b(F,u_1,w) = 0.$$

Expandindo, isto é, $w = u_0 - u_1$, obtemos

$$\nu \|w\|^2 = -b(w, u_1, w) - b(w, F, w)$$

ou melhor,

$$\nu \|w\|^2 \leq |b(w, u_1, w)| + |b(w, F, w)|$$

do Lema (1.7) e das desigualdades (3.17) e (3.22), segue

$$\nu \|w\|^2 \leq C \|w\|^2 \frac{2}{\nu} ||\tilde{f}||_{V'} + \frac{\nu}{2} \|w\|^2 .$$

Assim,

$$\left(\frac{\nu}{2} - C\frac{2}{\nu} ||\tilde{f}||_{V'} \right) \|w\|^2 \leq 0,$$

sendo $\nu^2 > 4C||\tilde{f}||_{V'}$, temos $\|w\| = 0$. Logo $u_0 = u_1$ acarretando $U_0 = U_1$.

Se $u_0 = u_1$, é claro que $\operatorname{grad} p_0 = \operatorname{grad} p_1$ e a diferença entre p_0 e p_1 é constante.■

Referências Bibliográficas

[1] Adams, Robert A., *Sobolev Spaces,* New York, Academic Press, 1975.

[2] Brézis, H., *Analyse Fonctionelle, Théorie et Aplications*, Paris, Masson, 1983.

[3] Carvalho, Ricardo Rodrigues, *Análise Matemática das Equações de Navier-Stokes: Existência, Unicidade e Periodicidade.* João Pessoa: DM/UFPB, 2000.

[4] Cavalcante, M. M., Cavalcante, V. N. D., *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*, vol. 1 e vol. 2. Maringá: Universidade Estadual de Maringá. Notas. Maringá, 2000.

[5] Goffman, C., Pedrick, G., *First Course in Functional analysis*, United States, Prentice-Hall, 1965.

[6] Hopf, E., *On nonlinear partial differential equations, Lecture Series of the Symposium on Partial Differential Equations*, Berkeley, 1955, the Univ. of Kansas(1957), p.1-29.

[7] Lima, E. L., *Curso de Análise vol.2*, Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[8] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis With Apllications.* New York, Wiley e Sons, 1989.

[9] Lions, J. L., *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites Non Lineares*, Paris, Dunod, 1969.

[10] Medeiros, L. A., *Sobre o modelo matemático do sistema de Navier-stokes.* Notas de aula, IM-UFRJ.

[11] Medeiros, L. A. & Miranda, M.M., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às EDP*, Rio de Janeiro, I. M., 1989.

[12] Medeiros, L. A. & Rivera, P.H., *Textos e Métodos Matemáticos: Espaços de Sobolev e EDP*, Rio de Janeiro, I. M., 1975.

[13] Medeiros, L. A., Mello, E. A., *A Integral de Lebesgue*, Rio de Janeiro, I. M.,2003.

[14] Medeiros, L. A., *Equações Diferenciais Parciais,* Rio de Janeiro, 1981.

[15] Temam, R., *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, New York, North-Holland, 1979.