José Anderson Valença Cardoso

O Espectro do Operador de Schrödinger e Aplicações

João Pessoa
2007

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

O Espectro do Operador de Schrödinger e Aplicações

por

José Anderson Valença Cardoso *

sob orientação do

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro/2007
João Pessoa-PB

*Este trabalho contou com suporte financeiro da Capes.

V152e Valença, José Anderson
O Espectro do Operador de Schrödinger e Aplicações/ José Anderson Valença. - João Pessoa, 2007.
134 f.
Orientador: Everaldo Souto de Medeiros.
Dissertação (Mestrado em Matemática) - UFPB/ CCEN/ Matemática.
1. Análise Matemática

UFPB/CCEN/Matemática CDU: 517

O Espectro do Operador de Schrödinger e Aplicações

por

José Anderson Valença Cardoso

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise Matemática

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG

Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva - UNICAMP

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

26 de Fevereiro de 2007

A minha mãe Avilete e ao meu tio Aluísio (*ambos in memoriam*).

Agradecimentos

Gostaria de deixar registrados os meus agradecimentos a cada um que, direta ou indiretamnte, contribuiu para a realização deste trabalho. Como infelizmente é impossível descrever todos, enumerarei aqueles que o espaço me permite.

- *A essa força que a razão não consegue explicar e que denominamos por Deus;*
- *Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, por me proporcionar a oportunidade de fazer parte deste; e à CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - pelo apoio financeiro;*
- *Ao meu orientador Prof. Everaldo Souto de Medeiros, o qual me deixa a vontade para dizer que não foi somente meu orientador, mas um amigo e companheiro de trabalho;*
- *Aos Professores Claudianor e Francisco Odair, por participarem da banca examinadora;*
- *As três mulheres da minha vida. Minhas duas irmãs e minha namorada: Alexandra Valença, Andrea Valença e Georgiana Garrido, respectivamente;*
- *Ao meu pai: Noelzo; meus tios Hélio e Aucilene e Euvaldo e Ameriza; ao meu irmão Anselmo; e a todos os meus familiares;*
- *Ao casal Paulo e Solange Rabelo pelos incentivos e apoios;*
- *A todos os meus amigos, colegas de graduação e pós-graduação. Em particular, aqueles que jamais poderia deixar de citar: Thiago, Naldisson, Fábio, Unaldo...;*
- *Aos professores de graduação: Natanael Oliveira, Vasco Garcia, Alan Almeida e Valdenberg Araújo;*
- *Ao professores da pós-graduação. De modo especial a Fernando Xavier, Rodrigo Ristow, Pedro Hinojosa, e ainda mais especialmente, a João Marcos, Roberto Bedregal e Nelson Nery;*

Resumo

Nosso interesse neste trabalho é apresentar um estudo qualitativo sobre o espectro do operador de Schrödinger. Veremos que, sob algumas hipóteses sobre o potencial, é possível caracterizar os espectros discreto e essencial deste operador. Utilizando estas caracterizações e argumentos variacionais, estabeleceremos a existência de solução para algumas classes de problemas elípticos semi-lineares.

Palavras-Chave: operador de Schrödinger, teoria espectral, operadores não limitados, potencial periódico, assintoticamente linear, método variacional, superlinear, problemas elípticos, condição de Cerami, concentração de compacidade.

Abstract

Our interest in this work is to present a qualitative study on the spectrum of Schrödinger operator. We will see that under some hypotheses on the potential it is possible to characterize the discrete and essential spectrums of this operator. Using these characterizations and variacionais arguments we will establish existence of solution for some class of semilinear elliptic problems.

Keywords: Schrödinger operator, spectral theory, unbounded operator, periodic potential, asymptotically linear, variational methods, superlinear, elliptic problems, Cerami condition, concentration compactness.

Conteúdo

Notações

$\mathbb{R}^+$	conjunto dos números reais não negativos
$B(x, r)$	bola aberta de centro x e raio r
$B[x, r]$	bola fechada de centro x e raio r
$M^\perp$	ortogonal de M
$D(A)$	domínio do operador linear A
$\ker(A)$	núcleo do operador linear A
$\mathrm{Im}(A)$	imagem do operador linear A
$G(A)$	gráfico do operador linear A
$\rho(A)$	conjunto resolvente do operador linear A
$\sigma(A)$	espectro do operador linear A
$\sigma_{ess}(A)$	espectro essencial do operador linear A
$\sigma_{disc}(A)$	espectro discreto do operador linear A
$\mathcal{L}(X, Y)$	espaço das aplicações lineares e limitadas de X em Y
$C(X, Y)$	espaço das aplicações contínuas de X em Y
X'	espaço dual de X

$C^1(X,\mathbb{R})$	espaço do funcionais continuamente diferenciáveis sobre X
$\rightharpoonup, \to$	convergência fraca e forte respectivamente
$\hookrightarrow$	imersão de um espaço em outro
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	aberto
$\omega \subset\subset \Omega$	aberto compactamente contido; $\overline{\omega}$ compacto e $\overline{\omega} \subset \Omega$
q.t.p.	quase toda parte
$\mathrm{med}(\Omega)$	medida do conjunto Ω
$\mathrm{supp}(u)$	suporte da função u, $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$
$\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ ou u_{x_i}	derivada parcial de u em relação a x_i
$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	gradiente de u
$\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	laplaciano de u
$\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \partial_\eta u = \eta \cdot \nabla u$	derivada normal exterior
$\cdot$ ou $(\,,\,)$	produto interno
$C(\Omega)$	funções contínuas definidas de Ω em $\mathbb{R}$
$C_0(\Omega)$	funções contínuas com suporte compacto em Ω
$C^k(\Omega)$	funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω, $k \in \mathbb{N}$
$C^\infty(\Omega) = \displaystyle\bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$	
$C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$	
$C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$	

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ mensurável } ; \int_\Omega |u|^p dx < \infty \right\},\ 1 \leq p < \infty$$

$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{1/p}$ norma do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável ; $|u(x)| \leq C$ q.t.p. sobre Ω para algum $C > 0\}$

$\|u\|_\infty = \inf\{C > 0; |u(x)| \leq C$ q.t.p. em $\Omega\}$ norma do espaço $L^\infty(\Omega)$

$L^p_{loc}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega')$ para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$ $\}$, $1 \leq p \leq \infty$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, g_1, g_2, \ldots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \int_\Omega u \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall i = 1, \ldots, N \end{array} \right\},$$

$1 \leq p \leq \infty$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ denota-se $g_i := u_{x_i}$

$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}$ norma do espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

$W^{1,p}_{loc}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega')$ para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$ $\}$, $1 \leq p \leq \infty$

$H^1 = W^{1,2}(\Omega)$

$H^2(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega); \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega),\ i = 1, \ldots, N\right\}$

$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \|u\|_{H^1(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^N \left\| \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}$ norma de $H^2(\Omega)$

$W^{1,p}_0(\Omega)$ completamento de $C_0^\infty(\Omega)$, na norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, $1 \leq p < \infty$

$p^* = \dfrac{Np}{N-p}$, $1 \leq p < N$ expoente crítico de Sobolev

$\mathcal{D}^{1,2}(\Omega) = \left\{u \in L^{2^*}(\Omega) : \nabla u \in (L^2(\Omega))^N\right\}$, $1 < p < N$

$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ norma do espaço $\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)$

$\mathcal{D}^{1,2}_0(\Omega)$ completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma $\|\cdot\|_{\mathcal{D}^{1,2}}$

$f = o(g)$ quando $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} |f(x)|/|g(x)| = 0$

$f = O(g)$ quando $x \to x_0$, se existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ para $x \to x_0$

Introdução

A teoria da equação de Schrödinger iniciou-se com os artigos de Erwin Schrödinger [19], publicados em 1926. Nestes trabalhos, ele formulou a equação básica da mecânica quântica, calculou os Bound States do átomo de hidrogênio e desenvolveu uma forma simples da teoria de perturbação, a qual ele aplicou para estudar os efeitos Stark e Zeeman. A teoria matemática da mecânica quântica e do operador de Schrödinger foi tratado no livro de John von Neumann [21], publicado em 1932. Neste livro, von Neumann apresentou a estrutura dos espaços de Hilbert aplicados à mecânica quântica, exibindo a teoria espectral dos operadores auto-adjuntos ilimitados e enfatizando a importância destes serem auto-adjuntos para resolver o problema de autovalor para o operador de Schrödinger.

Nosso objetivo consiste em apresentar, descrever e estudar noções de teoria espectral, e a influência desta na existência de solução da equacão de Schrödinger. Para tanto, dedicaremos o primeiro capítulo a apresentação de resultados que tornam o trabalho mais auto-suficiente, necessários no decorrer dos demais capítulos. No segundo capítulo, iniciaremos expondo resultados e fixando algumas notações e conceitos teóricos que serão usados nos capítulos subsequentes para provar a existência de solução para dois problemas específicos.

Começaremos, no Capítulo 1, por apresentar os espaços de funções de Lebesgue e Sobolev, assim como suas principais propriedades e resultados. Em particular, apresentaremos os teoremas de imersões dos espaços de Sobolev que utilizaremos, bem como uma condição necessária e suficiente para que uma função pertença a estes espaços. Usando a desigualdade de Harnack e o método das translações de Nirenberg, obteremos resultados de positividade e regularidade, respectivamente. Introduziremos também alguns resultados de não existência. Concluimos o Capítulo 1, com o estudo da continuidade do operador de Nemitskii, e algumas consequências.

No Capítulo 2, introduziremos as noções gerais de operadores em espaços de Hilbert e alguns resultados. Isto será importante para fixarmos as notações e resultados que serão utilizados posteriormente. Apresentaremos ainda o teorema espectral para operadores auto-adjuntos não-limitados, as projeções espectrais e algumas de suas propriedades. Além disso, enunciaremos princípios variacionais, especificamente: o Lema de Glazman e o Princípio de Courant. Baseado nesses conceitos, estudaremos o espectro do fecho (veja Definição 2.8) do operador de Schrödinger:

$$S_0 : D(S_0) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N),$$

definido por

$$S_0(u) = -\Delta u + V(x)u,$$

onde $V \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $D(S_0) = C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, o qual será denotado por S, isto é, $S = \bar{S}_0$. Para tanto, assumiremos a seguinte hipótese:

$$\lim_{|x| \to +\infty} V(x) = 0. \tag{1}$$

Neste caso, mostraremos que o espectro essencial de S, que denotaremos por $\sigma_{ess}(S)$, é igual a $[0, +\infty)$. Usaremos este e outros resultados para estudar a seguinte classe de problemas elípticos assintoticamente linear:

$$-\Delta u + \lambda u = f(x,u)u, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro e f satisfaz determinadas hipóteses que serão expostas logo abaixo, ainda nesta introdução.

Encerraremos o capítulo estudando o espectro do operador de Schrödinger S_0, agora definido sobre $D(S_0) = C^\infty(T^N)$, onde T^N é um N-toro, assumindo a seguinte hípotese: o potencial V é uma função mensurável, periódica e limitada.

Neste caso, mostraremos que existe um sistema ortogonal completo em $L^2(T^N)$ de autofunções do operador de Schrödinger S_0. Além disso, introduziremos o gap espectral, que são regiões da reta real onde não há elementos do espectro de S_0.

Assumiremos que 0 pertence ao gap espectral de S_0 e aplicaremos estes resultados para estudar uma classe de problemas elípticos semilineares da forma:

$$-\Delta u + V(x)u = f(x,u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{3}$$

onde a não-linearidade $f(x,u)$ é periódica na variável x e com crescimento superlinear.

No Capítulo 3, usaremos a teoria estudada no Capítulo 2 para mostrar a existência de solução para o problema (2). Neste capítulo, assumiremos as seguintes hipóteses sobre a função f:

(f_1) $\lim_{s \to 0} f(x,s) = 0$, uniformemente em x;

(f_2) Para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $f(x,s)$ é uma função não-decrescente de s sobre $[0,\infty)$, e existe uma função $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$ tal que

$$\lim_{s\to\infty} f(x,s) = g(x),$$

uniformemente em x;

(f_3) Existe uma função $h \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ tal que

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x,s) = h(s),$$

uniformemente em s;

(f_4) $\lim\limits_{\substack{|x|\to\infty \\ s\to\infty}} f(x,s) = \lim\limits_{s\to\infty} h(s) = \lim\limits_{|x|\to\infty} g(x) = l_\infty \in (0,\infty)$;

(f_5) $f(x,s) \geq \lim\limits_{|x|\to\infty} f(x,s) = h(s)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N,\ s \in \mathbb{R}^+$ e $f(x,s) > h(s)$ para $x \in \omega,\ s \in \mathbb{R}^+$, onde $\omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto de medida positiva.

O método utilizado aqui consiste em aplicar o Teorema do Passo da Montanha com a condição de compacidade de Cerami. Se Λ é o primeiro autovalor do operador S, com $V(x) = -g(x)$, mostraremos que a condição de Cerami é satisfeita para $0 < \lambda < |\Lambda|$. Para isto, usaremos o primeiro Teorema de Concentração de Compacidade devido a P. L. Lions [13]. Os resultados estudados neste capítulo são devidos a Costa-Tehrani [6].

Finalmente, no Capítulo 4, usaremos a teoria espectral do operador de Schrödinger S_0 com o potencial V periódico, para estudar a existência de solução para o problema (3), onde assumiremos as seguintes hipóteses sobre a função f:

(f_1) $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são contínuas e 1-periódicas em cada variável $x_i, i = 1, \ldots, N$;

(f_2) $|f(x,s)| \leq C(1 + |s|^{p-1})$, onde $C > 0$ e $2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$;

(f_3) $f(x,s) = o(|s|)$, quando $s \to 0$, uniformemente em x;

(f_4) Existe $\gamma > 2$ tal que $0 < \gamma F(x,s) \leq s f(x,s)$, para todo $s \neq 0$, onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$;

(f_5) 0 está em um gap espectral de $-\Delta + V$.

Obteremos uma solução para o problema (3) como o limite de uma sequência de soluções de problemas aproximados. Para obter tal sequência, utilizaremos um Teorema de Linking. Os resultados deste capítulo são devidos a Pankov-Pflüger [15].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Resultados dos Espaços L^p

Nosso objetivo nesta seção é citar alguns resultados básicos dos espaços L^p. Evidentemente, não nos prenderemos a detalhes e demonstrações, pois o interesse é apenas tornar o texto mais auto-suficiente. Começaremos definindo tais espaços, supondo conhecidas as noções de medida de Lebesgue, funções mensuráveis e integráveis, etc.

Definição 1.1 *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e $p \in [1, \infty)$. Define-se*

$$L^p(\Omega) = \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \textit{ é mensurável e } \int_\Omega |u|^p dx < \infty\Big\}.$$

O espaço $L^p(\Omega)$ munido com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u|^p dx\Big)^{1/p},$$

é um espaço normado completo. Observemos que no caso em que $p = 2$, esta norma provém do produto interno $(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uvdx$.

Observação 1.2 *Chamamos a atenção para a seguinte propriedade das funções integráveis em $\mathbb{R}^N$: se $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é integrável, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que*

$$\Big|\int_{|x|>R} udx\Big| < \varepsilon.$$

Definimos também o espaço $L^\infty(\Omega)$ como segue:

Definição 1.3 *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$. Define-se*

$$L^\infty(\Omega)=\{u:\Omega\to\mathbb{R} \text{ mensurável } ;\ |u(x)|\leq C \text{ q.t.p. sobre } \Omega \text{ para algum } C>0\}\,.$$

Este também é um espaço normado completo quando munido da norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}=\inf\{C>0;|u(x)|\leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

O primeiro resultado que citaremos é o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue:

Teorema 1.4 (Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (u_n) uma sequência em $L^1(\Omega)$. Suponha que*

(a) $u_n(x)\to u(x)$, q.t.p. em Ω;

(b) Existe uma função $g\in L^p(\Omega)$ tal que, para cada n, $|u_n(x)|\leq g(x)$ q.t.p. em Ω.

Então $u\in L^p(\Omega)$ e $\|u_n-u\|_{L^p(\Omega)}\to 0$.

Um outro resultado, que poderíamos dizer ser uma "quase recíproca" do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Teorema 1.5 *Sejam (u_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $u\in L^p(\Omega)$ tais que $\|u_n-u\|_{L^p(\Omega)}\to 0$. Então existe uma subsequência (u_{n_k}) tal que*

(a) $u_{n_k}(x)\to u(x)$, q.t.p. em Ω;

(b) Existe uma função $h\in L^p(\Omega)$ tal que, para cada k, $|u_{n_k}(x)|\leq h(x)$ q.t.p. em Ω.

Apresentaremos agora os espaços das ***funções localmente p-integráveis*** e ***localmente limitadas***. Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$, $K\subset\Omega$ e χ_K a função característica de K. Diremos que uma função $u:\Omega\to\mathbb{R}$ mensurável é localmente p-integrável quando $u\chi_K\in L^p(\Omega)$, $1\leq p<\infty$, para todo K compacto. Diremos ainda que u é localmente limitada quando $u\chi_K\in L^\infty(\Omega)$, para todo K compacto.

Definição 1.6 *Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1\leq p<\infty$ o espaço das funções localmente integráveis, e por $L^\infty_{loc}(\Omega)$ o espaço das funções localmente limitadas.*

Para finalizar esta seção, enunciaremos o Lema de Du Bois - Raymond, também conhecido por Lema Fundamental do Cálculo das Variações.

Lema 1.7 (Du Bois - Raymond) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u\varphi dx = 0,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Então $u = 0$ q.t.p. em Ω.

As demonstrações destes três resultados poderão ser encontradas em Brezis [5], bem como as afirmações sobre os espaços $L^p(\Omega)$.

1.2 Resultados de Análise Funcional

Listaremos nesta seção alguns resultados de Análise Funcional que serão úteis no decorrer do trabalho. Antes de enunciarmos o primeiro resultado, definiremos a noção de convergência fraca.

Definição 1.8 *Sejam X um espaço vetorial normado e (x_n) uma sequência em X. Diremos que (x_n)* ***converge fracamente*** *a $x \in X$, se*

$$f(x_n) \to f(x),$$

para todo $f \in X'$ [1] e denotaremos por $x_n \rightharpoonup x$.

Teorema 1.9 *Seja (x_n) uma sequência num espaço de Banach X. Se (x_n) converge fracamente, então (x_n) é limitada em X.*

O resultado que enunciaremos agora será usado no decorrer de toda a dissertação.

Teorema 1.10 *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se (x_n) é uma sequência limitada em X, então (x_n) possui uma subsequência que converge fracamente.*

As provas destes dois resultados encontram-se em Brezis [5], Proposição III.5 e Teorema III.27, respectivamente.

Encerraremos esta seção com o Teorema da Representação de Riesz para funcionais lineares contínuos em espaços de Hilbert. A demonstração deste teorema encontra-se em Reed-Simon [17], Teorema II.4.

Teorema 1.11 (Representação de Riesz) *Seja H um espaço de Hilbert. Para cada $f \in H'$, existe um único $y_f \in H$ tal que*

$$f(x) = (x, y_f)_H,$$

para todo $x \in H$.

[1] X' representa o dual topológico de X.

1.3 Resultados dos Espaços de Sobolev

Os espaços de Sobolev são os espaços naturais para se estudar equações diferenciais parcias usando métodos variacionais. Introduziremos nesta seção vários resultados que usaremos ao longo de toda a dissertação.

Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq p < \infty$.

Definição 1.12 *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Diremos que u possui* ***derivada fraca*** *com relação a x_i, se existe $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega v_i \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Denotaremos v_i por $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

Definição 1.13 *O espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ se define por*

$$H^1(\Omega) = \Big\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ i = 1, \ldots, N \Big\}.^2$$

Este espaço torna-se um espaço de Hilbert, quando munido com o produto interno:

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv) dx,$$

cuja norma correspondente é

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \Big(\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2) dx \Big)^{1/2}.$$

Uma norma equivalente a esta, que em alguns momentos usaremos, é a seguinte:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \Big\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big\|_{L^2(\Omega)}.$$

Do mesmo modo que definimos o espaço $H^1(\Omega)$, definiremos $H^2(\Omega)$.

Definição 1.14 *O espaço de Sobolev $H^2(\Omega)$ se define por*

$$H^2(\Omega) = \Big\{ u \in H^1(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega),\ i = 1, \ldots, N \Big\}.$$

[2] A derivada no sentido fraco.

O produto interno considerado neste espaço é

$$(u,v)_{H^2(\Omega)} = \int_\Omega \Big[\sum_{i,j=1}^{N} \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \Big) + \nabla u \nabla v + uv \Big] dx,$$

cuja norma correspondente é equivalente a

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \Big\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{N} \Big\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \Big\|_{L^2(\Omega)}.$$

Um outro espaço que também usaremos ao longo do texto é o espaço $\mathcal{D}^{1,2}$.

Definição 1.15 *Sejam $N \geq 3$ e $2^* = \frac{2N}{N-2}$. O espaço de Sobolev $\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)$ se define por*

$$\mathcal{D}^{1,2}(\Omega) = \Big\{ u \in L^{2^*}(\Omega); \nabla u \in (L^2(\Omega))^N \Big\}.$$

O espaço $\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u,v)_{\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx,$$

e norma correspondente

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \Big)^{1/2}.$$

Denotaremos por $H_0^1(\Omega)$ o espaço obtido pelo completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ com relação a norma de $H^1(\Omega)$.

Todas as definições e resultados comentados anteriormente sobre os espaços de Sobolev, encontram-se em Brezis [5] e Willem [22].

Enunciaremos agora uma proposição que caracteriza as funções do espaço $H^1(\Omega)$, a qual será bastante útil nos resultados de regularidade que apresentaremos na próxima seção.

Proposição 1.16 *Seja $u \in L^2(\Omega)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *$u \in H^1(\Omega)$;*

(ii) *Existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo aberto $\omega \subset\subset \Omega$ (compactamente contido) e para todo $h \in \mathbb{R}^N$, com $|h| < \text{dist}(\omega, \Omega^C)$, se verifica*

$$\|u(x+h) - u(x)\|_{L^2(\omega)} \leq C|h|.$$

Além disso, podemos tomar $C = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$.

Maiores detalhes e demonstração desta proposição, veja Proposição IX.3 em Brezis [5].

Os resultados listados abaixo são os principais teoremas de imersões que usaremos neste trabalho.

Teorema 1.17 (Imersões de Sobolev) *As seguintes imersões são contínuas:*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 2 \leq p \leq \infty, \text{ se } N = 1, 2;$$

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 2 \leq p \leq 2^*, \text{ se } N \geq 3;$$

$$\mathcal{D}^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega), \text{ se } N \geq 3.$$

Se a medida do domínio é finita, temos o Teorema de Rellich-Kondrachov:

Teorema 1.18 (Rellich-Kondrachov) *Se $med(\Omega) < \infty$[3], então a seguinte imersão é compacta:*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 1 \leq p < 2^*.$$

Estes dois resultados estão contidos em Brezis [5] e Willem [22].

O lema seguinte nos diz que convergência fraca implica convergência em quase todo ponto em $\mathbb{R}^N$.

Lema 1.19 *Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada. Então a menos de subsequência, existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$u_n \to u_0 \quad q.t.p \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Demonstração Desde que $H^1(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo, pelo Teorema 1.10, existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0, \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N),$$

a menos de subsequência. Como o operador restrição de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $H^1(B(0,R))$ é contínuo, para cada $R > 0$, e a imersão de$H^1(B(0,R))$ em $L^2(B(0,R))$ é compacta, temos que

$$u_n \to u_0 \text{ em } L^2(B(0,R)).$$

Fixado $R = 1$, pelo Teorema 1.5 existe uma subsequência $(u_n^1) \subset (u_n)$ tal que

$$u_n^1 \to u_0 \text{ q.t.p. em } B(0,1).$$

Agora, fixado $R = 2$, temos que $u_n^1 \to u_0$ em $L^2(B(0,2))$ e usamos o Teorema 1.5 mais uma vez para encontrarmos uma subsequência $(u_n^2) \subset (u_n^1)$ tal que

$$u_n^2 \to u_0 \text{ q.t.p. em } B(0,2).$$

[3] $med(\Omega)$ denota a medida de Lebesgue do conjunto Ω.

Prosseguindo assim, fixado $k \in \mathbb{N}$, existe uma subsequência de (u_n) que satisfaz:

$$u_n^k \to u_0 \ \text{ q.t.p. em } \ B(0,k).$$

Afirmamos que a sequência diagonal (u_k^k) tem a propriedade desejada, isto é,

$$u_k^k \to u_0 \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N.$$

De fato, seja $C_j = \left\{x \in B(0,j) : \lim\limits_{n\to\infty} u_n^j(x) \neq u_0(x)\right\}$. Temos que $\text{med}(C_j) = 0$. Definamos $C = \cup_{j=1}^{\infty} C_j$. Assim, $\text{med}(C) = 0$. Agora, se $x \in \mathbb{R}^N \backslash C$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ com $x \in B(0,k_0)$, então

$$x \in B(0,k), \ \ \forall k \geq k_0.$$

Portanto,

$$u_n^k(x) \to u_0(x) \ \text{ quando } \ n \to \infty \ \text{ para } \ k \geq k_0.$$

Sendo (u_k^k) uma subsequência de (u_n^k), obtemos

$$u_k^k \to u_0 \ \text{ q.t.p. em } \ \mathbb{R}^N,$$

e isto prova o lema.

□

Um resultado de compacidade, devido a P. L. Lions, que utilizaremos neste trabalho é o seguinte lema.

Lema 1.20 (P. L. Lions) *Sejam $r > 0$ e $2 \leq q < 2^*$. Se (u_n) é uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |u_n|^q dx \to 0, \quad n \to \infty,$$

então $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$.

A prova deste lema encontra-se em Willem [22], Lema 1.21.

1.4 Resultados de Positividade e Regularidade

Nesta seção, assumiremos a existência de solução fraca não-negativa u para o problema:

$$(P_g) \qquad\qquad -\Delta u + \lambda u = g(x)u, \ u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde $\lambda > 0$, $N \geq 3$, $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} g(x) = l_\infty \in (0,\infty)$. Mostraremos que u é estritamente positiva e $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$.

Os resultados desta seção serão utilizados no Capítulo 3.

Observação 1.21 *Desde que* $\lambda > 0$, *temos que* $\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + \lambda u^2)dx$ *define uma norma equivalente à norma usual de* $H^1(\mathbb{R}^N)$. *Denotaremos esta norma por* $\|\cdot\|_\lambda$.

Observação 1.22 *Notemos que* $g \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. *De fato, se* $\lim_{|x|\to\infty} g(x) = l_\infty$, *então, dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $R > 0$ *tal que* $|g(x) - l_\infty| < \varepsilon$, *para* $|x| > R$, *que implica* $g(x) < l_\infty + \varepsilon$, *se* $|x| > R$. *Além disso, sendo* $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$ *segue que* $\max_{x\in B[0,R]} g(x) = g(x_0)$, *para algum* $x_0 \in B[0,R]$. *Portanto,* $g \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$

Por uma ***solução fraca*** de (P_g), entenderemos uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $u \neq 0$, $u \geq 0$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u \nabla v + \lambda uv)dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x)uvdx, \quad \forall\, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{1.1}$$

Assumida a existência de uma solução não-negativa de (P_g), para provar que esta é estritamente positiva, necessitaremos lançar mão a um resultado tipo princípio de máximo, conhecido como desigualdade de Harnack. Desde que não precisaremos desta desigualdade em sua forma mais geral, apresentaremos apenas uma versão que será suficiente ao nosso trabalho.

Teorema 1.23 (Desigualdade de Harnack) *Consideremos o operador* $L = -\Delta + (\lambda - g)$, $\lambda > 0$ *e* g *nas hipóteses do problema* (P_g), $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $u \geq 0$ *e* $Lu = 0$ [4] *em* $\mathbb{R}^N$. *Então,*

$$\sup_{B(y,R)} u(x) \leq C \inf_{B(y,R)} u(x),$$

onde $C = C(N, R)$.

Para a generalidade deste resultado e sua respectiva demonstração, veja Gilbarg-Trudinger [9], Teorema 8.20.

Lema 1.24 *Se* $u \geq 0$ *é uma solução fraca não-trivial de* (P_g), *então* u *é estritamente positiva.*

Demonstração: Suponhamos que exista $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $u(x_0) = 0$. Pela desigualdade de Harnack, para qualquer bola $B(x_0, R)$, $R > 0$, temos que

$$\sup_{B(x_0,R)} u \leq C \inf_{B(x_0,R)} u = 0,$$

onde $C > 0$. Desde que $\mathbb{R}^N$ é conexo, tem-se que $u = 0$ em $\mathbb{R}^N$, que contradiz o fato de $u \neq 0$. Portanto, $u > 0$.

[4] A igualdade no sentido fraco.

$\square$

Nosso objetivo agora é mostrar que $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Para tanto, usaremos um método conhecido por ***Método das Translações***, devido a L. Nirenberg. No que segue, estabeleceremos uma notação e algumas de suas propriedades.

Proposição 1.25 *Sejam $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $h \in \mathbb{R}^N$, $h \neq 0$. Definamos*

$$D_h(v)(x) = \frac{v(x+h) - v(x)}{|h|}.$$

As seguintes propriedades são válidas:

(i) $\displaystyle\int \nabla v \nabla (D_{-h}(D_h(v)))dx = \int |\nabla D_h(v)|^2 dx.$

(ii) $\displaystyle\int v D_{-h}(D_h(v))dx = \int |D_h(v)|^2 dx.$

(iii) *Existe $C = C(N)$ tal que $\|D_{-h}v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.*

Demonstração: (i) Desde que

$$D_{-h}(D_h(v))(x) = \frac{v(x) - v(x-h) - v(x+h) + v(x)}{|h|^2},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&\int \nabla v \nabla (D_{-h}(D_h(v)))dx \\
&\qquad = \int \nabla v(x) \nabla \Big[\frac{v(x) - v(x-h) - v(x+h) + v(x)}{|h|^2}\Big] dx \\
&\qquad = \frac{1}{|h|^2} \int \Big[|\nabla v(x)|^2 - \nabla v(x) \nabla v(x-h)\Big] dx \\
&\qquad + \frac{1}{|h|^2} \int \Big[|\nabla v(x)|^2 - \nabla v(x) \nabla v(x+h)\Big] dx. \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Fazendo mudança de variável, temos

$$\int |\nabla v(x)|^2 dx = \int |\nabla v(x+h)|^2 dx$$

e

$$\int \nabla v(x) \nabla v(x-h) dx = \int \nabla v(x) \nabla v(x+h) dx.$$

Substituindo estas expressões em (1.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\int \nabla v \nabla (D_{-h}(D_h(v)))dx \\
&= \frac{1}{|h|^2}\int \Big[|\nabla v(x+h)|^2 - 2\nabla v(x)\nabla v(x+h) + |v(x)|^2\Big]dx \\
&= \int \Big|\frac{\nabla v(x+h) - \nabla v(x)}{|h|}\Big|^2 dx \\
&= \int |\nabla D_h(v)|^2 dx,
\end{aligned}$$

e isto conclui (i).

(ii) A demonstração desta propriedade é análoga a anterior.

(iii) Pela Proposição 1.16, temos

$$\|D_{-h}v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

para todo $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$, em particular se $\Omega = B(0,R)$. Daí, desde que $|D_{-h}v|^2$ é integrável, dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $R > 0$ suficientemente grande de modo que

$$\int_{|x|>R} |D_{-h}(v)|^2 dx < \varepsilon.$$

Logo,

$$\|D_{-h}v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int_{|x|\leq R} |D_{-h}(v)|^2 dx + \int_{|x|>R} |D_{-h}(v)|^2 dx < C^2\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Portanto,

$$\|D_{-h}v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

que prova a proposição.

□

Lema 1.26 *Se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca de (P_g), então $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Tomando $v = D_{-h}(D_h(u))$ em (1.1), obtemos

$$\int (\nabla u \nabla (D_{-h}(D_h(u))) + \lambda u D_{-h}(D_h(u)))dx = \int g(x)uD_{-h}(D_h(u))dx.$$

Usando (i) e (ii) da Proposição 1.25, temos

$$\|D_h(u)\|^2_\lambda = \int (|\nabla(D_h(u))|^2 + \lambda|D_h(u)|^2)dx = \int g(x)uD_{-h}(D_h(u))dx.$$

Desde que $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, pela desigualdade de Hölder tem-se

$$\begin{aligned} \|D_h u\|_\lambda^2 &\leq \|g\|_\infty \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|D_{-h}(D_h(u))\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|g\|_\infty C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|D_h(u)\|_\lambda, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos (iii) da Proposição 1.25. Em particular,

$$\|D_h(\frac{\partial u}{\partial x_i})\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|g\|_\infty C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Agora usando a Proposição 1.16, temos que $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto, $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$, provando o lema.

□

Corolário 1.27 *Consideremos o problema limite*

$$(P_\infty) \qquad -\Delta u + \lambda u = l_\infty u, \; u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde $\lambda > 0$. Se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca de (P_∞), então $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Basta tomarmos $g(x) = l_\infty$, e usar o Lema 1.26.

□

Ainda usando o método das translações de Nirenberg, auxiliado pela Proposição 1.25, pode-se provar o seguinte resultado de regularização local.

Lema 1.28 *Suponha que $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca do problema*

$$-\Delta u + V(x)u = f \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

onde $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Então, $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Para versões mais gerais, e suas respectivas demonstrações, veja Evans [8], Teorema 1 na Secão 6.3.1, ou Berezin-Shubin [4], Teorema 2.1, Suplemento 2.

No que segue, mostraremos que o primeiro autovalor do laplaciano considerado sobre um anel diminui, a medida que aumentamos o raio deste anel. A existência de autovalores do laplaciano em domínio limitado encontra-se em Brezis [5], Teorema IX.31.

Teorema 1.29 *Sejam $0 < R_0 < R'$ e $\mu_1 = \mu_1(R')$ o primeiro autovalor do problema*

$$(P_{R'}) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \mu u & \text{em} \quad A_{R_0,R'} \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial A_{R_0,R'}, \end{cases}$$

onde $A_{R_0,R'} = \{x \in \mathbb{R}^N; R_0 < |x| < R'\}$ e $\partial A_{R_0,R'} = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| = R_0$ ou $|x| = R'\}$. Então, dado $\delta > 0$ existe $R' > 0$ suficientemente grande tal que $\mu_1 < \delta$.

Demonstração: Fixado $R_1 > R_0$, seja $e_1 > 0$ a primeira autofunção associada ao primeiro autovalor $\mu(R_1)$ do problema:

$$(P_{R_1}) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= \mu_1(R_1)u \quad \text{em} \quad A_{R_0,R_1} \\ u &= 0 \qquad\qquad \text{sobre} \quad \partial A_{R_0,R_1}, \end{cases}$$

onde $A_{R_0,R_1} = \{x \in \mathbb{R}^N; R_0 < |x| < R_1\}$. Para $R > 1$, definamos $w(x) = e_1(x/R)$. Desde que e_1 é definida sobre $R_0 < |x| < R_1$, temos que w é definida em

$$A_R = \{x \in \mathbb{R}^N; RR_0 < |x| < RR_1\}.$$

Como $e_1 \equiv 0$ sobre $\partial A_{R_0,R_1}$, então $w \equiv 0$ sobre ∂A_R. Além disso, fazendo mudança de variável, temos

$$\begin{aligned} \int_{A_R} -\Delta w w dx &= \int_{A_R} -\frac{1}{R^2}(\Delta e_1(x/R))e_1(x/R)dx \\ &= \int_{A_{R_0,R_1}} -\frac{R^N}{R^2}(\Delta e_1(y))e_1(y)dy \\ &= \int_{A_{R_0,R_1}} \frac{R^N}{R^2}(\mu_1(R_1)e_1(y))e_1(y)dy \\ &= \frac{\mu_1(R_1)}{R^2}\int_{A_R}(e_1(x/R))^2 dx \\ &= \frac{\mu_1(R_1)}{R^2}\int_{A_R} w^2 dx. \end{aligned}$$

Sendo w nula sobre a fronteira de A_R, usando integração por partes obtemos

$$\int_{A_R} |\nabla w|^2 dx = \frac{\mu_1(R_1)}{R^2}\int_{A_R} w^2 dx. \tag{1.3}$$

Ainda por $w \equiv 0$ sobre ∂A_R, podemos estender w ao anel

$$A_{R_0,RR_1} = \{x \in \mathbb{R}^N; R_0 < |x| < RR_1\}.$$

Assim, w é solução do problema de autovalor

$$(P_{R_1R}) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= \mu_1(R_1)u \quad \text{em} \quad A_{R_0,RR_1} \\ u &= 0 \qquad\qquad \text{sobre} \quad \partial A_{R_0,RR_1}. \end{cases}$$

Pela caracterização variacional do primeiro autovalor de (P_{R_1R}), temos

$$\mu_1(RR_1) = \inf_{u \neq 0} \frac{\int_{A_{R_0,R_1R}} |\nabla u|^2 dx}{\int_{A_{R_0,R_1R}} u^2 dx}.$$

Daí, por (1.3), segue-se que

$$\mu_1(RR_1) \leq \frac{\int_{A_{R_0,RR_1}} |\nabla w|^2 dx}{\int_{A_{R_0,R_1R}} w^2 dx} = \frac{\mu_1(R_1)}{R^2}.$$

Para R suficientemente grande, temos

$$\mu_1(RR_1) < \delta,$$

que prova o teorema com $R' = RR_1$.

□

Para finalizar esta seção, consideraremos dois resultados: um lema devido a E. Hopf e um teorema devido a S. Pohozaev. Mais uma vez, como não usaremos o resultado de Hopf em sua forma mais geral, enunciaremos este de modo suficiente para o nosso uso, e em seguida faremos uma consequência deste lema. Para uma versão mais geral e sua prova, veja Gilbarg-Trudinger [9], Lema 3.4.

Definição 1.30 *Sejam Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ e $x_0 \in \partial\Omega$. Diremos que $\partial\Omega$ satisfaz a* ***condição da esfera interior*** *em x_0 se existe uma bola $B(0,r) \subset \Omega$, $r > 0$, de modo que $x_0 \in \partial B(0,r)$.*

Lema 1.31 (Hopf) *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $-\Delta u \leq 0$ em Ω. Se $x_0 \in \partial\Omega$ é tal que*

(i) *$u(x_0) < u(x)$ para todo $x \in \Omega$,*

(ii) *$\partial\Omega$ satisfaz a condição da esfera interior em x_0;*

então a derivada normal exterior de u em x_0, caso exista, satisfaz

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0 \ ^5.$$

Lema 1.32 *Seja $\varphi > 0$ a primeira autofunção associada ao autovalor μ_1 do problema $(P_{R'})$ considerado no Teorema 1.29. Então, $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} < 0$ sobre $\partial A_{R_0,R'}$.*

Demonstração: Basta observar que $\varphi \equiv 0$ sobre $\partial A_{R_0,R'}$, $\varphi > 0$ em $A_{R_0,R'}$ e que $\partial A_{R_0,R'}$ satisfaz a condição da esfera interior para todo x, e aplicar o Lema de Hopf.

□

[5] η denota o vetor normal exterior a $\partial\Omega$

Proposição 1.33 *Seja* $\lim_{|x|\to\infty} g(x) = l_\infty$ *e suponha que* $0 < \lambda < l_\infty$*. Se* $u \geq 0$ *é solução fraca de* (P_g)*, então* $u = 0$*.*

Demonstração: Suponha que $u \geq 0$ é uma solução fraca de (P_g). Então, pelo Lema 1.24, temos que $u > 0$. Sendo $\lim_{|x|\to\infty} g(x) = l_\infty$, então para $\delta := (l_\infty - \lambda)/2$ podemos fazer $R_0 > 0$ suficientemente grande tal que

$$g(x) \geq l_\infty - \delta > 0 \text{ para } |x| \geq R_0. \tag{1.4}$$

Pelo Lema 1.26, $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Dada $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, podemos então aplicar a identidade de Green para obter

$$\int \nabla u \nabla \psi dx = \int -\Delta u \psi dx,$$

e sendo u solução fraca de (P_g), tem-se que

$$\int (-\Delta u \psi + \lambda u \psi) dx - \int g(x) u \psi dx = 0,$$

ou ainda,

$$\int [-\Delta u + (\lambda - g(x))u] \psi dx = 0,$$

para toda . Assim, pelo Lema 1.7, temos

$$-\Delta u + (\lambda - g(x))u = 0, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{1.5}$$

Pelo Teorema 1.29, podemos escolher R' suficientemente grande de modo que

$$0 < \mu_1(R') < \frac{\delta}{2}. \tag{1.6}$$

Seja $\varphi > 0$ uma autofunção associada ao autovalor $\mu_1(R')$. Então, usando (1.4) e (1.5), obtemos

$$\int_{A_{R_0,R'}} -\Delta u \varphi dx = \int_{A_{R_0,R'}} (g(x) - \lambda) u \varphi dx \geq \delta \int_{A_{R_0,R'}} u \varphi dx. \tag{1.7}$$

Por outro lado, pelo Lema 1.32

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} < 0 \text{ sobre } \partial A_{R_0,R}. \tag{1.8}$$

Daí, pela identidade de Green, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{A_{R_0,R'}} -\Delta u \varphi dx &= \int_{A_{R_0,R'}} -\Delta \varphi u dx + \int_{\partial A_{R_0,R'}} u \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\, dS \\ &- \int_{\partial A_{R_0,R'}} \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta}\, dS. \end{aligned}$$

Sendo $\varphi = 0$ sobre $\partial A_{R_0,R'}$ e $u\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} < 0$ (lembremos que $u > 0$), obtemos

$$\int_{A_{R_0 R'}} -\Delta u\varphi dx \le \int_{A_{R_0,R'}} -\Delta\varphi u dx = \mu_1(R') \int_{A_{R_0,R'}} u\varphi dx.$$

Logo, por (1.6),

$$\int_{A_{R_0,R'}} -\Delta u\varphi dx \le \frac{\delta}{2} \int_{A_{R_0,R'}} u\varphi dx,$$

que é uma contradição em vista de (1.7). Isto conclui o teorema.

$\square$

Consideremos agora o problema

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(u) \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $N \ge 3$.

Teorema 1.34 (Identidade de Pohozaev) *Seja $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$*[6]*, $N \ge 3$, uma solução fraca de (P_1). Se $f(0) = 0$ e $F(u) := \int_0^u f(s)ds \in L^1(\mathbb{R}^N)$, então u satisfaz*

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx.$$

Este resultado encontra-se em Willem [22], Corolário B.4. Como consequência da Identidade de Pohozaev temos o seguinte resultado de não existência.

Corolário 1.35 *Seja $\mu \in \mathbb{R}$. Se $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ é solução do problema de autovalor*

$$(P_2) \qquad -\Delta u = \mu u \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

então $u = 0$.

Demonstração: Se $\mu = 0$ então pelo Teorema de Liouville u é constante; e sendo $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$, tem-se $u \equiv 0$. Suponha que $\mu \neq 0$. Desde que u é uma solução de (P_2) associada ao autovalor μ, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \mu \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx.$$

Por outro lado, pelo Teorema 1.34, temos necessariamente que

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mu}{2} u^2 dx.$$

[6] $H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ é definido do mesmo modo que definimos $L^p_{loc}(\Omega)$.

Logo,

$$\frac{N}{N-2}\mu\int_{\mathbb{R}^N} u^2dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2dx = \mu\int_{\mathbb{R}^N} u^2dx.$$

Portanto, $u \equiv 0$.

$\square$

1.5 Funcionais Diferenciáveis

A Derivada de Gateaux para funcionais definidos em espaços de Banach, é uma extensão natural da derivada direcional de funções com n variáveis.

Definição 1.36 *Seja $J : U \subset X \to \mathbb{R}$ um funcional definido em um subconjunto aberto U de um espaço de Banach X. Diremos que J é* ***Gateaux diferenciável*** [7] *em $u \in U$, se para cada $h \in X$*

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[J(u+th) - J(u)]$$

existir.

Geralmente, denotaremos a derivada de Gateaux em u por $J'(u)$. Diremos que J é Gateaux diferenciável em U, quando J for Gateaux diferenciável em cada ponto de U.

Exemplo 1.1 Sejam H uma espaço de Hilbert e $\|x\|^2 = (x, x)$. Então o funcional $J : H \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$$

é Gateaux diferenciável e

$$J'(u)h = (u, h)\,.$$

Além da derivada de Gateaux, temos também a Derivada de Fréchet para funcionais definidos em espaços de Banach.

Definição 1.37 *Seja $J : U \subset X \to \mathbb{R}$ um funcional definido em U, um subconjunto aberto do espaço de Banach X. Diremos que J é* ***Fréchet diferenciável*** [8] *em $u \in U$, se existir $F \in X'$ tal que, para cada $h \in X$,*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|}[J(u+h) - J(u) - \langle F, h\rangle] = 0.$$

[7] Diremos também que J tem derivada de Gateaux.

[8] Assim como a derivada de Gateaux, diremos também que J tem derivada de Fréchet.

Geralmente denotaremos F por $J'(u)$, e diremos que J é Fréchet diferenciável em U, quando J é Fréchet diferenciável em cada ponto de U. É imediato verificar que todo funcional Fréchet diferenciável é Gateaux diferenciável.

O funcional J na definição anterior será dito de ***Classe*** C^1, e escreveremos $J \in C^1(U, \mathbb{R})$, se for Fréchet diferenciável em U e a aplicação $u \mapsto J'(u)$, de U em X', é contínua. O funcional do Exemplo 1.1 é de classe C^1. A seguir, apresentaremos algumas propriedades das derivadas de Gateaux, que também são válidas para derivadas de Fréchet.

(i) O funcional linear contínuo F é único;

(ii) Se J é Gateaux diferenciável em $u \in X$, então J é contínuo em u;

(iii) Se J é Gateaux (Fréchet) diferenciável na norma de X, então J é Gateaux (Fréchet) diferenciável em qualquer outra norma equivalente;

(iv) Se J e $I : U \subset X \to \mathbb{R}$ são Gateaux (Fréchet) diferenciáveis em $u \in U$, então $aI + bJ$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, é Gateaux (Fréchet) diferenciável em $u \in X$, e
$$(aI + bJ)'(u)h = aI'(u)h + bJ'(u)h.$$

Para as aplicações que apresentaremos neste trabalho, será preciso estudar a continuidade do operador de Nemitskii, também chamado de operador de superposição.

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Uma função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de ***função de Carathéodory*** se:

(i) para cada $s \in \mathbb{R}$ fixado, a função $x \mapsto f(x, s)$ é mensurável a Lebesgue em Ω;

(ii) para quase todo ponto $x \in \Omega$, a função $s \mapsto f(x, s)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Denotando por $\mathcal{M}$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$, temos o seguinte resultado.

Lema 1.38 *Se $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory, então a função $x \mapsto f(x, u(x))$ é mensurável, para toda $u \in \mathcal{M}$.*

Demonstração: Mostraremos que se $u \in \mathcal{M}$, então $f(\cdot, u(\cdot)) \in \mathcal{M}$. Notemos que se v é uma função simples, então $f(\cdot, v(\cdot))$ é mensurável. De fato, sendo v uma função simples, podemos escrever-la da forma: $v = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{E_k}$ com $a_k \in \mathbb{R}$ e χ_{E_k} a função característica de E_K, onde a família $\{E_k; 1 \leq k \leq m\}$ forma uma partição mensurável de Ω. Daí,
$$f(x, v(x)) = f(x, \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{E_k}(x)) = \sum_{k=1}^{m} \chi_{E_k}(x) f(x, a_k).$$

Assim, sendo $x \mapsto f(x, a_k)$ mensurável, por hipótese, temos que $f(\cdot, v(\cdot)) \in \mathcal{M}$.

Consideremos agora uma sequência de funções simples (u_n) em $\mathcal{M}$ tal que $u_n \to u$ q.t.p em Ω. Acabamos de mostrar que $f(\cdot, u_n(\cdot))$ é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $f(\cdot, u_n(\cdot)) \to f(\cdot, u(\cdot))$ q.t.p em Ω, segue que $f(\cdot, u(\cdot)) \in \mathcal{M}$, pois é limite q.t.p de uma sequência de funções mensuráveis em Ω.

□

Como consequência deste lema, se f é uma função de Carathéodory, então o operador $N_f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, dado por

$$N_f(u) = f(\cdot, u(\cdot)),$$

é chamado de ***Operador de Nemitskii***. Na verdade, estamos interessados em saber quando o operador N_f define uma aplicação de um $L^p(\Omega)$ em algum $L^q(\Omega)$ e, principalmente, quando este é contínuo. O próximo teorema responderá a esta questão.

Teorema 1.39 (Continuidade do Operador de Nemitskii) *Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory. Suponha que existem uma constante $c > 0$, uma função $b \in L^q(\Omega), 1 \leq q \leq \infty$, e $r > 0$ tais que*

$$|f(x, s)| \leq c|s|^r + b(x), \quad \forall (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Então,

(i) $N_f : L^{rq}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ *está bem definido;*

(ii) N_f *é contínuo.*

Demonstração: Usando a hipótese de crescimento de f e a desigualdade de Minkowski, temos

$$\|N_f(u)\|_{L^q(\Omega)} = \|f(x, u(x))\|_{L^q(\Omega)} \leq c\||u|^r\|_{L^q(\Omega)} + \|b\|_{L^q(\Omega)} = c\|u\|^r_{L^{rq}(\Omega)} + \|b\|_{L^q(\Omega)}.$$

Portanto, $N_f(u) \in L^q(\Omega)$, ou seja, N_f está bem definido.

Agora suponhamos que $u_n \to u$ em $L^{rq}(\Omega)$. Então, pelo Teorema 1.5 existe uma subsequência de (u_n), também denotada por (u_n), tal que

$$|u_n(x)| \leq h(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

para alguma $h \in L^{rq}(\Omega)$. Logo, usando a hipótese de crescimento, obtemos

$$|f(x, u_n(x))| \leq c|h(x)|^r + |b(x)| \in L^q(\Omega).$$

Desde que $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω, segue que $f(x, u_n(x)) \to f(x, u(x))$ q.t.p em Ω, pois $s \mapsto f(x, s))$ é contínua para cada $x \in \Omega$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, tem-se

$$f(x, u_n(x)) \to f(x, u(x)) \text{ em } L^q(\Omega).$$

Logo, N_f é contínuo.

$\square$

Usando o Teorema do valor médio, pode-se provar a seguinte proposição (a demonstração é análoga a de funções de n variáveis).

Proposição 1.40 *Se o funcional J tem derivada de Gateaux contínua, então $J \in C^1(U, \mathbb{R})$.*

Consideremos o funcional $J : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) := \int_\Omega F(x, u)dx,$$

onde

$$F(x, u) := \int_0^u f(x, s)ds.$$

Lema 1.41 *Suponha que med$(\Omega) < \infty$, $N \geq 3$, $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ e*

$$|f(x, s)| \leq C(1 + |s|^{p-1}),$$

com $1 < p < 2^*$. Então o funcional J é de classe $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$J'(u)(v) = \int_\Omega f(x, u)vdx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Demonstração: Para provarmos o lema usaremos a Proposição 1.40. Primeiro mostraremos a existência da derivada de Gateuax e depois que esta é contínua.

Sejam $t \in (0, 1)$ e $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(s) = F(x, u + stv)$. Desde que g é contínua em $[0, 1]$ e derivável em $(0, 1)$, pelo teorema do valor médio, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $|g(1) - g(0)| = |g'(\theta)|$, ou seja,

$$|F(x, u + tv) - F(x, u)| = |f(x, u + \theta tv)|t|v|. \tag{1.9}$$

Usando a condição de crescimento de f, temos

$$\begin{aligned} |f(x, u + \theta tv)||v| &\leq C(1 + |u + \theta tv|^{p-1})|v| \\ &\leq C(1 + 2^{p-1}(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}))|v|. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder e Teorema de Rellich-Kondrachov segue que

$$\int_\Omega |u|^{p-1}|v|dx \leq \Big(\int_\Omega |u|^p dx\Big)^{(p-1)/p}\Big(\int_\Omega |v|^p dx\Big)^{1/p} < \infty.$$

Logo, $C(1 + 2^{p-1}(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}))|v| \in L^1(\Omega)$, para $p \in (1, 2^*)$. Desde que $u(x) + t\theta v(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω, quando $t \to 0$, e f é contínua na segunda variável, então $f(x, u(x) + t\theta v(x))v(x) \to f(x, u(x))v(x)$ q.t.p em Ω, quando $t \to 0$. Assim, usando (1.9) e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\frac{1}{t}\int_\Omega \big(F(x, u + tv) - F(x, u)\big)dx \to \int_\Omega f(x, u)vdx,$$

quando $t \to 0$. Portanto,

$$J'(u)(v) = \int_\Omega f(x, u)vdx.$$

Para provar que a aplicação $J' : H^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$[9] é contínua, suponha que $u_n \to u$ em $H^1(\Omega)$. Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, temos $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$, $1 < p < 2^*$. Desde que $|f(x, s)| \leq C(1 + |s|^{p-1})$, podemos utilizar a continuidade do operador de Nemitskii para obter

$$f(x, u_n) \to f(x, u) \;\text{ em }\; L^q(\Omega), \tag{1.10}$$

onde $q = \frac{p}{p-1}$. Usando agora a desigualdade de Hölder e novamente o Teorema de Rellich-Kondrachov, obtemos

$$\begin{aligned} |(J'(u_n) - J'(u))(v)| &\leq \|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{L^q(\Omega)}\|v\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{L^q(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|J'(u_n) - J'(u)\| &= \sup_{0\neq v\in H^1(\Omega)} |(J'(u_n) - J'(u))(v)|/\|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{L^q(\Omega)}. \end{aligned}$$

Portanto, segue por (1.10) que

$$J'(u_n) \to J'(u) \;\text{ em }\; H^{-1}(\Omega),$$

que prova o lema.

$\square$

[9]Como usual, $H^{-1}(\Omega)$ denota o espaço dual de $H^1(\Omega)$

No caso em que $\Omega = \mathbb{R}^n$, consideremos o funcional $J : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) := \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx,$$

onde

$$F(x,u) := \int_0^u f(x,s)sds.$$

Lema 1.42 *Suponha que $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$, $N \geq 3$ e*

$$|f(x,u)| \leq C|s|.$$

Então o funcional J é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e

$$J'(u)(v) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)uvdx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração: Basta considerar $\tilde{f}(x,s) = f(x,s)s$ e repetir os argumentos da prova do Lema 1.41, tomando os devidos cuidados na imersões.

□

1.6 Teoremas do Tipo Minimax

Nos capítulos 3 e 4, usaremos teoremas de pontos críticos para estudarmos existência de solução para duas classes de problemas. Exibiremos agora os enunciados de tais teoremas.

Definição 1.43 *Diremos que uma sequência (u_n) em $H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma **sequência de Cerami no nível** $c \in \mathbb{R}$, ou sequência $(Ce)_c$, do funcional I_λ, se*

$$I_\lambda(u_n) \to c \ \text{ e } \ (1 + \|u_n\|)\|I'_\lambda(u_n)\| \to 0.$$

*Diremos ainda que I_λ satisfaz a **condição de Cerami no nível** c, ou condição $(Ce)_c$, se toda sequência $(Ce)_c$ possui uma subsequência convergente em $H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Teorema 1.44 (Passo da Montanha) *Seja H um espaço de Hilbert e $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisfazendo as condições:*

(a) *Existem $\rho > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $I(u) \geq 0$ para $\|u\| \leq \rho$ e $I(u) \geq \alpha$ quando $\|u\| = \rho$;*

(b) *$I(0) = 0$ e existe $e \in H$ de modo que $\|e\| > \rho$ e $I(e) < 0$.*

Seja
$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma}\sup_{0\le t\le 1} I(\gamma(t)),$$
onde
$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],H); \gamma(0) = 0 \text{ e } I(\gamma(1)) < 0\}.$$
Se o funcional I satisfaz a condição de compacidade de Cerami no nível c, então c é um valor crítico de I.

Este teorema e sua demonstração podem ser encontrados em Grossinho - Tersian [10], Teorema 1.20.

Definição 1.45 *Diremos que uma sequência (u_n) em E_k é uma **sequência de Palais-Smale**, ou sequência (PS), do funcional J_k, se $(J_k(u_n))$ é limitada e $J_k'(u_n) \to 0$ em E_k'. Diremos ainda que J_k satisfaz a **condição de Palais-Smale**, ou condição (PS), se toda sequência (PS) possui uma subsequência convergente em E_k.*

O próximo resultado que enunciaremos é um teorema de linking devido a P. Rabinowitz [16].

Teorema 1.46 (Linking) *Seja $X = Y \oplus Z$ um espaço de Banach com $\dim Y < \infty$. Sejam $\rho > r > 0$ e $z \in Z$ tal que $\|z\|_X = r$. Definamos*
$$N := \{z \in Z; \|z\|_X = r\}$$
$$M := \{u = y + tz; y \in Y, \|u\|_X \le \rho, t \ge 0\}$$
e
$$\partial M = \{u = y + tz; y \in Y, \|u\|_X = \rho \text{ e } t \ge 0 \text{ ou } \|y\|_X \le \rho \text{ e } t = 0\},$$
a fronteira de M. Seja $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ tal que
$$b := \inf_{u\in N} I(u) > a := \sup_{u\in\partial M} I(u). \tag{1.11}$$
Se I satisfaz a condição (PS), então I possui um valor crítico c, onde c é caracterizado por
$$c = \inf_{h\in\Gamma}\max_{u\in M} I(h(u)),$$
e $\Gamma := \{h \in C(M,X); h|_{\partial M} = id\}$. Além disso, $c \ge b$.

Este teorema encontra-se em Willem [22], Teorema 2.12, assim como sua demonstração.

Capítulo 2

O Espectro do Operador de Schrödinger

Introdução

O operador de Schrödinger sobre $L^2(\mathbb{R}^N)$ é definido por

$$S_0u(x) = -\Delta u(x) + V(x)u(x),$$

onde a função V de valor real sobre $\mathbb{R}^N$ é chamada um potencial. Muito do ímpeto para o estudo de operadores de Schrödinger veio da teoria quântica. Neste contexto, uma função $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ com $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 1$ é dita um pacote de onda (ou estado), e representa a configuração instantânea de uma coleção de elétrons, átomos e moléculas. A evolução de um sistema quântico é controlada pela equação de Schrödinger

$$u_t(x) = -iS_0u(x),$$

com "solução" $u(x,t) = e^{-itS_0}u(x,0)$. A energia total do sistema é dividida entre a energia cinética $(-\Delta u, u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$ e a energia potencial $(V(x)u, u) = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx$. O menor autovalor de S_0, cuja existência depende de condições razoáveis sobre V, é chamado "ground state energy", e a autofunção correspondente é dita o "ground state"- é a configuração do sistema com a menor energia. Outros autovalores correspondem a excitações discretas do sistema, e suas autofunções correspondentes são chamadas "bound states".

Nosso objetivo neste capítulo, é apresentar algumas caracterizações do espectro do operador de Schrödinger, que dependem das hipóteses assumidas sobre o potencial V. Para tanto, necessitaremos de conceitos e resultados sobre operadores em espaços de Hilbert e, além disso, de resultados tais como: o teorema espectral para operadores auto-adjuntos não-limitado e propriedades das projeções espectrais. Precisaremos ainda de dois princípios variacionais conhecidos por: Lema de Glazman e Princípio de Courant.

2.1 Operadores em Espaço de Hilbert

A linguagem geral da teoria dos operadores (não necessariamente limitados) em espaços de Hilbert é sistematicamente usada no estudo da teoria espectral de operadores diferenciais. Apresentaremos aqui, algumas noções e resultados desta teoria que serão usados nas aplicações. Naturalmente, não somente nesta seção como em quase todo nosso trabalho, assumiremos vários resultados de Análise Funcional.

Definição 2.1 *Sejam H_1, H_2 espaços de Hilbert. Um **operador linear** A consiste dos seguintes objetos:*

(a) *um subespaço (não necessariamente fechado ou denso) $D(A) \subset H_1$, o qual é chamado domínio de A;*

(b) *uma aplicação linear $A : D(A) \to H_2$.*

Como usual, ultilizaremos as seguintes notações:

$$\ker(A) = \{x \in D(A); Ax = 0\}$$

e

$$\text{Im }(A) = \{y \in H_2; y = Ax, x \in D(A)\},$$

para denotar o ***núcleo*** e ***imagem*** de A, respectivamente.

Definição 2.2 *Um operador linear A será dito **limitado** (ou **contínuo**), se existir uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|Ax\| \leq C\|x\|, \ \forall \ x \in D(A).$$

A norma de A é definida por

$$\|A\| = \sup_{0 \neq x \in D(A)} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|}.$$

Quando um operador linear A é limitado, podemos estendê-lo por continuidade ao fecho, $\overline{D(A)}$, de $D(A)$.

Uma classe de operadores lineares limitados que utilizaremos, é a dos operadores unitários que definiremos agora.

Definição 2.3 *Um operador linear $U : D(U) \subset H_1 \to H_2$ será dito* ***unitário****, quando este for sobrejetivo e preserva produto interno, isto é,*

$$(Ux, Uy) = (x, y), \ \forall \ x, y \in D(U).$$

Exemplo 2.1 Seja $U : H_1 \times H_2 \to H_2 \times H_1$ definido por

$$U(x, y) = (y, -x).$$

O espaço $H_1 \times H_2$ é naturalmente um espaço de Hilbert, cuja norma correspondente é $\|(x, y)\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$. Claramente, U é sobrejetivo e

$$(U(x, y), U(x, y)) = ((x, y), (x, y)).$$

Logo, U é um operador linear unitário.

□

Definição 2.4 *Um operador linear A será dito* ***semi-limitado inferiormente****, quando existir uma constante $C > 0$ tal que*

$$(Ax, x) \geq -C\|x\|^2, \ \forall \ x \in D(A).$$

Exemplo 2.2 Consideremos o operador de Schrödinger $S_0 = -\Delta + V(x)$ com

$$S_0 : D(S_0) = C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N),$$

onde $V \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $V(x) \geq -C$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e algum $C > 0$. O operador S_0 é semi-limitado inferiormente. De fato,

$$\begin{aligned}
(S_0 u, u) &= \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta u + V(x)u)u dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx \\
&\geq -C\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

□

Em geral, consideraremos operadores lineares definidos sobre domínios densos em H_1, isto é, $\overline{D(A)} = H_1$. Se um tal operador é limitado, então este será considerado sobre todo o espaço H_1.

Se $\ker(A) = \{0\}$, definiremos o ***operador inverso*** A^{-1} do seguinte modo: $D(A^{-1}) = \text{Im}(A)$ e para qualquer $y \in \text{Im}(A)$, por definição, $A^{-1}y = x$, onde $x \in D(A)$ é um vetor (unicamente definido) tal que $Ax = y$.

Definição 2.5 *Sejam* $A : D(A) \subset H \to H$ *um operador linear e* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Se* $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$, $\overline{\mathrm{Im}(A - \lambda I)} = H$ *e* $(A - \lambda I)^{-1}$ *for limitada, então diremos que* λ *pertence ao* ***conjunto resolvente*** *de* A*, que denotaremos por* $\rho(A)$*. Chamaremos de* ***espectro*** *de* A *o conjunto* $\mathbb{C} \setminus \rho(A)$*, e denotaremos por* $\sigma(A)$*.*

Sejam $A : D(A) \subset H_1 \to H_2$ e $B : D(B) \subset H_2 \to H_3$ operadores lineares. A ***composição*** (ou ***produto***) dos operadores A e B, é o operador definido sobre

$$D(BA) = \{x \in D(A); Ax \in D(B)\},$$

por

$$(BA)x = B(Ax).$$

Se $\mathrm{Im}(A) \cap D(B) = \{0\}$ então $D(BA) = \{0\}$. A ***soma*** de A e B é o operador definido sobre

$$D(A + B) = D(A) \cap D(B),$$

por

$$(A + B)x = Ax + Bx.$$

Novamente, se $D(A) \cap D(B) = \{0\}$ então $D(A + B) = \{0\}$ é possível.

Definição 2.6 *Seja* $A : D(A) \to H_2$ *um operador linear. O* ***gráfico*** *de* A *é o conjunto*

$$G(A) = \{(x, Ax); x \in D(A)\},$$

o qual é um subespaço vetorial de $H_1 \times H_2$*.*

Sobre $D(A)$ usaremos, além da norma induzida por H_1, a seguinte norma:

$$\|x\|_{G(A)} = (\|x\|^2 + \|Ax\|^2)^{1/2}.$$

Esta norma é conhecida por ***norma do gráfico***.

Nosso primeiro resultado nesta seção é bastante simples e útil.

Proposição 2.7 *Um subespaço vetorial de* $H_1 \times H_2$ *é gráfico de um operador linear (com domínio não necessariamente denso em* H_1*) se, e somente se, não contém pontos do tipo* $(0, y)$*, com* $y \neq 0$*.*

Demonstração: Sejam $G(A)$ o gráfico de um operador A e $(0, y) \in G(A)$. Então, $y = A0 = 0$.

Reciprocamente, seja X um subespaço de $H_1 \times H_2$ tal que X não contém pontos da forma $(0, y)$, com $y \neq 0$. Denotemos agora

$$D(A) = \{x; (x, y) \in X, \text{ para algum } y \in H_2\}$$

e definamos

$$A : D(A) \to H_2$$

por

$$Ax = y,$$

onde $(x, y) \in X$. Afirmamos que A é um operador linear bem definido. Com efeito, suponha que existem $y, y' \in H_2$ tais que $(x, y), (x, y') \in X$. Desde que X é subespaço, $(x, y) - (x, y') = (0, y - y') \in X$. Logo, $y = y'$ provando que A é bem definido. Sejam agora $x_1, x_2 \in D(A)$. Então

$$(x_1, Ax_1) + (x_2, Ax_2) = (x_1 + x_2, Ax_1 + Ax_2) \in X.$$

Por outro lado, $(x_1+x_2, A(x_1+x_2)) \in X$, que implica $(0, Ax_1+Ax_2-A(x_1+x_2)) \in X$. Logo, $Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2)$. Por fim, seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Desde que $\lambda(x_1, Ax_1) = (\lambda x_1, \lambda Ax_1) \in X$ e $(\lambda x_1, \lambda Ax_1) \in X$, temos $A(\lambda x_1) = \lambda Ax_1$. Portanto, X é o gráfico de A.

$\square$

Definição 2.8 *Um operador linear $A : D(A) \to H_2$ será dito **fechado** quando seu gráfico for um subespaço fechado de $H_1 \times H_2$. Diremos que a é **fechável** quando $\overline{G(A)}$ (fecho do gráfico de A) for o gráfico de um operador linear.*

No caso em que A é fechável, o operador fechado, cujo gráfico é igual ao fecho de $G(A)$, é usualmente chamado de ***fecho*** de A e denotado por $\bar{A}$.

De modo explícito, o domínio de $\bar{A}$ é o conjunto dos $x \in H_1$ tais que existe uma sequência $(x_n) \subset D(A)$ de modo que $x_n \to x$ em H_1 e (Ax_n) é uma sequência de Cauchy. Para tais x temos

$$\bar{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n.$$

Listaremos agora algumas propriedades simples de tais operadores.

(i) Todo operador linear limitado A é fechável e $\bar{A} = A$;

(ii) Se A é fechado, então $\ker(A)$ é um subespaço fechado de H_1;

(iii) Se A é fechado e $\ker(A) = \{0\}$, então A^{-1} é um operador linear fechado.

Observação 2.9 *Existem mais duas formas simples de definir operador linear fechado, e uma outra de definir operador linear fechável, as quais são equivalentes à Definição 2.8. A saber, respectivamente:*

(i) *A é fechado se $D(A)$ é fechado na norma do gráfico;*

(ii) *A é fechado se para toda sequência $(x_n) \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$ em H_1 e $Ax_n \to y$ em H_2 temos $x \in D(A)$ e $Ax = y$;*

(iii) *A é fechável se dada $(x_n) \subset D(A)$ tal que $x_n \to 0$ em H_1 e $Ax_n \to y$ em H_2 implicar que $y = 0$.*

Maiores detalhes sobre as propriedades acima e a Observação 2.9, veja Bachman-Narici [3], Capítulo 16.

Observação 2.10 *O Teorema do Gráfico Fechado nos diz que, se $A : D(A) = H_1 \to H_2$ é fechado, H_1 e H_2 espaços de Hilbert, então A é contínuo.*

Para a prova do Teorema do Gráfico Fechado, veja Brezis [5], Teorema II.7.

Exemplo 2.3 O operador

$$L_1 = -\Delta : D(L_1) = H^2(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$$

é fechado. Para tanto, basta observarmos que se $(u_n) \subset H^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e $-\Delta u_n \to v$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, então $-\Delta u = v$ (notemos que $H^2(\mathbb{R}^N)$ é completo na norma de $L^2(\mathbb{R}^N)$, e utilizarmos o item (ii) da Observação 2.9.

$\square$

Exemplo 2.4 O operador

$$L_0 = -\Delta : D(L_0) = C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$$

não é fechado, mas é fechável e $\bar{L_0} = L_1$. Com efeito, seja $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $u \notin C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, e consideremos $(u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $H^2(\mathbb{R}^N)$. Logo, temos $(u_n, -\Delta u_n) \subset G(L_0)$ e $(u_n, -\Delta u_n) \to (u, -\Delta u)$ em $L^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$, mas $(u, -\Delta u) \notin G(L_0)$. Portanto, $G(L_0)$ não é fechado.

Por (iii) da Observação 2.9, é imediato que L_0 é fechável. Para provarmos que $\bar{L_0} = L_1$, precisaremos essencialmente mostrar que $D(\bar{L_0}) = H^2(\mathbb{R}^N)$.

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta\varphi)\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^2 dx \\
&\leq \|-\Delta\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \frac{1}{2}\|-\Delta\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \|\varphi\|^2_{G(\bar{L_0})}
\end{aligned}$$

Assim, convergência de elementos de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito a norma do gráfico de $\bar{L_0}$, implica convergência em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Afirmamos que se $u \in D(\bar{L_0})$, então $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato, desde que $D(\bar{L_0}) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$, para toda $u \in D(\bar{L_0})$ existe $(u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0.$$

Sendo $\bar{L_0}$ fechado, por (ii) da Observação 2.9, tem-se

$$\|\bar{L_0}u_n - \bar{L_0}u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0.$$

Logo, $\|u_n - u\|_{G(\bar{L_0})} \to 0$, que implica $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, e como $H^1(\mathbb{R}^N)$ é completo, temos que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Agora, seja $v = \bar{L_0}u$. Desde que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\int_{\mathbb{R}^N} -\Delta u_n dx \to \int_{\mathbb{R}^N} v dx$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \psi dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \psi dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} -\Delta u_n \psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} v\psi dx,$$

ou ainda,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \psi + u\psi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} (v+u)\psi dx,$$

para toda $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Tomando em particular $\psi = D_{-h}(D_h(u))$, e usando os argumentos da prova do Lema 1.26, obtemos que $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Portanto, $D(\bar{L_0}) \subset H^2(\mathbb{R}^N)$

Por outro lado, $H^2(\mathbb{R}^N) \subset D(\bar{L_0})$, pois $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H^2(\mathbb{R}^N)$ na norma de $L^2(\mathbb{R}^N)$, e qualquer elemento de $D(\bar{L_0})$ é limite de uma sequência de elementos de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Como consequência, temos

$$H^2(\mathbb{R}^N) = D(L_1) = D(\bar{L_0})$$

e $\bar{L_0} = L_1$.

$\square$

Definição 2.11 *Sejam $A : D(A) \to H_2$ e $B : D(B) \to H_2$ operadores lineares. Diremos que A é uma extensão de B quando $D(B) \subset D(A)$ e $Ax = Bx$ para todo $x \in D(B)$. Se A é uma extensão de B denotaremos por $A \supset B$.*

Claramenta, o fecho de um operador linear, se existe, é uma extensão deste. Definiremos agora a noção de adjunto de um operador linear.

Definição 2.12 *Seja* $A : D(A) \to H_2$ *um operador linear tal que* $\overline{D(A)} = H_1$*. O operador* ***adjunto*** A^* *é definido como segue:*

$$D(A^*) = \{y \in H_2; \exists\ y^* \in H_1 \ e \ (Ax, y) = (x, y^*), \forall x \in D(A)\}.$$

Desde que $D(A)$ *é denso em* H_1*, o vetor* y^* *é único, e definimos* $A^* : D(A^*) \to H_1$ *por*

$$A^*y = y^*.$$

Dessa forma, temos

$$(Ax, y) = (x, A^*y),$$

$\forall x \in D(A)$ e $\forall y \in D(A^*)$.

Tem-se que $y \in D(A^*)$ se, e somente se, o funcional linear $f : D(A) \to \mathbb{R}$, definido por $f(x) = (Ax, y)$, é contínuo. De fato, se f é contínuo, podemos estender f a $\overline{D(A)} = H_1$ por contínuidade. Pelo Teorema da Representação de Riesz, temos $f(x) = (Ax, y) = (x, y^*)$, para algum $y^* \in H_1$.

Sejam $A : D(A) \subset H_1 \to H_2$ e $B : D(B) \subset H_1 \to H_2$ operadores lineares. Listaremos agora algumas propriedades elementares do operador linear adjunto.

Propriedades do Adjunto:

(i) Se $A \supset B$, então $B^* \supset A^*$;

(ii) Se A é limitado e $D(A) = H_1$, então $D(A^*) = H_2$ e A^* é limitado. Além disso, $\|A\| = \|A^*\|$;

(iii) A é unitário se, e somente se, A^{-1} existe e $A^* = A^{-1}$;

(iv) Se $\overline{D(A)} = H_1$, então A^* é um operador linear fechado;

(v) Os operadores lineares $(A^*)^{-1}$ e $(A^{-1})^*$ existem se, e somente se, $\ker(A) = \{0\}$ e Im A é densa em H_2. Neste caso, $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

No que segue, consideraremos apenas operadores lineares agindo no mesmo espaço de Hilbert H, ou seja, $A : D(A) \subset H \to H$, e por simplicidade diremos apenas que A é um operador.

Se E é um subespaço do espaço de Hilbert H, denotaremos por $E^\perp$ o ***complemento ortogonal*** de E, isto é,

$$E^\perp = \{x \in H; (x, y) = 0, \forall\ y \in E\}.$$

Claramente, $E^\perp$ é um subespaço fechado e $E^\perp = (\overline{E})^\perp$.

Proposição 2.13 *Sejam $A : D(A) \subset H \to H$ um operador e $U : H \times H \to H \times H$ o operador unitário definido por*

$$U(x, y) = (y, -x).$$

Então o gráfico $G(A^*)$ pode ser caracterizado por

$$G(A^*) = \{U(\overline{G(A)})\}^{\perp}.$$

Demonstração: Primeiro observemos que, para todo $x \in D(A)$ e $(y, z^*) \in H \times H$, temos a seguinte identidade:

$$(U(x, Ax), (y, z^*))_{H\times H} = (Ax, y)_H - (x, z^*)_H.$$

O lado direito se anula para todo $x \in D(A)$ se, e somente se, $y \in D(A^*)$ e $z^* = A^*y$, isto é, se $(y, z^*) \in G(A^*)$. O lado esquerdo se anula para todo $x \in D(A)$ se, e somente se, $(y, z^*) \in \{U(G(A))\}^{\perp}$. Concluímos assim que

$$G(A^*) = \{U(G(A))\}^{\perp}.$$

Usando a continuidade de U, obtemos

$$\{U(G(A))\}^{\perp} = \overline{\{U(G(A))\}}^{\perp} = \{U(\overline{G(A)})\}^{\perp}.$$

Isto conclui a prova.

□

Proposição 2.14 *Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador. $D(A^*)$ é denso em H se, e somente se, A é fechável. Neste caso, $\bar{A} = A^{**} := (A^*)^*$.*

Demonstração: Suponha que $D(A^*)$ é denso em H. Seja $(x_n) \subset D(A)$ tal que $x_n \to 0$ e $Ax_n \to y$ em H. Então, para todo $z \in D(A^*)$, (usando a continuidade do produto interno) temos

$$(y, z) = (\lim_{n\to\infty} Ax_n, z) = \lim_{n\to\infty} (x_n, A^*z) = 0.$$

Logo, sendo $\overline{D(A^*)} = H$, obtemos $y = 0$. Portanto, por (ii) da Observação 2.9, A é fechável.

Reciprocamente, suponha que $D(A^*)$ não é denso em H. Então, existe $0 \neq x \in H$ tal que $x \perp \overline{D(A^*)}$. Como consequência, para todo $v \in D(A^*)$, tem-se

$$0 = ((0, x), (Av, -v)) = ((0, x), U(v, Av)),$$

onde U é o operador unitário da Proposição 2.13. Isto mostra que

$$(0, x) \perp U(G(A^*)).$$

Pela Proposição 2.13, temos

$$U(\overline{G(A)}) = G(A^*)^\perp.$$

Desde que $UU = -I$, obtemos

$$\overline{G(A)} = -\overline{G(A)} = U(G(A^*)^\perp). \tag{2.1}$$

Afirmação: Se M é um subespaço fechado de $H \times H$, então

$$U(M^\perp) = U(M)^\perp.$$

Com efeito, $(u, v) \in U(M^\perp)$ equivale a dizer que $U(x_1, x_2) = (u, v)$ para algum $(x_1, x_2) \in M^\perp$, isto é, $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0, \ \forall \ (y_1, y_2) \in M$. Desde que U é unitário, temos

$$((u, v), U(y_1, y_2)) = (U(x_1, x_2), U(y_1, y_2)) = ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0,$$

para todo $(y_1, y_2) \in M$. Logo, $(u, v) \perp U(M)$, ou seja, $U(M^\perp) \subset U(M)^\perp$. A outra inclusão é análoga.

Provada a afirmação, podemos usa-la em (2.1) e concluir que

$$\overline{G(A)} = U(G(A^*))^\perp.$$

Assim, $(0, x) \in \overline{G(A)}$. Desde que $x \neq 0$, pela Proposição 2.7, $\overline{G(A)}$ não pode ser gráfico de um operador. Portanto, A não é fechável. Provamos assim a recíproca.

Por fim, para mostrar que $A^{**} = \bar{A}$, primeiro observemos que, como $D(A^*)$ é denso em H, podemos definir $(A^*)^*$. Assim, pela Proposição 2.13, temos

$$\overline{G(A)} = -\overline{G(A)} = U(\overline{G(A^*)}^\perp) = U(\overline{G(A^*)})^\perp = \overline{G(A^{**})} = G(A^{**}).$$

Portanto, $\bar{A} = A^{**}$.

$\square$

Definição 2.15 *Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador tal que $\overline{D(A)} = H$. Diremos que A é* ***simétrico*** *quando $A^* \supset A$, isto é,*

$$(Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall \ x, y \in D(A).$$

Proposição 2.16 *Todo operador simétrico é fechável.*

Demonstração: Se A é um operador simétrico, então $G(A) \subset G(A^*)$. Desde que, pela propriedade (iv) do adjunto (notemos que $\overline{D(A)} = H$), A^* é fechado, temos $\overline{G(A)} \subset \overline{G(A^*)} = G(A^*)$. Pela Proposição 2.7, $G(A^*)$ não contém elementos da forma $(0, y)$, com $y \neq 0$. Em particular, $\overline{G(A)}$ também não contém elementos desta forma. Usando novamente a Proposição 2.7, obtemos que $\overline{G(A)}$ é gráfico de um operador. Portanto, A é fechável.

$\square$

Definição 2.17 *Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador tal que $\overline{D(A)} = H$. Diremos que A é* ***auto-adjunto*** *quando $A = A^*$.*

Segue diretamente da definição que todo operador auto-adjunto é simétrico. Também temos pela propriedade (iv) do operador adjunto que um operador auto-adjunto é fechado. Se A é auto-adjunto e existe A^{-1}, então A^{-1} também é auto-adjunto. De fato, pelas propriedades listadas do operador adjunto temos $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = A^{-1}$.

Observação 2.18 *Se A é um operador auto-adjunto, então $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

A prova desta observação encontra-se em Berezin-Shubin [4], Suplemento 1, Proposição 1.3.

Exemplo 2.5 Sejam (M, μ) um espaço de medida e $a : M \to \mathbb{R}$ uma função mensurável finita q.t.p. em M. Definamos o ***operador multiplicação*** A da seguinte forma:

$$D(A) = \big\{u \in L^2(M, d\mu); au \in L^2(M, d\mu)\big\},$$

e para $u \in D(A)$

$$Au = au.$$

O operador A é auto-adjunto.

Primeiro deveremos verificar que $\overline{D(A)} = L^2(M, d\mu)$. Para tanto, é suficiente mostrar que se $v \in L^2(M, d\mu)$ tal que

$$\int_M uv d\mu = 0, \ \forall \ u \in D(A), \tag{2.2}$$

então $v = 0$. Sendo assim, seja $v \in L^2(M, d\mu)$ satisfazendo (2.2). Dado $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$M_n = \{x \in M; |a(x)| \leq n\}.$$

Desde que $a(x)$ é finita q.t.p. em M, temos

$$\text{med}\Big(M \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\Big) = 0.$$

Logo, precisamos provar apenas que $v|_{M_n} = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Seja χ_n a função característica de M_n. Para $u \in L^2(M, d\mu)$, definamos $u_n \chi_n$. Logo, temos que

$u_n \in L^2(M, d\mu)$ e $au_n \in L^2(M, d\mu)$, pois $|au_n| \leq n|u_n|$. Assim, $u_n \in D(A)$ para toda $u \in L^2(M, d\mu)$, e usando (2.2), tem-se

$$\int_{M_n} uvd\mu = \int_M u_n vd\mu = 0.$$

Daí, tomando em particular $u = v$, obtemos

$$\int_{M_n} v^2 d\mu = 0.$$

Portanto, $v = 0$ sobre M_n, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou ainda, $v = 0$ sobre M.

Enfim, provemos que A é auto-adjunto. Seja $w \in D(A^*)$. Então, existe $w^* \in L^2(M, d\mu)$ tal que $A^* w = w^*$ e

$$\int_M auwd\mu = \int_M uw^* d\mu, \ \forall \ u \in D(A).$$

Desde que u é arbitrário em $D(A)$, que é denso em $L^2(M, d\mu)$, temos que $aw = w^*$, isto é, $Aw = A^* w$. Portanto, A é auto-adjunto.

□

Definição 2.19 *Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador simétrico. Diremos que A é* ***essencialmente auto-adjunto****, quando $\bar{A}$ é auto-adjunto.*

Pela definição, observemos que todo operador auto-adjunto é essencialmente auto-adjunto.

Proposição 2.20 *Se A é um operador essencialmente auto-adjunto, então existe uma única extensão auto-adjunta de A, a saber $\bar{A}$.*

Demonstração: Seja B um operador auto-adjunto que estende A. Desde que $B \supset A$, pela proposição 2.14 e Propriedade (i) do adjunto, temos $B \supset A^{**} = \bar{A}$. Por outro lado, $\bar{A} = (\bar{A})^* = (A^{**})^* \supset B^* = B$. Portanto, $B = \bar{A}$.

□

2.2 Decomposição Espectral de Operadores Auto-Adjuntos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados já bem conhecidos da teoria espectral. Começaremos com uma situação bem simples, que é o caso quando o espaço de Hilbert H possui dimensão finita. Relembremos que neste caso, cada operador linear é limitado e definido sobre todo H, pois pode ser estendido por continuidade. Se A é um operador auto-adjunto em H, sabemos que existe uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ formada de autovetores associados aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ de A.

Denotemos por E o espaço de todas as funções $f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$. Munido do produto interno $(f, g) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(i)g(i)$, e norma correspondente

$$|f| = \Big(\sum_{i=1}^{n} f^2(i)\Big)^{1/2},$$

E é um espaço de Hilbert. Seja $b \in E$ tal que $b(k) = \lambda_k,\ k = 1, \ldots, n$, e definamos o operador multiplicação $B : E \to E$ por

$$(Bf)(k) = b(k)f(k), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Temos que B é auto-adjunto, pois B é claramente simétrico e limitado. Seja também o operador $U : H \to E$ definido por

$$(Ue_j)(k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \ldots, n,$$

onde δ_{jk} é o símbolo de Kronecker. Pela definição de U na base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ segue que este é unitário e

$$A = U^{-1}BU,$$

pois $(UAe_i)(k) = (U\lambda_i e_i)(k) = \lambda_i(Ue_i)(k) = (BUe_i)(k)$.

Portanto, cada operador auto-adjunto em um espaço de Hilbert H de dimensão finita é unitariamente equivalente a um operador multiplicação.

Nosso objetivo com a motivação acima, é chamar a atenção para o teorema espectral para operadores auto-adjuntos não-limitados sobre um espaço de Hilbert com dimensão infinita, o qual enunciaremos agora sem prova.

Teorema 2.21 (Teorema Espectral) *Seja A um operador auto-adjunto em um espaço de Hilbert H. Então existe um espaço de medida (M, μ), uma função mensurável $a : M \to \mathbb{R}$ e um operador unitário $U : H \to L^2(M, d\mu)$ tal que*

(i) $u \in D(A)$ se, e somente se, $a(Uu) \in L^2(M, d\mu)$;

(ii) Para todo $u \in D(A)$, temos

$$(UAu)(x) = a(x)(Uu)(x),$$

isto é

$$A = U^{-1}aU.$$

A demonstração deste teorema encontra-se em Berezin-Shubin [4], Teorema 1.1, Suplemento 1, ou Reed-Simon [17], Teorema VIII.4.

Para descrever a decomposição espectral de um operador auto-adjunto A, iniciaremos com a correspondente decomposição da identidade. Pelo Teorema 2.21 temos

$$A = U^{-1}aU,$$

onde

$$U : H \to L^2(M, d\mu)$$

é um operador unitário e $a : M \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável. Consideremos o conjunto

$$M_\lambda = \{m \in M : a(m) \leq \lambda\},$$

e seja χ_λ a função característica de M_λ. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, definamos

$$E_\lambda : H \xrightarrow{U} L^2(M, d\mu) \xrightarrow{\chi_\lambda} L^2(M, d\mu) \xrightarrow{U^{-1}} H,$$

ou seja, $E_\lambda = U^{-1}\chi_\lambda U$. A família $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ é chamada de ***decomposição espectral da identidade*** ou ***família espectral*** do operador A. Apresentaremos a seguir algumas propriedades desta família de operadores.

Proposição 2.22 *(i)* $E_\lambda = E_\lambda^2$ *e* $\|E_\lambda\| \leq 1$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*

(ii) E_λ *é um operador auto-adjunto;*

(iii) $E_\alpha E_\lambda = E_\lambda E_\alpha = E_\lambda$ *para* $\lambda \leq \alpha$*;*

(iv) Para todo $f \in H$ *a função* $(E_\lambda f, f) = \|E_\lambda f\|^2$ *é monótona não decrescente.*

Demonstração: (i) Por definição, $E_\lambda = U^{-1}\chi_\lambda U$. Sendo $\chi_\lambda = \chi_\lambda^2$, temos

$$E_\lambda = U^{-1}\chi_\lambda^2 U = U^{-1}\chi_\lambda U U^{-1}\chi_\lambda U = E_\lambda^2.$$

Notando agora que $\|E_\lambda x\|^2 \leq \|x\|^2$, obtemos $\|E_\lambda\| \leq 1$. Para provar (ii) e (iii), basta observar que

$$\chi_\alpha\chi_\lambda = \chi_\lambda\chi_\alpha = \chi_\lambda \quad \text{para} \quad \lambda \leq \alpha.$$

Desde que $E_\lambda = E_\lambda^2$ e E_λ é auto-adjunto, segue-se que

$$(E_\lambda u, u) = (E_\lambda^2 u, u) = (E_\lambda u, E_\lambda u) = \|E_\lambda u\|^2.$$

Agora, observando que [1] $\|\chi_\lambda u\|^2 = \|E_\lambda u\|^2$ e

$$\|\chi_\lambda u\|^2 = \int_{M_\lambda} u^2 d\mu,$$

temos (iv).

□

[1]Por conveniência, nos momentos oportunos, identificaremos $U(u)$ por u. Isto é possível porque U é unitário.

Observação 2.23 *Por (i)-(ii), temos que E_λ é uma* ***projeção ortogonal*** *(veja Kreyszig [12], Teorema 9.5-1). Além disso, se E_λ agir sobre $L^2(M, d\mu)$, então E_λ projeta $L^2(M, d\mu)$ no subespaço das funções que se anulam em $M \backslash M_\lambda$, ao longo do subespaço das funções que se anulam em M_λ. Cada um destes dois subespaços é complemento ortogonal do outro.*

Proposição 2.24 *A aplicação $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(H, H)$, $\varphi(\lambda) = E_\lambda$ é contínua à direita, ou seja,*

$$\varphi(\lambda) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \varphi(\lambda + \epsilon). \tag{2.3}$$

Demonstração: Sejam $A \subset M$ tal que $\text{med}(A) < \infty$ e

$$\mathcal{C} := \{u : M \to \mathbb{R}; u \text{ é limitada e } u \equiv 0 \,\text{em}\, A^c\}.$$

Se $u \in \mathcal{C}$, temos que $B = \{x \in M : u(x) > 0\}$ tem medida finita. Assim,

$$\begin{aligned}
\|E_{\lambda+\epsilon}u - E_\lambda u\|^2 &= \int_B (\chi_{\lambda+\epsilon} - \chi_\lambda)^2 u^2 d\mu \\
&= \int_{B \cap (M_{\lambda+\epsilon} \backslash M_\lambda)} u^2 d\mu \\
&\leq C\text{med}((B \cap M_{\lambda+\epsilon}) \setminus (B \cap M_\lambda)).
\end{aligned}$$

Desde que

$$\bigcap_{\epsilon_k \to 0^+} (B \cap \chi_{\lambda+\epsilon_k}) = B \cap M_\lambda,$$

obtemos

$$\lim_{k \to \infty} \text{med}((B \cap M_{\lambda+\epsilon}) \setminus (B \cap M_\lambda)) = 0.$$

Logo, vale (2.3) para toda $u \in \mathcal{C}$.

Agora, sendo $C_0^\infty(M)$ denso em $L^2(M, d\mu)$, para $u \in H$ existe $u_k \in \mathcal{C}$ tal que $\delta_k = \|u_k - u\| \to 0$. Usando o fato que $\|E_\lambda\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
\|E_{\lambda+\epsilon}u - E_\lambda u\| &\leq \|(E_{\lambda+\epsilon} - E_\lambda)u_k\| + \|(E_{\lambda+\epsilon} - E_\lambda)(u - u_k)\| \\
&\leq \|(E_{\lambda+\epsilon} - E_\lambda)u_k\| + \|E_{\lambda+\epsilon}(u - u_k)\| + \|E_\lambda(u - u_k)\| \\
&\leq \|(E_{\lambda+\epsilon} - E_\lambda)u_k\| + 2\|(u - u_k)\| \\
&\leq \|(E_{\lambda+\epsilon} - E_\lambda)u_k\| + 2\delta_k.
\end{aligned}$$

Isto completa a prova da proposição.

□

Proposição 2.25 $\lim_{\lambda \to -\infty} E_\lambda = 0$, $\lim_{\lambda \to +\infty} E_\lambda = I$,

Demonstração: Similar a prova da Proposição anterior.

□

2.3 Princípios Variacionais

Nesta seção apresentaremos dois resultados que serão extremamente importantes ao longo deste e do próximo capítulo. Primeiro estudaremos um resultado conhecido por Lema de Glazman e logo após um outro conhecido por Princípio de Courant. Para isto, introduziremos algumas notações preliminares.

Sejam $A : D(A) \subset H \to H$ um operador sobre um espaço de Hilbert H e $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ a família espectral de A. Pela Proposição 2.24, sabemos que $E_{\lambda+0} = E_\lambda$ no sentido da topologia forte dos operadores. Introduziremos agora a chamada ***função distribuição do espectro*** de A. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ definamos

$$N(\lambda) = \dim(E_\lambda H).$$

Esta pode assumir valor infinito. Definindo

$$N(\lambda - 0) := \lim_{\mu\to\lambda-0} N(\mu),$$

vemos que

$$N(\lambda - 0) = \dim(E_{\lambda-0}H).$$

Em geral, $N(\lambda + 0) = \lim_{\mu\to\lambda+0} N(\mu)$ pode não ser igual a $N(\lambda)$.

Exemplo 2.6 Seja $A : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ dado por

$$(Af)(x) = xf(x),$$

o operador multiplicação pela variável independente x. Este operador é auto-adjunto (veja Exemplo 2.5). Temos que $N(0) = \dim(E_0L^2(0,1)) = \dim\{0\} = 0$, enquanto que

$$N(+0) = \lim_{\varepsilon\to+0} N(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to+0} \dim(E_\varepsilon L^2(0,1)) = \lim_{\varepsilon\to+0} \dim(L^2(0,\varepsilon)) = +\infty.$$

Notemos que E_ε projeta $L^2(0,1)$ sobre o subespaço das funções que se anulam em $(0,1) \setminus \{x \in (0,1); x \le \varepsilon\}$ (veja Observação 2.23).

$\square$

Portanto, teremos que $N(\lambda + 0) = N(\lambda)$ somente quando $N(\lambda + 0) < \infty$.

Pode-se mostrar que, essencialmente, $N(\lambda)$ representa o número de autovalores do operador A que são menores do que λ (veja Berezin-Shubin [4], Suplemento 1, Seção S1.3).

Agora estamos prontos para apresentar o Lema de Glazman. Como não usaremos este em sua forma mais geral, enunciaremos uma versão simplificada que nos será suficiente.

Lema 2.26 (Glazman) *Sejam $A : D(A) \subset H \to H$ um operador auto-adjunto e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então*

$$N(\lambda) = \sup\{\dim L; L \subset D(A), (Ax, x) \leq \lambda(x, x),\ \forall\ x \in L\}.$$

(L subespaço de $D(A)$.)

Finalizaremos esta seção com um teorema do tipo minimax, conhecido como Princípio de Courant, que caracteriza variacionalmente os autovalores de um operador semi-limitado inferiormente.

Teorema 2.27 (Princípio de Courant) *Sejam $A : D(A) \subset H \to H$ um operador auto-adjunto semi-limitado inferiormente e $K \subset H$ um subespaço denso, no qual A é essencialmente auto-adjunto. Então,*

$$\lambda_1 = \inf_{0 \neq x \in K} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \tag{2.4}$$

e

$$\lambda_{n+1} = \sup_{\substack{L \subset K \\ \dim L = n}} \inf_{0 \neq x \in K \cap L^{\perp}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}. \tag{2.5}$$

Para maiores detalhes e demonstrações destes dois resultados, veja Lema 3.1” e Proposição 3.2, respectivamente, no Suplemento 1 em Berezin-Shubin [4].

2.4 O Operador de Schrödinger com Potencial Decaindo no Infinito

Consideremos o operador de Schrödinger

$$S_0 : D(S_0) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N), \tag{2.6}$$

definido por

$$S_0(u) = -\Delta u + V(x)u, \tag{2.7}$$

onde $V \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $D(S_0) = C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$. Nosso primeiro interesse, é saber quando o operador S_0 é essencialmente auto-adjunto. Para tanto, usaremos um critério que enunciaremos agora.

Teorema 2.28 *Assuma que* $V \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *e*

$$V(x) \geq -Q(|x|),$$

onde $Q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *é uma função contínua não-negativa e não-decrescente tal que*

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{Q(2r)}} dr = \infty.$$

Então, o operador S_0 *é essencialmente auto-adjunto.*

A demonstração deste teorema poderá ser encontrada em Berezin-Shubin [4], Teorema 1.1 do Capítulo 3.

$\square$

Suponha que $V \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e

$$(V_1) \qquad \liminf_{|x|\to\infty} V(x) = \lim_{R\to+\infty} \inf_{|x|\geq R} V(x) \geq a.$$

Corolário 2.29 *Sob a hipótese* (V_1)*, o operador* S_0 *definido em* (2.17) *é essencialmente auto-adjunto.*

Demonstração: Pela hipótese (V_1), existe $C > 0$ tal que

$$V(x) \geq -C, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Consideremos $Q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $Q(r) = C$. Aplicando o Teorema 2.28, concluímos a prova do corolário.

$\square$

Exemplo 2.7 Se $V(x) \equiv 0$, o operador

$$S_0 = -\Delta : C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N),$$

é essencialmente auto-adjunto.

$\square$

Quando S_0 for essencialmente auto-adjunto, denotaremos por S o fecho do operador S_0, isto é, $S = S_0^{**}$.

Nosso objetivo agora é estabelecer teoremas que caracterizem o espectros discreto e essencial do operador de Schrödinger S.

Definição 2.30 *Chamaremos de* ***espectro essencial*** *do operador* S*, e denotaremos por* $\sigma_{ess}(S)$*, o conjunto formado por todos os pontos não isolados do espectro de* S *e todos os autovalores de* S *com multiplicidade infinita.*

Pela definição acima, temos que $\sigma(S)\backslash\sigma_{ess}(S)$ consiste de todos os autovalores isolados com multipicidade finita.

Definição 2.31 *Chamaremos de* ***espectro discreto*** *do operador S, e denotaremos por $\sigma_{disc}(S)$, o conjunto $\sigma(S) \setminus \sigma_{ess}(S)$.*

Teorema 2.32 *Se V satisfaz a hipótese (V_1) então o operador S é semi-limitado inferiormente. Além disso, para cada $a' < a$, $\sigma(S) \cap (-\infty, a')$ consiste de um número finito de elementos (autovalores de multiplicidade finita) pertencentes a $\sigma_{disc}(S)$.*

Demonstração: Pela hipótese (V_1), temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$V(x) \geq -C, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N,$$

e portanto S é semi-limitado inferiormente. Observemos também que a conclusão do teorema, significa que se $E_{a'}$ é a projeção espectral de S, então $E_{a'}(D(S))$ tem dimensão finita para $a' < a$.

Para demonstrarmos a segunda parte do teorema, usaremos o Lema de Glazman. Mais precisamente, utilizaremos que

$$N(\lambda) = \sup\{\text{dim}L; L \subset D(S), (Su, u) \leq \lambda(u, u) \ \forall \ u \in L\},$$

onde L é um subespaço de $D(S)$ e $N(\lambda)$ é igual ao número de autovalores menores do que λ.

Assim, para provar o teorema é suficiente mostrar que se $a' < a$ e L é um subespaço de $D(S)$ tal que

$$(Su, u) \leq a'(u, u), \ \forall \ u \in L, \tag{2.8}$$

então L tem dimensão finita.

O lado esquerdo de (2.8) é

$$(S\psi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^N} [-\Delta\psi + V(x)\psi]\psi dx, \ \ \psi \in D(S).$$

Supondo $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e integrando por partes, obtemos

$$(S\psi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla\psi|^2 + V(x)\psi^2] dx, \ \ \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Vamos dividir a prova em duas partes: a primeira é mostrar que, em geral,

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla\psi|^2 + V(x)\psi^2] dx < \infty, \ \ \psi \in D(S), \tag{2.9}$$

e a segunda que L possui dimensão finita.

Afirmação: A integral em (2.9) é finita para todo $\psi \in D(S)$.

Por regularidade local (veja Lema 1.28), temos que se $\psi \in D(S)$ então $\psi \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Portanto a integral acima, em qualquer bola, é finita. Seja agora $b \leq \inf V(x) - 1$. Desde que $\psi \in L^2(\mathbb{R}^N)$, a finitude da desigualdade (2.9) é equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla\psi|^2 + V(x)\psi^2]dx - \int_{\mathbb{R}^N} b\psi^2 dx < \infty, \ \ \psi \in D(S),$$

ou seja, é equivalente a

$$S_b(\psi, \psi) := \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla\psi|^2 + (V(x) - b)\psi^2]dx < \infty, \ \ \psi \in D(S).$$

Notemos ainda que a finitude de $S_b(\psi, \psi)$ é equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi|^2 dx < \infty \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |V(x)|)\psi^2 dx < \infty. \tag{2.10}$$

De fato, se $\int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - b)\psi^2 dx < \infty$ então

$$\int_{V \geq 0} V(x)\psi^2 dx \leq \int_{V \geq 0} (V(x) - b)\psi^2 dx + \int_{V \geq 0} b\psi^2 dx < \infty.$$

Sendo $V(x) \geq -C$, temos que

$$\int_{V \leq 0} -V(x)\psi^2 dx \leq \int_{V \leq 0} C\psi^2 dx < \infty.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |V(x)|)\psi^2 dx = \int_{V \geq 0} (1 + V(x))\psi^2 dx + \int_{V \leq 0} (1 - V(x))\psi^2 dx < \infty.$$

Reciprocamente, se $\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |V(x)|)\psi^2 dx < \infty$ então

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\psi^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |V(x)|\psi^2 dx < \infty,$$

e consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - b)\psi^2 dx < \infty.$$

A forma quadrática $S_b(\psi, \psi)$ é gerada pela forma bilinear

$$S_b(\psi_1, \psi_2) := \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla\psi_1 \nabla\psi_2 + (V(x) - b)\psi_1\psi_2]dx,$$

que é finita desde que ψ_1 e ψ_2 satisfaçam (2.10), pois pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(V(x)-b)\psi_1\psi_2dx &= \int_{\mathbb{R}^N}\sqrt{(V(x)-b)}\psi_1\sqrt{(V(x)-b)}\psi_2dx\\ &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^N}(V(x)-b)\psi_1^2dx\Big)^{1/2}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}(V(x)-b)\psi_2^2dx\Big)^{1/2}\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Para $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos

$$((S-bI)\psi,\psi) = S_b(\psi,\psi).$$

O lado esquerdo acima é contínuo com respeito a norma do gráfico:

$$\|\psi\|_{G(S)} := (\|\psi\|^2 + \|S\psi\|^2)^{1/2},$$

sobre $D(S)$. Com efeito,

$$\begin{aligned}|((S-bI)\psi,\psi)| &= |(S\psi,\psi) - b\|\psi\|^2|\\ &\leq |b|\|\psi\|^2 + |(S\psi,\psi)|\\ &\leq |b|\|\psi\|^2 + \|S\psi\|\|\psi\|\\ &\leq |b|\|\psi\|^2 + \frac{1}{2}\|S\psi\|^2 + \frac{1}{2}\|\psi\|^2\\ &\leq (|b| + \frac{1}{2})\|\psi\|^2_{G(S)}.\end{aligned}$$

Logo, o mesmo vale para $S_b(\psi,\psi)$, e por continuidade S_b está bem definida em $D(S)$. Além disso, sendo $(V(x)-b) \geq 1$, temos a seguinte desigualdade:

$$\|\psi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla\psi|^2 + (V(x)-b)\psi^2]dx = S_b(\psi,\psi), \;\; \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

ou ainda,

$$\|\psi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\psi\|^2_{G(S)}, \;\; \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

Assim, convergência de elementos de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito a norma do gráfico implica convergência em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Afirmamos que se $\psi \in D(S)$ então $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato, desde que $D(S) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$, para toda $\psi \in D(S)$ existe $(\psi_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|\psi_n - \psi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0.$$

Sendo S fechado (auto-adjunto), por (ii) da Observação 2.9, tem-se

$$\|S\psi_n - S\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0.$$

Logo, $\|\psi_n - \psi\|_{G(S)} \to 0$, que implica $\|\psi_n - \psi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to 0$. Desde que o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ é completo, temos que $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Concluímos assim que, se $\psi \in D(S)$, a primeira desigualdade em (2.10) é válida.

Similarmente, definindo o espaço com peso

$$L^2(\mathbb{R}^N, 1+|V(x)|) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} (1+|V(x)|)|\psi(x)|^2 dx < \infty\},$$

o qual é completo, segue que $\psi \in L^2(\mathbb{R}^N, 1+|V(x)|)$ para toda $\psi \in D(S)$. Portanto, as desigualdades em (2.10) são válidas para toda $\psi \in D(S)$, as quais são equivalentes a desigualdade (2.9). Isto prova a afirmação.

Para finalizar a prova, precisamos então mostrar que L tem dimensão finita. Para tanto, comecemos reescrevendo (2.8) da seguinte forma:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (a' - V(x))\psi^2 dx \qquad \psi \in L. \tag{2.11}$$

Fixemos $\delta \in (0, a - a')$ e $R > 0$ tal que $V(x) \geq a' + \delta$ para $|x| \geq R$. Seja $M = -\inf V(x)$. Se $C > 0$ e $C > M + a'$, então

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} (a' - V(x))\psi^2 dx &= \int_{|x|\leq R} (a' - V(x))\psi^2 dx + \int_{|x|\geq R} (a' - V(x))\psi^2 dx \\ &\leq \int_{|x|\leq R} (a' + M)\psi^2 dx + \int_{|x|\geq R} -\delta\psi^2 dx \\ &\leq C\int_{|x|\leq R} \psi^2 dx - \delta\int_{|x|\geq R} \psi^2 dx. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Usando (2.11)-(2.12), podemos escrever

$$\int_{|x|\leq R} |\nabla\psi|^2 dx + \int_{|x|\geq R} (|\nabla\psi|^2 + \delta\psi^2) dx \leq C\int_{|x|\leq R} \psi^2 dx,$$

ou ainda,

$$\int_{|x|\geq R} (|\nabla\psi|^2 + \delta\psi^2) dx \leq C\int_{|x|\leq R} \psi^2 dx - \int_{|x|\leq R} |\nabla\psi|^2 dx. \tag{2.13}$$

Consideremos agora o operador restrição $A : L \to L^2(B(0,R))$ definido por

$$A\psi = \psi|_{B(0,R)}.$$

Sendo L munido da topologia induzida de $L^2(\mathbb{R}^N)$, temos que A é um operador contínuo. Além disso, por (2.13), $\ker(A) = \{0\}$. De fato, se $\psi \equiv 0$ em $B(0,R)$ então

$$\int_{|x|\geq R} (|\nabla\psi|^2 + \delta\psi^2) dx = 0,$$

que implica $\psi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N$. Agora é suficiente provarmos que o subespaço

$$\tilde{L} := A(L)$$

de $L^2(B(0,R))$ possui dimensão finita. Mostramos acima que $D(S) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$. Em particular, $\tilde{L} \subset H^1(B(0,R))$ e

$$\|\psi\|_{H^1(B(0,R))} \leq \|\psi\|_{L^2(B(0,R))}$$

Assim, podemos escrever a identidade I de $\tilde{L}$ como a composição da imersão $\tilde{L} \hookrightarrow H^1(B(0,R))$, que é contínua, com a imersão $H^1(B(0,R)) \hookrightarrow L^2(B(0,R))$, que é compacta, e temos que I é um operador compacto. Portanto, $\tilde{L}$ tem dimensão finita, e a prova do teorema está completa.

$\square$

Corolário 2.33 *Se* $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$, *então* $\sigma(S)$ *é discreto.*

Demostração: Se $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$ então $\lim\limits_{R\to+\infty} \inf\limits_{|x|\geq R} V(x) \geq a$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema 2.32 $\sigma(S) \cap (-\infty, a')$, para $a' < a$, consiste de um número finito de autovalores de multiplicidade finita. Portanto, $\sigma_{ess}(S) = \varnothing$, isto é, o espectro de S é discreto.

$\square$

Teorema 2.34 *Assuma que* $V \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *e* $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = 0$. *Então,* $\sigma_{ess}(S) = [0, +\infty)$

Demostração: Pelo Teorema 2.32, $\sigma_{ess}(S) \cap (-\infty, 0) = \varnothing$. Portanto, falta provarmos que $[0, +\infty) \subset \sigma(S)$. Fixemos $\lambda \geq 0$. Notemos que $\lambda \in \sigma(S)$ se, e somente se, existe uma sequência ortogonal $(\psi_n) \subset D(S)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|(S-\lambda I)\psi_n\|}{\|\psi_n\|} = 0.$$

De fato, caso contrário

$$1 = \left\|\frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}\right\| = \left\|(S-\lambda I)^{-1}(S-\lambda I)(\frac{\psi_n}{\|\psi_n\|})\right\| \to 0.$$

Isto mostrar que λ possui multiplicidade infinita, ou seja, $\lambda \in \sigma_{ess}(S)$.

Para construir tal sequência, observemos que $e^{ik\cdot x}$, $k \in \mathbb{R}^N$ e $|k| = \sqrt{\lambda}$, satisfaz a equação

$$-\Delta e^{ik\cdot x} = \lambda e^{ik\cdot x}.$$

Desde que $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = 0$, temos

$$\lim_{|x|\to\infty} [-\Delta + V(x) - \lambda] e^{ik\cdot x} = 0.$$

Agora fixemos uma função $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi \geq 0$, $\varphi(x) = 1$ se $|x| \leq \frac{1}{2}$ e $\varphi(x) = 0$ se $|x| \geq 2$. Definamos

$$\varphi_n(x) = \varphi(|\bar{n}|^{-1/2}(x - \overline{n})), \ \ \bar{n} \in \mathbb{Z}^N.$$

Notemos que

$$\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset \{x \in \mathbb{R}^N : |x - \overline{n}| \leq \sqrt{|\overline{n}|}\}.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in \operatorname{supp}(\varphi_n)} |V(x)| = 0.$$

Definindo,

$$\psi_n(x) = \varphi_n(x)e^{ik\cdot x}, \ \ |k| = \sqrt{\lambda},$$

obtemos

$$\|\psi_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_n(x)|^2 dx = |\bar{n}|^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x)|^2 dx = C|\bar{n}|^{N/2}, \tag{2.14}$$

para algum $C > 0$.

Pela definição de S temos

$$S\psi_n = -\Delta\varphi_n e^{ik\cdot x} - \nabla\varphi_n \nabla e^{ik\cdot x} + |k|^2 \varphi_n e^{ik\cdot x} + V(x)\varphi_n e^{ik\cdot x}.$$

Portanto,

$$(S - \lambda I)\psi_n = (S - |k|^2 I)\psi_n = e^{ik\cdot x}[S\varphi_n - ik\cdot\nabla\varphi_n] \tag{2.15}$$

Observando que

$$|\nabla\varphi_n| \leq C_1|\bar{n}|^{-1/2} \quad \text{ e } \quad |\Delta\varphi_n| \leq C_1|\overline{n}|^{-1},$$

por (2.15), temos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |(S - \lambda I)\psi_n(x)| = 0. \tag{2.16}$$

Logo, usando (2.14) e (2.16), tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\|(S - \lambda I)\psi_n\|^2}{\|\psi_n\|^2} &= C^{-1}\bar{n}^{-N/2}\|(S - \lambda I)\psi_n\|^2 \\
&\leq C_2\bar{n}^{-N/2} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |(S - \lambda I)\psi_n(x)|^2[\operatorname{med}(\operatorname{supp}(\varphi_n))] \\
&\leq C_3 \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |(S - \lambda I)\psi_n(x)|^2 \to 0,
\end{aligned}$$

e isto conclui a prova do teorema.

$\square$

2.5 O Operador de Schrödinger com Potencial Periódico

Faremos agora uma breve introdução sobre o estudo do operador de Schrödinger com potencial periódico. Os resultados que discutiremos aqui serão aplicados no Capítulo 4.

Seja $e_1, \ldots, e_N$ uma base de $\mathbb{R}^N$. Consideremos $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ o subgrupo definido por:

$$\Gamma = \{z_1 e_1 + \ldots + z_N e_N; z_i \in \mathbb{Z}\},$$

o qual chamaremos de ***reticulado*** em $\mathbb{R}^N$.

Definição 2.35 *Uma função $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ será dita **Γ-periódica** ou **periódica com período de reticulado** Γ, quando $u(x+y) = u(x)$ para qualquer $y \in \Gamma$.*

Observemos que ao considerarmos o quociente de $(\mathbb{R}^N/\Gamma) = T^N$ obtemos um *N-**toro***. Além disso, se u é Γ-periódica, esta pode ser considerada como uma função sobre T^N.

Consideremos o espaço dual de $\mathbb{R}^N$, o qual denotaremos por $(\mathbb{R}^N)'$ e o identificaremos com o próprio $\mathbb{R}^N$. Se $\xi \in (\mathbb{R}^N)'$ e $x \in \mathbb{R}^N$, então $\xi \cdot x$ denotará o valor do funcional ξ aplicado a x; e também representará o produto interno em $\mathbb{R}^N$ de ξ por x, isto é, se $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ e $x = (x_1, \ldots, x_N)$ então

$$\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_N x_N.$$

Fixado $\xi \in (\mathbb{R}^N)'$, consideremos a exponencial $e^{i\xi \cdot x}$ como uma função de $x \in \mathbb{R}^N$. Estamos interessados em $\xi \in (\mathbb{R}^N)'$ tais que $e^{i\xi \cdot x}$ seja Γ-periódica com respeito a x. Uma condição necessária e suficiente para isto, é

$$\xi \cdot x \in 2\pi\mathbb{Z}, \ \forall \ x \in \Gamma.$$

Proposição 2.36 *Seja Γ' o conjunto de todos os vetores $\xi \in (\mathbb{R}^N)'$ tais que $\xi \cdot x = 2n\pi, \ n \in \mathbb{Z}$. Então, Γ' é um reticulado em $(\mathbb{R}^N)'$.*

Demonstração: Escolhamos uma base dual $\{e_i'\}_{i=1}^N$ para a base $\{e_i\}_{i=1}^N$, de modo que

$$e_i' e_j = 2\pi\delta_{ij}.$$

Escrevendo cada vetor ξ como combinação linear da base $\{e_i'\}_{i=1}^N$, vemos que a condição para que ξ pertença a Γ' é que cada coeficiente da combinação linear seja inteiro. Logo,

$$\Gamma' = \{z_1 e_1' + \ldots + z_N e_N'; z_i \in \mathbb{Z}\},$$

e isto conclui a prova.

□

Chamaremos Γ' de ***reticulado dual***. Notemos que se $\Gamma = \mathbb{Z}^N$ então $\Gamma' = 2\pi\mathbb{Z}^N$.

Definição 2.37 *O subconjunto $M_\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ mensurável tal que, para cada $x \in \mathbb{R}^N$, contém exatamente um representante da classe x módulo Γ, será dito uma **pilha unitária** do reticulado Γ.*

Exemplo 2.8 Se
$$\Gamma = \{z_1 e_1 + \ldots + z_N e_N; z_i \in \mathbb{Z}\},$$
então o conjunto
$$M_\Gamma = \{x; x = x_1 e_1 + \ldots + x_N e_N; x_i \in [0,1)\}$$
é uma pilha unitária do reticulado Γ. De fato, denotando por $[s]$ o maior inteiro m tal que $m \leq s \in \mathbb{R}$, se $y \in \mathbb{R}^N$, então podemos escrever
$$y = [y_1]e_1 + \ldots + [y_N]e_N + x_1 e_1 + \ldots + x_N e_N,$$
onde $x_i \in [0,1)$. Isto implica que $x = x_1 e_1 + \ldots + x_N e_N \in y + \Gamma$ é o único representante da classe y módulo Γ em M_Γ.

□

Uma pilha unitária $M_{\Gamma'}$ do reticulado dual Γ' é chamada de ***zona Brillouin*** e será denotada por B. Como no Exemplo 2.8, temos
$$B = M'_\Gamma = \{\xi; \xi = \xi_1 e'_1 + \ldots + \xi_N e'_N; \xi_i \in [0,1)\}.$$

Existe uma correspondência biunívoca natural $M_\Gamma \to T^N$, a qual é uma composição da inclusão $M_\Gamma \to \mathbb{R}^N$ com a projeção canônica $\mathbb{R}^N \to T^N$. Usando esta correspondência podemos introduzir a medida induzida no N-toro T^N pela medida de Lebesgue em M_Γ. Denotaremos esta medida simplesmente por dx. Com isto, podemos considerar o espaço de Hilbert
$$L^2(T^N) = L^2(T^N, dx).$$

Consideraremos também o espaço $C^\infty(T^N)$, que consiste de todas as funções C^∞ sobre o N-toro T^N ou, que é o mesmo, as funções C^∞ sobre $\mathbb{R}^N$ que são Γ-periódicas. Este espaço é denso em $L^2(T^N)$.

Lema 2.38 *O conjunto* $\{e^{i\gamma'\cdot x}\}_{\gamma'\in\Gamma}$ *é uma base ortogonal em* $L^2(T^N)$. *Em particular,* $L^2(T^N)$ *é separável.*

A prova deste lema encontra-se em Berezin-Shubin [4], Lema 5.1, Capítulo 3.
Consideremos o operador de Schrödinger

$$S_0 : D(S_0) \subset L^2(T^N) \to L^2(T^N), \tag{2.17}$$

definido por

$$S_0(u) = -\Delta u + V(x)u, \tag{2.18}$$

onde $D(S_0) = C^\infty(T^N)$ e o potencial V é uma função Γ-periódica mensurável e limitada.

Definição 2.39 (Funções Bloch) *Seja* Γ *um reticulado fixado em* $\mathbb{R}^N$. *As funções suaves sobre* $\mathbb{R}^N$ *da forma*

$$\psi(x) = e^{i\xi\cdot x}u(x), \tag{2.19}$$

com $\xi \in (\mathbb{R}^N)'$ *e* $u \in C^\infty(T^N)$, *são chamadas de* ***funções Bloch****.*

O vetor $\xi \in (\mathbb{R}^N)'$ é conhecido como ***quase-momento***. É imediato que o quase-momento não é unicamente definido pelas funções ψ, pois podemos tomar qualquer vetor $\xi' \in \Gamma'$ e escrever

$$\psi(x) = e^{i(\xi+\xi')\cdot x}[e^{-i\xi'\cdot x}u(x)],$$

já que a função exponencial $e^{-i\xi'\cdot x}$ é Γ-periódica. Fazendo uso desta incerteza, podemos assumir que $\xi \in B$.

Seja $L_\xi = \{\psi(x) = e^{i\xi\cdot x}u(x); u \in C^\infty(T^N)\}$ (notemos que $L_0 = C^\infty(T^N)$) o espaço das funções Bloch com quase-momento ξ.

Agora examinaremos o operador de Schrödinger S_0. Fazendo S_0 agir sobre as funções ψ da forma (2.19), obtemos

$$S_0(e^{i\xi\cdot x}u(x)) = e^{i\xi\cdot x}(-\Delta - 2i\xi\cdot\nabla + |\xi|^2 + V(x))u(x), \tag{2.20}$$

onde $\xi\cdot\nabla = \xi_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \xi_N\frac{\partial}{\partial x_N}$. Denotando

$$S_\xi = -\Delta - 2i\xi\cdot\nabla + |\xi|^2 + V(x),$$

com $S_\xi : C^\infty(T^N) \to L^2(T^N)$, podemos escrever (2.20) como

$$S_0(e^{i\xi\cdot x}u(x)) = e^{i\xi\cdot x}S_\xi u(x). \tag{2.21}$$

Em particular, se $\xi = 0$ temos $S_\xi = S_0$.

Consideremos agora o operador multiplicação $I_\xi : C^\infty(T^N) \to C^\infty(T^N)$ definido por

$$I_\xi u(x) = e^{i\xi\cdot x}u(x).$$

Desde que $I_\xi^{-1}u(x) = e^{-i\xi\cdot x}u(x)$, podemos reescrever (2.21) da seguinte forma:

$$I_\xi^{-1} S_0 I_\xi = S_\xi. \tag{2.22}$$

Sendo I_ξ um isomorfismo natural de L_0 em L_ξ, por (2.21) temos

$$S_0|_{L_\xi} = I_\xi \; S_\xi|_{L_0} \; I_\xi^{-1}. \tag{2.23}$$

O próximo teorema garantirá que $S_\xi|_{L_0}$ é essencialmente auto-adjunto, e desde que S_ξ é uma extensão de $S_\xi|_{L_0}$, pela Proposição 2.20, temos que S_ξ é o fecho de $S_\xi|_{L_0}$.

Teorema 2.40 (a) *O operador $S_\xi|_{L_0}$ é essencialmente auto-adjunto e semi-limitado inferiormente em $L^2(T^N)$;*

(b) *O espectro do operador S_ξ é discreto, isto é, existe um sistema ortogonal completo de autofunções $\{u_{j,\xi}\}$ deste operador, com autovalores $\{\lambda_j(\xi)\}$, $j = 1, 2, \ldots$, tais que $\lambda_j(\xi) \to \infty$ quando $j \to \infty$;*

(c) *Se $V \in C^\infty(T^N)$, então $u_{j,\xi} \in C^\infty(T^N)$, $j = 1, 2, \ldots$.*

A demonstração deste resultado encontra-se em Berezin-Shubin [4], Lema 5.2, Capítulo 3.

Seja $(u_{j,\xi})$ um sistema ortogonal completo de autofunções e $(\lambda_j(\xi))$ os autovalores correspondentes do operador S_ξ. Então

$$S_\xi u_{j,\xi} = \lambda_j(\xi) u_{j,\xi}, \; j = 1, 2, \ldots. \tag{2.24}$$

Fazendo

$$\psi_{j,\xi}(x) = e^{i\xi\cdot x}u_{j,\xi}(x), \tag{2.25}$$

multiplicando (2.24) por $e^{i\xi\cdot x}$ e usando (2.21), obtemos

$$S_0\psi_{j,\xi} = \lambda_j(\xi)\psi_{j,\xi}, \; j = 1, 2, \ldots,$$

ou seja, $\psi_{j,\xi}$ são autofunções Bloch do operador original de Schrödinger S_0. Temos assim provado a existência de autofunções Bloch do operador de Schrödinger com potencial periódico. Isto nos credencia a enunciar o seguinte resultado.

Teorema 2.41 *A menos de multiplicação por med$(M_{\Gamma'})$, a sequência $(\psi_{j,\xi})$ forma um sistema ortogonal completo de autofunções do operador de Schrödinger S_0.*

Este teorema e sua demonstração encontram-se em Berezin-Shubin [4], Teorema 5.3, Capítulo 3.

Nosso objetivo agora é introduzir o chamado *gap espectral*. Para tanto, precisamos estudar os autovalores $(\lambda_j(\xi))$ do operador S_0 cujas autofunções correspondentes são as funções Bloch $(\psi_{j,\xi})$ com quase-momento ξ. Notemos que $(\lambda_j(\xi))$ é uma aplicação definida sobre $(\mathbb{R}^N)'$.

Notemos ainda que o conjunto das funções $\lambda_j(\xi)$ não foram unicamente definidas até o momento, pois não haviamos especificado em qual ordem os autovalores $\lambda_j(\xi)$ do operador S_0 estavam enumerados. Para esta enumeração existem diferentes possibilidades. No entanto, escolheremos a mais natural: enumeraremos $\lambda_j(\xi)$ em ordem crescente, isto é, para todo $\xi \in (\mathbb{R}^N)'$ definamos

$$\lambda_1(\xi) \leq \lambda_2(\xi) \leq \lambda_3(\xi) \leq, \dots . \tag{2.26}$$

Isto é possível porque pelo Teorema 2.40, $\lambda_j(\xi) \to \infty$ quando $j \to \infty$.

Destacaremos agora um fato de grande importância para o nosso trabalho sobre o espectro $\sigma(S_0)$. Uma análise mais rigorosa e abrangente sobre este, encontra-se em Berezin-Shubin [4], Corolário 5.1, Capítulo 3. Veja também página 212.

Proposição 2.42 *O espectro do operador de Schrödinger $\sigma(S_0)$ é a união dos intervalos $[a_j, b_j]$, ou seja,*

$$\sigma(S_0) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j],$$

onde $a_j \leq a_{j+1}$ e $b_j \leq b_{j+1}$.

Os intervalos $[a_j, b_j]$ podem se intersectar em seus pontos de extremidades, estar contidos ou coincidirem. Além disso, $a_j \to \infty$ quando $j \to \infty$. Assim, existem duas possibilidades para $\sigma(S_0)$:

(i) $\sigma(S_0) = [c_1, d_1] \cup [c_2, d_2] \cup \ldots \cup [c_i, d_i] \cup [c_{i+1}, \infty)$, onde $c_1 < d_1 < c_2 < d_2 < \ldots < c_i < d_i < c_{i+1}$, de modo que os intervalos $[c_i, d_i]$ e $[c_{i+1}, \infty)$ não se intersectam. Então estes intervalos são unicamente determinados pelo conjunto $\sigma(S_0)$.

(ii) $\sigma(S_0) = [c_1, d_1] \cup [c_2, d_2] \cup \ldots \cup [c_i, d_i] \cup \ldots$, onde $d_i < c_{i+1}$, para $i = 1, 2, \ldots$. Aqui também os intervalos são unicamente determinados pelo conjunto $\sigma(S_0)$.

A primeira possibilidade é realizada quando os intervalos $[c_i, d_i]$ construídos acima cobrem todo o intervalo $[a, \infty)$, para algum a. A segunda possibilidade significa que existem segmentos do intervalo $[0, \infty)$ arbitrariamente distantes, os quais não contém pontos do espectro.

Definição 2.43 (gap espectral) *Os intervalos* $(-\infty, c_1), (d_1, c_2), (d_2, c_3), \ldots$ *que não contém pontos do espectro são chamados de* ***gap espectrais****.*

O espectro gap é também conhecido por ***lacunas ou zonas proibidas***.

Capítulo 3

Um Problema Elíptico Assintoticamente Linear em $\mathbb{R}^N$

Introdução

Neste capítulo, aplicaremos a teoria espectral do operador de Schrödinger estudada no Capítulo 2, para estabelecer a existência de solução positiva para a seguinte classe de problemas semilineares:

$$(P_\lambda) \qquad\qquad -\Delta u + \lambda u = f(x,u)u, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro, $N \geq 3$ e $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfaz as seguintes hipóteses:

(f_1) $\lim\limits_{s\to 0} f(x,s) = 0$, uniformemente em x;

(f_2) Para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $f(x,s)$ é uma função não-decrescente de s sobre $[0,\infty)$, e existe uma função $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$ tal que

$$\lim_{s\to\infty} f(x,s) = g(x),$$

uniformemente em x;

(f_3) Existe uma função $h \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ tal que

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x,s) = h(s),$$

uniformemente em s;

(f_4) $\lim\limits_{\substack{|x|\to\infty \\ s\to\infty}} f(x,s) = \lim\limits_{s\to\infty} h(s) = \lim\limits_{|x|\to\infty} g(x) = l_\infty \in (0,\infty)$;

(f_5) $f(x,s) \geq \lim\limits_{|x|\to\infty} f(x,s) = h(s)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $s \in \mathbb{R}^+$, e $f(x,s) > h(s)$, para $x \in \omega$ e $s \in \mathbb{R}^+$, onde $\omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto de medida positiva.

Exemplo 3.1 *Um exemplo de uma função que satisfaz as hipótese* (f_1)-(f_5) *é:*

$$f(x,s) = (1 - e^{-|x|})\frac{s}{1+s},$$

com $g(x) = 1 - e^{-|x|}$, $h(s) = \frac{s}{1+s}$ *e* $l_\infty = 1$.

Sob as hipóteses acima temos que

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{\widetilde{f}(x,s)}{s} = \lim_{s\to+\infty} f(x,s) = g(x),$$

onde $\widetilde{f}(x,s) = f(x,s)s$, ou seja, o problema (P_λ) é ***assintoticamente linear***.

Observação 3.1 (i) *Notemos que, ainda sob as hipóteses acima, temos* $g \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *e* $h \in C(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$ *(veja Observação1.22). Além disso, pela hipótese* (f_2),

$$0 \leq f(x,s) \leq g(x) < \infty.$$

(ii) *Ao longo de todo este capítulo, assumiremos, sem perda de generalidade, que* $f(x,s)$ *e* $h(s)$ *estão definidas para todo* $s \in \mathbb{R}$, *definindo* $f(x,s) = h(s) = 0$ *para* $s \leq 0$.

Os resultados deste capítulo são devidos a Costa-Tehrani [6].

O espaço natural para estudarmos o problema (P_λ) é $H^1(\mathbb{R}^N)$. Por uma ***solução clássica*** do problema (P_λ), entende-se uma função $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ que satisfaz a equação em cada ponto $x \in \mathbb{R}^N$. Por uma ***solução fraca*** de (P_λ), entende-se uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + \lambda uv)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)uvdx, \quad \forall\, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{3.1}$$

Assumida as hipóteses (f_1)-(f_5), nosso objetivo é provar o seguinte teorema de existência para o problema (P_λ):

Teorema 3.2 *Assuma as condições* (f_1)-(f_5) *e suponha* $0 < \lambda < |\Lambda|$. *Então, o problema* (P_λ) *possui uma solução fraca positiva.*

Observação 3.3 *Usando um argumento do tipo* ***bootstrap****, sob as hipóteses* (f_1)*-*(f_5)*, pode-se mostrar que toda solução fraca* u *de* (P_λ)*, de fato, pertence a* $W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathbb{R}^N)$ [1]*, para todo* $p \geq 2$*, de modo que*

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \ e \ \lim_{|x|\to\infty} \nabla u(x) = 0.$$

Estas afirmações podem ser encontradas em Stuart-Zhou [20], Teorema 2.2.

O metódo que utilizaremos para provar a existência de solução fraca para o problema (P_λ) é variacional. Para isto, consideremos o funcional energia $I_\lambda : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ associado ao problema (P_λ) definido por:

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx, \tag{3.2}$$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)tdt$ e $\|u\|_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + \lambda u^2)dx$. Notemos que $\|\cdot\|_\lambda$ define uma norma que é equivalente à norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, o funcional I_λ é bem definido. De fato, pela Observação 3.1 temos $F(x,s) \leq C\int_0^s tdt = \widetilde{C}s^2$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx \leq \widetilde{C}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx < \infty, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Devemos notar ainda que $F(x,s) \leq \widetilde{C}s^2$, implica que I_λ é de classe C^1 com

$$I'_\lambda(u)(v) = \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u \nabla v + \lambda uv)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)uvdx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

(veja Exemplo 1.1 e Lema 1.42).

Assim, encontrar uma solução fraca para o problema (P_λ) é equivalente a determinar um ponto crítico do funcional energia I_λ. Em particular, se u é um ponto crítico de I_λ, então [2]

$$\begin{aligned} 0 = I'_\lambda(u)(u^-) &= \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u \nabla u^- + \lambda uu^-)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)uu^- dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u \nabla u^- + \lambda uu^-)dx \\ &= \|u^-\|_\lambda^2, \end{aligned}$$

onde $u^-(x) = \min\{0, u(x)\}$. Portanto, temos necessariamente que $u \geq 0$. Além disso, se u é não-trivial, então utilizando a desigualdade de Harnack como na demonstração do Lema 1.24, concluímos que u é estritamente positiva.

Para obter a existência de um ponto crítico não-trivial para I_λ, usaremos o Teorema 1.44, o qual tem a condição de compacidade de Cerami como uma de suas hipóteses. O estudo detalhado desta condição será o assunto da próxima seção.

[1] Para definição de $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$, veja notações.

[2] Note que $f(x,u) = 0$ se $u \leq 0$.

3.1 Condição de Compacidade de Cerami

A essência de toda esta seção é provar que o funcional I_λ satisfaz a condição de compacidade de Cerami. Antes de darmos início aos resultados, faremos algumas considerações importantes. Definamos

$$\Lambda = \inf \left\{ \int (|\nabla u|^2 - g(x)u^2) dx; u \in H^1(\mathbb{R}^N), \int u^2 dx = 1 \right\}.$$

Salvo mensão em contrário, denotaremos por $\int$ a integral em $\mathbb{R}^N$. Pelo Teorema 2.27, temos $\Lambda = \inf \sigma(S)$, onde $S : D(S) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ é o fecho operador de Schrödinger definido por

$$S_0 u = -\Delta u - g(x)u \quad \text{com} \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Observação 3.4 *Desde que o espectro essencial de S é $\sigma_{ess}(S) = [-l_\infty, \infty)$, temos*

$$-|g|_\infty \leq \Lambda \leq -l_\infty < 0.$$

Para provar a condição $(Ce)_c$ do funcional I_λ, iniciaremos com dois resultados preliminares.

Lema 3.5 *Sob a condição (f_1), suponha que $\lim\limits_{\substack{|x| \to \infty \\ s \to \infty}} f(x, s) = l_\infty$ e sejam $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ sequências satisfazendo*

(i) $v_n \rightharpoonup v$ *em* $H^1(\mathbb{R}^N)$;

(ii) $t_n \to \infty$ *e* $I'_\lambda(t_n v_n)/t_n \to 0$, *quando* $n \to \infty$.

Então, para toda sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, para a qual

$$\int_{y_n + B(0,1)} v_n^2 dx \geq \alpha > 0,$$

tem-se que (y_n) é necessariamente limitada.

Demonstração: Faremos a prova por contradição. Seja $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{y_n + B(0,1)} v_n^2 dx \geq \alpha > 0.$$

Suponha que existe uma subsequência de (y_n), também denotada por (y_n), tal que $|y_n| \to \infty$. Definindo

$$\tilde{v}_n(x) = v_n(x + y_n),$$

temos que $\nabla \tilde{v}_n(x) = \nabla v_n(x + y_n)$. Então, usando a mudança de variável $z = x + y_n$, obtemos

$$\int (|\nabla v_n(x+y_n)|^2 + \lambda v_n^2(x+y_n))dx = \int (|\nabla v_n(z)|^2 + \lambda v_n^2(z))dz$$

e

$$\int_{B(0,1)} \tilde{v}_n^2 dx \geq \alpha,$$

ou seja, $\|\tilde{v}_n\|_\lambda = \|v_n\|_\lambda$ e $\int_{B(0,1)} \tilde{v}_n^2 dx \geq \alpha$. Assim, segue que $(\tilde{v}_n)$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pois $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Podemos então assumir, passando a uma subsequência se necessário, que

$$\tilde{v}_n \rightharpoonup \tilde{v} \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N),$$

para alguma $\tilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, desde que o operador restrição de $H^1(\mathbb{R}^N) \to H^1(B(0,1))$, $u \mapsto u|_{B(0,1)}$, é contínuo e a imersão $H^1(B(0,1)) \hookrightarrow L^r(B(0,1))$, $1 \leq r < 2^*$, é compacta, então

$$\tilde{v}_n \to \tilde{v} \text{ em } L^2(B(0,1)). \tag{3.3}$$

Assim,

$$\int_{B(0,1)} \tilde{v}^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_{B(0,1)} \tilde{v}_n^2 dx \geq \alpha > 0.$$

Logo, $\tilde{v} \neq 0$. Sendo que $\tilde{v}_n \rightharpoonup \tilde{v}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pelo Lema 1.19 podemos assumir que

$$\tilde{v}_n \to \tilde{v} \;\; \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Agora, dada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, denotando $\varphi_n(x) = \varphi(x - y_n)$, temos

$$\frac{I'_\lambda(t_n v_n)(\varphi_n)}{t_n} = \int (\nabla v_n \nabla \varphi_n + \lambda v_n \varphi_n)dx - \int f(x, t_n v_n) v_n \varphi_n dx.$$

Fazendo $x = z + y_n$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{I'_\lambda(t_n v_n)(\varphi_n)}{t_n} &= \int (\nabla \tilde{v}_n(z) \nabla \varphi(z) + \lambda \tilde{v}_n(z)\varphi(z))dz \\ &\quad - \int f(z+y_n, t_n v_n(z+y_n)) v_n(z+y_n)\varphi(z)dz.\end{aligned}$$

Pela hipótese (ii), dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $n > n_0$ implica

$$\left|\frac{I'_\lambda(t_n v_n)(\varphi_n)}{t_n}\right| \leq \varepsilon \|\varphi_n\|_\lambda = \varepsilon \|\varphi\|_\lambda,$$

ou seja,

$$\Big|\int(\nabla\tilde{v}_n\nabla\varphi+\lambda\tilde{v}_n\varphi)dz-\int f(z+y_n,t_nv_n(z+y_n))v_n(z+y_n)\varphi(z)dz\Big|$$
$$\leq \ \varepsilon\|\varphi\|_\lambda. \tag{3.4}$$

Desde que $\tilde{v}_n \rightharpoonup \tilde{v}$ temos

$$\int(\nabla\tilde{v}_n\nabla\varphi+\lambda\tilde{v}_n\varphi)dz\to\int(\nabla\tilde{v}\nabla\varphi+\lambda\tilde{v}\varphi)dz. \tag{3.5}$$

Estudaremos então a convergência da segunda parcela em (3.4). Para isto, observando que $f(x,s)=0$ para $s\leq 0$, tem-se

$$f(z+y_n,t_nv_n(z+y_n))v_n(z+y_n)\geq 0.$$

Desde que $\lim\limits_{\substack{|x|\to\infty\\ s\to\infty}} f(x,s)=l_\infty$ e $\tilde{v}_n\to\tilde{v}$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, obtemos (observemos que $|t_n\tilde{v}_n|\to\infty$, pois (v_n) é limitada)

$$f(z+y_n,t_nv_n(z+y_n))v_n(z+y_n)\to l_\infty\tilde{v}^+(z) \ \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

e consequentemente,

$$f(z+y_n,t_nv_n(z+y_n))v_n(z+y_n)\varphi(z)\to l_\infty\tilde{v}^+(z)\varphi(z) \ \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{3.6}$$

Além disso, com o mesmo argumento de (3.3), tem-se

$$\tilde{v}_n\to\tilde{v} \text{ em } L^1(B(0,R)),$$

onde $\mathrm{supp}(\varphi)\subset B(0,R)$, para $R>0$ suficientemente grande. Juntando-se a isto o Teorema 1.5, temos que existe $w\in L^1(B(0,R))$ tal que, a menos de subsequência,

$$|\tilde{v}_n(x)|\leq w(x), \ \text{ em } B(0,R),$$

e

$$|f(z+y_n,t_nv_n(z+y_n))v_n(z+y_n)\varphi(z)|\leq Cw(z), \tag{3.7}$$

para todo $x\in\mathbb{R}^N$ e $C=l_\infty\|\varphi\|_\infty$. Visto que $|y_n|\to\infty$ e $t_n\to\infty$, segue de (3.6)-(3.7), pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\int f(z+y_n,t_nv_n(z+y_n))v_n(z+y_n)\varphi(z)dz\to\int l_\infty\tilde{v}^+(z)\varphi(z)dz. \tag{3.8}$$

Portanto, de (3.4), (3.5) e (3.8), obtemos

$$\int(\nabla\tilde{v}\nabla\varphi+\lambda\tilde{v}\varphi)dz-\int l_\infty\tilde{v}^+(z)\varphi(z)dz=0, \tag{3.9}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, ou seja, $\tilde{v}$ é uma solução fraca não-trivial do problema

$$-\Delta\widetilde{v} = (l_\infty - \lambda)\widetilde{v} \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N.$$

Pelo Corolário 1.27, $\tilde{v} \in H^2(\mathbb{R}^N)$. O que é uma contradição em virtude do Corolário 1.35. Portanto, (y_n) é limitada.

□

Lema 3.6 *Sob as condições* (f_1)-(f_2), *assuma que* $\liminf_{|x|\to\infty} g(x) = l_\infty$ *e sejam* $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ *sequências satisfazendo*

(i) $v_n \rightharpoonup v$ *em* $H^1(\mathbb{R}^N)$;

(ii) $I'_\lambda(t_n v_n)/t_n \to 0$, *quando* $n \to \infty$.

Se $t_n \to \infty$, *então* $v = 0$ *ou* $\lambda = -\Lambda$.

Demonstração: Vamos supor que $v \neq 0$ e concluir que necessariamente $\lambda = -\Lambda$. Com efeito, dada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\frac{I'_\lambda(t_n v_n)(\varphi)}{t_n} = \int (\nabla v_n \nabla\varphi + \lambda v_n\varphi)dx - \int f(x, t_n v_n)v_n\varphi dx.$$

Por (ii), dado $\varepsilon > 0$, tem-se que

$$\left| \int (\nabla v_n \nabla\varphi + \lambda v_n\varphi)dx - \int f(x, t_n v_n)v_n\varphi dx \right| \leq \varepsilon\|\varphi\|_\lambda, \tag{3.10}$$

para todo $n > n_0$. Desde que $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int (\nabla v_n \nabla\varphi + \lambda v_n\varphi)dx \to \int (\nabla v \nabla\varphi + \lambda v\varphi)dx, \tag{3.11}$$

e considerando o Lema 1.19 podemos assumir que

$$v_n \to v \ \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Com os mesmos argumentos utilizados para (3.6)-(3.7), na prova do lema anterior, concluímos que

$$f(x, t_n v_n(x))v_n(x)\varphi(x) \to g(x)v^+(x)\varphi(x) \ \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N \tag{3.12}$$

e

$$|f(x, t_n v_n)v_n\varphi| \leq Cw, \tag{3.13}$$

para alguma $w \in L^1(B(0,R))$, $C = \|g\|_\infty \|\varphi\|_\infty$ e para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Portanto, por (3.12) e (3.13), podemos usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir que

$$\int f(x, t_n v_n) v_n \varphi dx \to \int g(x) v^+ \varphi dx. \tag{3.14}$$

Então, usando (3.11) e (3.14) em (3.10), obtemos

$$\int (\nabla v \nabla \varphi + \lambda v \varphi) dx - \int g(x) v^+ \varphi dx = 0. \tag{3.15}$$

Tomando $\varphi = v^-$, tem-se

$$\int (\nabla v \nabla v^- + \lambda v v^-) dx = \int g(x) v^+ v^- dx = 0,$$

ou seja, $\|v^-\|_\lambda = 0$. Logo, $v = v^+ \geq 0$. Aplicando o Lema 1.24 concluímos que $v > 0$. Além disso, pelo Lema 1.26, segue que $v \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Assim, podemos aplicar a identidade de Green para obter

$$\int [-\Delta v + (\lambda - g(x)) v] \varphi dx = 0,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Pelo Lema 1.7, temos que

$$-\Delta v + (\lambda - g(x)) v = 0, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \tag{3.16}$$

ou seja, $Sv = -\lambda v$, onde $Sv = -\Delta v - g(x) v$. Em outras palavras, v é uma autofunção positiva associada ao autovalor $-\lambda$. Ainda por (3.15), tomando $\varphi = v$ e escrevendo $u = v / \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, tem-se

$$\int (|\nabla u|^2 - g(x) u^2) dx = -\lambda.$$

Logo, pela definição de Λ, obtemos

$$\Lambda \leq -\lambda.$$

Desde que

$$\Lambda \leq -l_\infty,$$

conforme Observação 3.4, consideraremos então dois casos:

Caso 1: $\Lambda < -l_\infty$.

Pelo Teorema 2.32, segue que S possui um número finito $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ou uma sequência (λ_n) enumerável de autovalores tais que $\lambda_n \to -l_\infty$, λ_i com multiplicidade finita para cada i. Pela caracterização variacional dos autovalores, Teorema 2.27, temos que Λ é o menor autovalor de S; mais precisamente, existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 1$ tal que

$$\int (|\nabla u_0|^2 - g(x)u_0^2)dx = \Lambda, \tag{3.17}$$

onde u_0 é autofunção correspondente ao autovalor Λ. Por (3.17) podemos assumir que $u_0 \geq 0$. Além disso, aplicando um argumento análogo ao usado na prova do Lema 1.24, temos que $u_0 > 0$. Então, necessariamente

$$\Lambda = -\lambda,$$

pois do contrário S teria duas autofunções positivas v e u_0 associadas a autovalores distintos, o que é uma contradição, já que autofunções associadas a autovalores distintos são ortogonais.

Caso 2: $\Lambda = -l_\infty$.

Neste caso, temos $\Lambda = -l_\infty \leq -\lambda$ e novamente mostraremos que $\Lambda = -l_\infty = -\lambda$. Com efeito, desde que $v > 0$ é uma solução não-trivial de (P_g), por (3.15), então pela Proposição 1.33 segue que $-\lambda \leq -l_\infty$. Portanto, $\Lambda = -\lambda$, concluindo a prova do lema.

$\square$

Faremos agora uma proposição que é o principal passo para a demonstração da condição de Cerami para o funcional I_λ.

Proposição 3.7 *Assuma as condições $(f_1) - (f_4)$. Se (u_n) é uma sequência de Cerami no nível $c > 0$ do funcional I_λ então (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, quando $\lambda \neq -\Lambda$.*

Demonstração: O argumento é por contradição. Seja (u_n) uma sequência de Cerami no nível $c > 0$ do funcional I_λ, e suponha que $\|u_n\|_\lambda \to \infty$. Definamos $v_n = 2\sqrt{c}u_n/\|u_n\|_\lambda$. Então, $\|v_n\|_\lambda = 2\sqrt{c}$. Desde que $H^1(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo, passando a uma subsequência se necessário, pelo Teorema 1.10 podemos assumir que existe $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Como o operador restrição de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $H^1(B(0,R))$, $u \mapsto u|_{B(0,R)}$, é contínuo e a imersão de $H^1(B(0,R))$ em $L^p(B(0,R))$, $1 \leq p < 2^*$, é compacta, temos que

$$v_n \to v \;\text{ em }\; L^p(B(0,R)),\; 1 \leq p < 2^*, \tag{3.18}$$

para cada $R > 0$. Sendo (u_n) uma sequência de Cerami no nível c, então

$$(1 + \|u_n\|_\lambda)\|I'_\lambda(u_n)\| \to 0.$$

Desde que $\|u_n\|_\lambda \|I'_\lambda(u_n)\| \leq (1 + \|u_n\|_\lambda)\|I'_\lambda(u_n)\|$, podemos supor sem perda de generalidade que

$$\|u_n\|_\lambda \|I'_\lambda(u_n)\| \leq \frac{1}{n}. \tag{3.19}$$

Afirmação 1: $I_\lambda(tu_n) \leq \frac{1+t^2}{2n} + I_\lambda(u_n)$, para todo $t > 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Com efeito,

$$|I'_\lambda(u_n)(u_n)| \leq \|u_n\|_\lambda \|I'_\lambda(u_n)\| \leq \frac{1}{n},$$

ou seja,

$$-\frac{1}{n} \leq \|u_n\|_\lambda^2 - \int f(x, u_n)u_n^2 dx \leq \frac{1}{n}. \tag{3.20}$$

Visto que

$$I_\lambda(tu_n) = \frac{t^2}{2}\|u_n\|_\lambda^2 - \int F(x, tu_n)dx,$$

por (3.20), temos

$$\begin{aligned} I_\lambda(tu_n) &\leq \frac{t^2}{2}\Big(\frac{1}{n} + \int f(x, u_n)u_n^2 dx\Big) - \int F(x, tu_n)dx \\ &= \frac{t^2}{2n} + \int h(t, x)dx, \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde

$$h(t, x) = \frac{t^2}{2} f(x, u_n)u_n^2 - F(x, tu_n).$$

Para concluir nossa afirmação, é suficiente provar que

$$h(t, x) \leq h(1, x), \text{ para todo } t > 0. \tag{3.22}$$

De fato, se (3.22) é válido, então usando (3.20) e (3.22), obtemos

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 - \int F(x, u_n)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{n} + \int f(x, u_n)u_n^2 dx\Big) - \int F(x, u_n)dx \\ &= -\frac{1}{2n} + \int h(1, x)dx \\ &\geq -\frac{1}{2n} + \int h(t, x)dx; \end{aligned}$$

e usando (3.21), tem-se

$$I_\lambda(u_n) \geq -\frac{1}{2n} + I_\lambda(tu_n) - \frac{t^2}{2n},$$

ou seja,

$$I_\lambda(tu_n) \leq \frac{1+t^2}{2n} + I_\lambda(u_n),$$

para todo $t > 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Provemos então (3.22). Para tanto, observemos que

$$\begin{aligned} h'(t,x) &= tf(x,u_n)u_n^2 - f(x,tu_n)tu_nu_n \\ &= tu_n^2(f(x,u_n) - f(x,tu_n)), \end{aligned}$$

pois $F(x,tu_n) = \int_0^{tu_n} f(x,s)sds$ e $F'(x,tu_n) = f(x,tu_n)tu_nu_n$. Desde que $f(x,s)$ é não-decrescente na variável s temos

$$f(x,u_n) \geq f(x,tu_n), \text{ se } 0 < t \leq 1,$$

e

$$f(x,u_n) \leq f(x,tu_n), \text{ se } t \geq 1.$$

Logo,

$$h'(t,x) \geq 0, \text{ se } 0 < t \leq 1$$

e

$$h'(t,x) \leq 0, \text{ se } t \geq 1.$$

Portanto, h é não-decrescente em $0 < t \leq 1$ e não-crescente para $t \geq 1$, isto é, $h(t,x) \leq h(1,x)$ para todo $t > 0$ e isto prova (3.22).

Seja agora $v_n = t_nu_n$, com $t_n = \frac{2\sqrt{c}}{\|u_n\|_\lambda} \to 0$. Então, pela Afirmação 1, tem-se que

$$I_\lambda(v_n) = I_\lambda(t_nu_n) \leq \frac{1+t_n^2}{2n} + I_\lambda(u_n). \tag{3.23}$$

Como $I_\lambda(u_n) \to c$, por hipótese, e $\frac{1+t_n^2}{2n} \to 0$, então dado $\varepsilon > 0$ obtemos por (3.23) que

$$I_\lambda(v_n) \leq c + \varepsilon, \tag{3.24}$$

para n suficientemente grande.

Afirmação 2: $v \neq 0$.

Para provar esta afirmação, usaremos o Lema 1.20. Consideremos a função de concentração de $|v_n|^2$,

$$Q_n(r) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B(0,r)} |v_n|^2 dx, \ r > 0.$$

Se $\lim_{n\to\infty} Q_n(r_0) = 0$, para algum $r_0 > 0$, então pelo Lema 1.20, $v_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $p \in (2, 2^*)$. Sendo

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)tdt$$

e f não-decrescente, segue que $F(x,s) \leq f(x,s)\int_0^s tdt$, ou seja,

$$F(x,s) \leq \frac{1}{2}f(x,s)s^2, \tag{3.25}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $s \geq 0$.

Afirmamos que

$$f(x,s)s^2 \leq \varepsilon s^2 + C(\varepsilon,q)s^q, \tag{3.26}$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}^N$, $s \geq 0$ e $2 < q \leq 2^*$. De fato, por (f_1), dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,s)| < \varepsilon, \text{ se } s < \delta.$$

Por (f_2), existe $M \geq 1$ de modo que

$$f(x,s) < \varepsilon + g(x) \leq \|g\|_\infty + \varepsilon = C_\varepsilon, \text{ se } s > M.$$

Então, para $2 < q < 2^*$,

$$\begin{cases} f(x,s)s^2 < \varepsilon s^2, & \text{se } \ s < \delta; \\ \\ f(x,s)s^2 < C_\varepsilon s^2 \leq C_\varepsilon s^q, & \text{se } \ s > M. \end{cases}$$

Agora, para cada $q \in (2, 2^*]$, definamos $h_q : [\delta, M] \to \mathbb{R}$ por

$$h_q(s) = \frac{f(x,s)s^2}{s^q}.$$

Então, h_q é contínua e assume um máximo no compacto $[\delta, M]$, ou seja,

$$\frac{f(x,s)s^2}{s^q} \leq C_q, \ \text{ em } [\delta, M],$$

e isto implica (3.26).

Desde que $v_n \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, $2 < q < 2^*$, obtemos por (3.25)-(3.26) que

$$\begin{aligned} \int F(x,v_n)dx &\leq \int \frac{1}{2}f(x,v_n)v_n^2dx \\ &\leq \int (\frac{1}{2}\varepsilon|v_n|^2 + C(\varepsilon,q)|v_n|^q)dx \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon\|v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + C(\varepsilon,q)\|v_n\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon C + C(\varepsilon,q)\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Consequentemente (lembremos que $v_n = t_n u_n$ e $t_n = \frac{2\sqrt{c}}{\|u_n\|_\lambda}$),

$$\begin{aligned} I_\lambda(v_n) &= \frac{1}{2}\|v_n\|_\lambda^2 - \int F(x, v_n)dx \\ &\geq 2c - \varepsilon, \end{aligned}$$

que resulta numa contradição, pois sendo $c > 0$, considerando, por exemplo, $\varepsilon = \frac{c}{4}$ de forma que

$$I_\lambda(v_n) \geq \frac{7}{4}c.$$

Porém, por (3.24), $I_\lambda(v_n) \leq \frac{5}{4}c$ para n suficientemente grande. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(r) > 0,$$

para todo $r > 0$. Passando a uma subsequência se necessário, assumiremos que

$$Q_n(1) > \alpha,$$

para algum $\alpha > 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, podemos supor que

$$\int_{y_n+B(0,1)} |v_n|^2 dx \geq \alpha, \tag{3.27}$$

para alguma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$. De fato, se

$$\int_{y_n+B(0,1)} |v_n|^2 dx < \alpha,$$

para toda sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, então

$$Q_n(1) = \sup_{y_n\in\mathbb{R}^N} \int_{y_n+B(0,1)} |v_n|^2 dx < \alpha,$$

que é uma contradição. Lembrando que $t_n = \frac{2\sqrt{c}}{\|u_n\|_\lambda} \to 0$ temos $t_n^{-1} \to \infty$ e $t_n^{-1}v_n = u_n$. Então, usando (3.19), obtemos

$$\|I_\lambda'(t_n^{-1}v_n)\| = \|I_\lambda'(u_n)\| < \frac{1}{n\|u_n\|_\lambda} \to 0. \tag{3.28}$$

Logo, por (3.27) e (3.28) podemos aplicar o Lema 3.5 para concluir que (y_n) é limitada, digamos $|y_n| \leq R$, para algum $R > 0$. Afirmamos que

$$\int_{B(0,R+1)} |v_n|^2 dx \geq \alpha. \tag{3.29}$$

De fato, caso contrário, desde que $|y_n| \leq R$ segue que $y_n + B(0,1) \subset B(0, R+1)$ e

$$\int_{y_n+B(0,1)} |v_n|^2 dx \leq \int_{B(0,R+1)} |v_n|^2 dx < \alpha,$$

contradizendo (3.27).

Por (3.18), temos que $v_n \to v$ em $L^p(B(0, R+1)),\ 1 \leq p < 2^*$, e portanto

$$\int_{B(0,R+1)} |v|^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_{B(0,R+1)} |v_n|^2 dx \geq \alpha > 0,$$

mostrando que $v \neq 0$, e provando a afirmação 2.

Finalmente, desde que $v \neq 0$ e, por hipótese, $\lambda \neq -\Lambda$, obtemos pelo Lema 3.6 que t_n^{-1} é limitada, o que é uma contradição, pois $t_n^{-1} \to \infty$. Portanto, a proposição estar provada.

$\square$

Agora, relembrando a definição da função h em (f_3), consideremos o funcional $I_\lambda^\infty : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, dado por

$$I_\lambda^\infty(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \int H(u)dx, \tag{3.30}$$

onde $H(s) = \int_0^s h(t)tdt$. Pelo Exemplo 1.1 e Lema 1.42, segue que $I_\lambda^\infty \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e

$$I_\lambda^{\infty\prime}(u)(v) = \int \nabla u \nabla v + \lambda uv - \int h(u)uvdx,\ \forall\ v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Consideremos a ***Variedade de Nehari*** $M_\lambda^\infty \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ definida por

$$M_\lambda^\infty := \{u \neq 0 \in H^1(\mathbb{R}^N); I_\lambda^{\infty\prime}(u)(u) = 0\}.$$

Definamos

$$0 < m_\lambda^\infty := \inf_{u\in M_\lambda^\infty} I_\lambda^\infty(u),\ \text{se}\ M_\lambda^\infty \neq \varnothing,\ \ \text{e}\ \ m_\lambda^\infty := \infty,\ \text{se}\ M_\lambda^\infty = \varnothing.$$

Agora estamos prontos para provar a condição $(Ce)_c$ para o funcional I_λ.

Teorema 3.8 *Assuma as hipóteses (f_1)-(f_4). Se $0 < \lambda < |\Lambda|$ então o funcional I_λ satisfaz a condição $(Ce)_c$ para todo $c \in (0, m_\lambda^\infty)$.*

Demonstração: Seja (u_n) uma sequência de Cerami no nível $c \in (0, m_\lambda^\infty)$ do funcional I_λ. Então, dado $\varepsilon > 0$, temos

$$I_\lambda(u_n) = \frac{1}{2}\int (|\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2)dx - \int F(x, u_n)dx \to c < m_\lambda^\infty \tag{3.31}$$

e

$$\left|I'_\lambda(u_n)(\phi)\right| = \left|\int(\nabla u_n\nabla\phi + \lambda u_n\phi)dx - \int f(x,u_n)u_n\phi dx\right| \leq \varepsilon\|\phi\|_\lambda, \quad (3.32)$$

para n suficientemente grande. Como por hipótese $\lambda \neq -\Lambda$, a Proposição 3.7 garante que (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Para provaremos que (u_n) possui uma subsequência convergente, utilizaremos o primeiro Lema de Concentração de Compacidade de P. L. Lions [13]. No intuito de facilitar o entendimento, enunciaremos agora este lema, o qual se encontra, com uma pequena variação, em Kavian [11].

Lema 3.9 (Concentração de Compacidade) *Seja (ρ_n) uma sequência em $L^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\rho_n > 0$ em $\mathbb{R}^N$ e*

$$\int \rho_n dx = \alpha,$$

onde $\alpha > 0$ é um número real fixado. Então existe uma subsequência (ρ_{n_k}) satisfazendo uma das três condições:

(i) (Anulamento) *Para todo $R > 0$,*

$$\limsup_{k\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{y+B(0,R)} \rho_{n_k}(x)dx = 0;$$

(ii) (Dicotomia) *Existe $\alpha_0 \in (0,\alpha)$ tal que, para $\varepsilon > 0$, existem: $k_0 \geq 1$, uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, $R > 0$ e uma sequência $(R_n) \subset \mathbb{R}^+$, com $R < R_1$ e $R_n < R_{n+1} \to \infty$; de modo que, se*

$$\tilde{\rho}_n = \rho_n \chi_{\{|x-y_n|\leq R\}} \qquad \text{e} \qquad \tilde{\tilde{\rho}}_n = \rho_n \chi_{\{|x-y_n|\geq R_n\}},$$

onde χ_A denota a função característica do conjunto A, então

$$\left|\int \tilde{\rho}_k(x)dx - \alpha_0\right| \leq \varepsilon, \qquad \left|\int \tilde{\tilde{\rho}}_k(x)dx - (\alpha-\alpha_0)\right| \leq \varepsilon$$

e

$$\int |\rho_{n_k}(x) - (\tilde{\rho}_k(x)dx + \tilde{\tilde{\rho}}_k(x))|dx \leq \varepsilon,$$

para todo $k \geq k_0$, e

$$\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(\tilde{\rho}_k), \operatorname{supp}(\tilde{\tilde{\rho}}_k)) \to \infty,$$

quando $k \to \infty$;

(iii) (Compacidade) *Existe uma sequência* $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ *tal que, dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $R > 0$ *de modo que*

$$\int_{y_k + B(0,R)} \rho_{n_k}(x)dx \geq \alpha - \varepsilon,$$

para todo k.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\|u_n\|_\lambda > 0$, para todo n. Definamos

$$\rho_n := |\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2.$$

Temos que (ρ_n) é uma sequência em $L^1(\mathbb{R}^N)$ e, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que

$$\int \rho_n(x)dx \to \beta > 0,$$

quando $n \to \infty$. Notemos que se $\beta = 0$, então $\|u_n\|_\lambda^2 \to 0$, e por (3.25), (3.26) e a imersão de Sobolev temos

$$\begin{aligned} \int F(x, u_n)dx &\leq \int \frac{1}{2} f(x, u_n)u_n^2 dx \\ &\leq \int (\frac{1}{2}\varepsilon |u_n|^2 + C(\varepsilon, q)|u_n|^q)dx \\ &\leq \frac{1}{2}\varepsilon \|u_n\|_\lambda^2 + C(\varepsilon, q)\|u_n\|_\lambda^q dx \to 0. \end{aligned}$$

Assim, $I_\lambda(u_n) \to 0$, que é uma contradição pois $I_\lambda(u_n) \to c > 0$.

Definindo

$$\rho_n' = \frac{\rho_n}{\int \rho_n dx},$$

tem-se $\int \rho_n' dx = 1 > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Desde que (ρ_n') satisfaz as hipóteses do Lema 3.9 com $\alpha = 1$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que (ρ_n) também cumpre as hipóteses deste lema, ou seja, que

$$\int \rho_n dx = \alpha$$

(veja Kavian [11], Teorema 8.1 e Observação 8.2).

Afirmação 1: O Anulamento não ocorre. Suponhamos que o anulamento ocorra, isto é, para todo $R > 0$,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B(0,R)} (|\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2)dx = 0,$$

passando a uma subsequência de (ρ_n) se necessário. Em particular,

$$\limsup_{k\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{y+B(0,R)} u_n^2dx=0,$$

para todo $R>0$. Então, pelo Lema 1.20, temos

$$u_n\to 0 \ \text{ em } \ L^q(\mathbb{R}^N), \quad q\in(2,2^*). \tag{3.33}$$

Por (3.26),

$$\int f(x,u_n)u_n^2dx \ \leq \ \varepsilon\|u_n\|_\lambda^2+C(\varepsilon,q)\|u_n\|_\lambda^q, \tag{3.34}$$

para $q\in(2,2^*)$. Fazendo $\phi=u_n$ em (3.32), tem-se

$$I'_\lambda(u_n)(u_n)=\|u_n\|_\lambda^2-\int f(x,u_n)u_n^2dx\leq\varepsilon\|u_n\|_\lambda,\forall n\in\mathbb{N}. \tag{3.35}$$

Por (3.34), temos

$$I'_\lambda(u_n)(u_n)\geq\|u_n\|_\lambda^2-\varepsilon\|u_n\|_\lambda^2+C(\varepsilon,q)\|u_n\|_\lambda^q.$$

Desde que (u_n) é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$, $\|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\to 0$ e $\|u_n\|_\lambda^2=\alpha>0$, para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno temos

$$o_n(1)+\frac{\alpha}{2}\leq I'_\lambda(u_n)(u_n)\leq C\varepsilon,$$

que é uma contradição. Portanto, o anulamento não ocorre.

Afirmação 2: A Dicotomia não ocorre. Com efeito, suponhamos que a dicotomia ocorra. Então, existe $\alpha_0\in(0,\alpha)$ tal que, para todo $\varepsilon>0$, existem: $n_0\geq 1$, $R>0$, $(y_n)\subset\mathbb{R}^N$, $(R_n)\subset\mathbb{R}^+$, com $R<R_1$, $R_n<R_{n+1}\to\infty$; de modo que (denotando (ρ_{n_k}) por (ρ_n), para simplificar)

$$\Big|\int\tilde{\rho}_n(x)dx-\alpha_0\Big|\leq\varepsilon \quad \text{e} \quad \Big|\int\tilde{\tilde{\rho}}_n(x)dx-(\alpha-\alpha_0)\Big|\leq\varepsilon.$$

Em particular,

$$\alpha_0-\varepsilon\leq\int_{|x-y_n|\leq\frac{R}{2}}(|\nabla u_n|^2+\lambda u_n^2)dx \tag{3.36}$$

e

$$\alpha-\alpha_0-\varepsilon\leq\int_{|x-y_n|\geq 3R_n}(|\nabla u_n|^2+\lambda u_n^2)dx. \tag{3.37}$$

Lembrando que $\alpha = \int(|\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2)dx$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\frac{R}{2}\le|x-y_n|\le 3R_n}(|\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2)dx &= \alpha - \int_{|x-y_n|\ge 3R_n}(|\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2)dx \\ &\quad - \int_{|x-y_n|\le\frac{R}{2}}(|\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2)dx \\ &\le \alpha_0 + \varepsilon - \alpha_0 + \varepsilon,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\frac{R}{2}\le|x-y_n|\le 3R_n}(|\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2)dx \le 2\varepsilon. \tag{3.38}$$

Agora, tomemos $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \le \psi \le 1$ e

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad |x| \le 1 \\ 0, & \text{se} \quad |x| \ge 2. \end{cases}$$

Se $\varphi = 1 - \psi$, temos

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad |x| \le 1 \\ 1, & \text{se} \quad |x| \ge 2. \end{cases}$$

Consideremos as sequências $\psi_n(x) = \psi(\frac{x-y_n}{R})$ e $\varphi_n(x) = \varphi(\frac{x-y_n}{R_n})$, para $x \in \mathbb{R}^N$, e definamos

$$u_n^1(x) = \psi_n(x)u_n(x) \qquad \text{e} \qquad u_n^2(x) = \varphi_n(x)u_n(x).$$

Então, para cada n, temos

$$u_n^1(x) = \begin{cases} u_n(x), & \text{se} \quad |x-y_n| \le R \\ 0, & \text{se} \quad |x-y_n| \ge 2R \end{cases}$$

e

$$u_n^2(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad |x-y_n| \le R_n \\ u_n(x), & \text{se} \quad |x-y_n| \ge 2R_n. \end{cases}$$

Afirmamos que

$$I_\lambda(u_n) \ge I_\lambda(u_n^1) + I_\lambda(u_n^2) - C\varepsilon, \tag{3.39}$$

para algum $C > 0$. De fato, denotando por $\rho_n^i = |\nabla u_n^i|^2 + \lambda(u_n^i)^2$, $i = 1, 2$, temos

$$\begin{aligned}\Big|I_\lambda(u_n) - I_\lambda(u_n^1) - I_\lambda(u_n^2)\Big| = \Big|&\frac{1}{2}\int \rho_n dx - \int F(x,u_n)dx \\ &-\frac{1}{2}\int \rho_n^1 dx + \int F(x,u_n^1)dx \\ &-\frac{1}{2}\int \rho_n^2 dx + \int F(x,u_n^2)dx\Big|.\end{aligned}$$

Denotando $A_n = \{x \in \mathbb{R}^N; \frac{R}{2} \leq |x-y_n| \leq 3R_n\}$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\int \rho_n dx - \int \rho_n^1 dx - \int \rho_n^2 dx &= \int_{|x-y_n|\leq \frac{R}{2}} \rho_n dx + \int_{A_n} \rho_n dx + \int_{|x-y_n|\geq 3R_n} \rho_n dx \\ &- \int_{|x-y_n|\leq \frac{R}{2}} \rho_n^1 dx - \int_{A_n} \rho_n^1 dx - \int_{|x-y_n|\geq 3R_n} \rho_n^1 dx \\ &- \int_{|x-y_n|\leq \frac{R}{2}} \rho_n^2 dx - \int_{A_n} \rho_n^2 dx - \int_{|x-y_n|\geq 3R_n} \rho_n^2 dx.\end{aligned}$$

Pela definição de u_n^i, segue que

$$\int \rho_n dx - \int \rho_n^1 dx - \int \rho_n^2 dx = \int_{A_n} \rho_n dx - \int_{A_n} \rho_n^1 dx - \int_{A_n} \rho_n^2 dx.$$

Com os mesmo argumentos acima obtemos

$$\begin{aligned}-\int F(x,u_n)dx &+ \int F(x,u_n^1)dx + \int F(x,u_n^2)dx \\ &= -\int_{A_n} F(x,u_n)dx + \int_{A_n} F(x,u_n^1)dx + \int_{A_n} F(x,u_n^2)dx.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\Big|I_\lambda(u_n) - I_\lambda(u_n^1) - I_\lambda(u_n^2)\Big| &= \Big|\frac{1}{2}\int_{A_n} \rho_n dx - \int_{A_n} F(x,u_n)dx \\ &-\frac{1}{2}\int_{A_n} \rho_n^1 dx + \int_{A_n} F(x,u_n^1)dx \\ &-\frac{1}{2}\int_{A_n} \rho_n^2 dx + \int_{A_n} F(x,u_n^2)dx\Big|. \qquad (3.40)\end{aligned}$$

Sabemos que $\int_{A_n} \rho_n dx \leq 2\varepsilon$, por (3.38). Estimaremos então os demais termos da igualdade acima. Começaremos por estimar $\int_{A_n} |\nabla u_n^1|^2 dx$. Com efeito, sendo $\nabla u_n^1 = \frac{1}{R}(\nabla \psi_n)u_n + \psi_n(\nabla u_n)$, temos

$$\begin{aligned}\int_{A_n} |\nabla u_n^1|^2 dx &= \int_{A_n} |\frac{1}{R}(\nabla\psi_n)u_n + \psi_n(\nabla u_n)|^2 dx \\ &\leq \frac{2}{R^2}\int_{A_n} |\nabla\psi_n|^2 (u_n)^2 dx + 2\int_{A_n} \psi_n |\nabla u_n|^2 dx \\ &\leq \frac{2}{R^2}\int_{A_n} |\nabla\psi_n|^2 (u_n)^2 dx + 4\varepsilon.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes conjugados $\dfrac{1}{\frac{N}{2}} + \dfrac{1}{\frac{N}{N-2}} = 1$, obtemos

$$\int_{A_n} |\nabla \psi_n|^2 (u_n)^2 dx \ \leq \Big(\int_{A_n} |\nabla \psi_n|^N dx \Big)^{2/N} \Big(\int_{A_n} |u_n|^{2^*} dx \Big)^{2/2^*}.$$

Desde que $\|\nabla \psi_n\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla \psi\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}$ e $H^1(A_n) \hookrightarrow L^{2^*}(A_n)$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{A_n} |\nabla \psi_n|^2 (u_n)^2 dx \ &\leq \|\nabla \psi\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \Big(\int_{A_n} |\nabla u_n|^2 + \lambda (u_n)^2 dx \Big) \\ &\leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{A_n} |\nabla u_n^1|^2 dx \leq C\varepsilon,$$

que juntamente com $|u_n^1| \leq |u_n|$ e (3.38) implica

$$\int_{A_n} \rho_n^1 dx \leq C\varepsilon + \int_{A_n} \lambda (u_n)^2 dx \leq C\varepsilon. \tag{3.41}$$

Com os mesmos argumentos, obtemos

$$\int_{A_n} \rho_n^2 dx \leq C\varepsilon. \tag{3.42}$$

Desde que $0 \leq F(x,s) \leq Cs^2$ e $|u_n^1| \leq |u_n|$, temos

$$\int_{A_n} F(x, u_n^1) dx \leq C \int_{A_n} (u_n^1)^2 dx \leq \int_{A_n} (u_n)^2 dx \leq C\varepsilon. \tag{3.43}$$

Do mesmo modo, obtemos

$$\int_{A_n} F(x, u_n) dx \leq C\varepsilon \quad \text{ e } \quad \int_{A_n} F(x, u_n^2) dx \leq C\varepsilon. \tag{3.44}$$

Portanto, segue de (3.40)-(3.44) que

$$\Big| I_\lambda(u_n) - I_\lambda(u_n^1) - I_\lambda(u_n^2) \Big| \leq C\varepsilon,$$

obtendo assim (3.39).

Afirmamos agora que

$$\Big| \|u_n^1\|_\lambda^2 - \int f(x, u_n^1)(u_n^1)^2 dx \Big| \leq C\varepsilon, \tag{3.45}$$

para alguma constante $C > 0$. Com efeito, utilizando a definiçao de u_n^1, temos

$$\begin{aligned}
&\Big| I'_\lambda(u_n)(u_n^1) - \Big(\|u_n^1\|_\lambda^2 - \int f(x,u_n^1)(u_n^1)^2 dx \Big) \Big| \\
&= \Big| \int_{A_n} (\nabla u_n \nabla u_n^1 + \lambda u_n u_n^1) dx - \int_{A_n} f(x,u_n) u_n u_n^1 dx \\
&- \int_{A_n} (|\nabla u_n^1|^2 + \lambda (u_n^1)^2) dx + \int_{A_n} f(x,u_n^1)(u_n^1)^2 dx \Big|. \qquad (3.46)
\end{aligned}$$

Desde que f é não-decrescente na segunda coordenada e $|u_n^1| \leq |u_n|$, usando a desigualdade (3.26) obtemos

$$f(x,u_n^1)(u_n^1)^2 \leq f(x,u_n)|u_n u_n^1| \leq f(x,u_n)(u_n)^2 \leq \varepsilon |u_n|^2 + C_\varepsilon |u_n|^q.$$

Utilizando a imersão $H^1(A_n) \hookrightarrow L^q(A_n)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Big| \int_{A_n} f(x,u_n) u_n u_n^1 dx \Big| &\leq \int_{A_n} \Big(\varepsilon |u_n|^2 + C(\varepsilon,q)|u_n|^q \Big) dx \\
&\leq \varepsilon \|u_n\|_{L^2(A_n)}^2 + C(\varepsilon,q) \Big(\int_{A_n} (|\nabla u_n|^2 + \lambda (u_n)^2) dx \Big)^{q/2} \\
&\leq C\varepsilon. \qquad (3.47)
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int_{A_n} f(x,u_n^1)(u_n^1)^2 dx \leq C\varepsilon. \qquad (3.48)$$

Pela desigualdade de Hölder e (3.41), tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{A_n} (\nabla u_n \nabla u_n^1 + \lambda u_n u_n^1) dx &\leq \Big(\int_{A_n} \rho_n dx \Big)^{1/2} \Big(\int_{A_n} \rho_n^1 dx \Big)^{1/2} \\
&\leq C\varepsilon.
\end{aligned} \qquad (3.49)$$

De (3.46)-(3.49), obtemos

$$\Big| I'_\lambda(u_n)(u_n^1) - \Big(\|u_n^1\|_\lambda^2 - \int f(x,u_n^1)(u_n^1)^2 dx \Big) \Big| \leq C\varepsilon.$$

Consequentemente,

$$\Big| \|u_n^1\|_\lambda^2 - \int f(x,u_n^1)(u_n^1)^2 dx \Big| \leq |I'_\lambda(u_n)(u_n^1)| + C\varepsilon. \qquad (3.50)$$

Usando (3.32)

$$\Big| \|u_n^1\|_\lambda^2 - \int f(x,u_n^1)(u_n^1)^2 dx \Big| \leq C\varepsilon, \qquad (3.51)$$

para algum $C > 0$ e n suficientemente grande.

Analogamente, tem-se

$$\left| \|u_n^2\|_\lambda^2 - \int f(x, u_n^2)(u_n^2)^2 dx \right| \leq C\varepsilon. \tag{3.52}$$

Todo o nosso trabalho até o momento foi apenas considerações relevantes para provar que a dicotomia não ocorre. Para concluir a prova da não ocorrência, consideraremos dois casos: quando a sequência (y_n), dada pelo Lema 3.9, é limitada ou não-limitada.

Caso 1: (y_n) é limitada.

Se (y_n) é limitada, temos que os centros das bolas $B(y_n, R_n)$ não convergem a infinito, e como $R_n \to \infty$, tem-se que as bolas crescem de acordo com n, a partir de um n_0 suficientemente grande. Desde que, $u_n^2(x) = 0$, se $|x - y_n| \leq R_n$, segue que

$$\text{supp}(u_n^2) \subset B(y_n, R_n)^C.$$

Por (f_3), dado $\varepsilon > 0$, temos que $|f(x, u_n^2) - h(u_n^2)| \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, para $|x| > r > 0$ suficientemente grande. Agora, sendo $(u_n^2)^2$ integrável,

$$\int_{|x|>r} (u_n^2)^2 dx \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

para r grande. Para n suficientemente grande, obtemos

$$\text{supp}(u_n^2) \subset B(y_n, R_n)^C \subset B(0, r)^C.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| \int [f(x, u_n^2)u_n^2 - h(u_n^2)u_n^2] dx \right| &= \left| \int_{\text{supp}(u_n^2)} [f(x, u_n^2) - h(u_n^2)] u_n^2 dx \right| \\ &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_{\text{supp}(u_n^2)} (u_n^2)^2 dx \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.53}$$

De (3.52)-(3.53) temos

$$\begin{aligned} \left| I_\lambda^{\infty\prime}(u_n^2)(u_n^2) \right| &= \left| \|u_n^2\|_\lambda^2 - \int h(u_n^2)(u_n^2)^2 dx \right| \\ &\leq \left| \|u_n^2\|_\lambda^2 - \int f(x, u_n^2)(u_n^2)^2 dx \right| + \left| \int [f(x, u_n^2)u_n^2 - h(u_n^2)u_n^2] dx \right| \\ &\leq C\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.54}$$

De modo análogo, dado $\varepsilon > 0$, temos por (f_3) que $|f(x,s) - h(s)| \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, para s suficientemente grande. Então,

$$
\begin{aligned}
\Big| \int [F(x,u_n^2) - H(u_n^2)]dx \Big| &\leq \int_{\text{supp}(u_n^2)} \int_0^{u_n^2} |f(x,s) - h(s)| s ds dx \\
&= \int_{\text{supp}(u_n^2)} \int_0^{u_n^2} \varepsilon^{\frac{1}{2}} s ds dx \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_{\text{supp}(u_n^2)} (u_n^2)^2 dx \\
&\leq \varepsilon. \qquad (3.55)
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
\Big| I_\lambda(u_n^2) - I_\lambda^\infty(u_n^2) \Big| &= \Big| - \int F(x,u_n^2)dx + \int H(u_n^2)dx \Big| \\
&\leq \varepsilon, \qquad (3.56)
\end{aligned}
$$

ou seja, $I_\lambda(u_n^2) = I_\lambda^\infty(u_n^2) + o(1)$.

Nosso objetivo agora é mostrar que, se a dicotomia ocorre, então $M_\lambda^\infty \neq \varnothing$. Para tanto, começaremos definindo

$$
w_n^2(x) := u_n^2(\sigma x), \quad \sigma \neq 0 \in \mathbb{R}.
$$

Notemos que fazendo mudança de variável temos

$$
\begin{aligned}
I_\lambda^{\infty\prime}(w_n^2)(w_n^2) &= \int (|\nabla w_n^2|^2 + \lambda (w_n^2)^2)dx - \int h(w_n^2)(w_n^2)^2 dx \\
&= \int (\sigma^2 |\nabla u_n^2(\sigma x)|^2 + \lambda (u_n^2(\sigma x))^2)dx \\
&- \int h(u_n^2(\sigma x))(u_n^2(\sigma x))^2 dx \\
&= \int (\sigma^{2-N} |\nabla u_n^2(x)|^2 + \sigma^{-N}\lambda (u_n^2(x))^2)dx \\
&- \sigma^{-N} \int h(u_n^2(x))(u_n^2(x))^2 dx \\
&= \sigma^{-N}\Big[(\sigma^2 - 1)\int |\nabla u_n^2|^2 dx + \int (|\nabla u_n^2|^2 + \lambda (u_n^2)^2)dx \\
&- \int h(u_n^2)(u_n^2)^2 dx\Big].
\end{aligned}
$$

Por (3.54), podemos denotar

$$
\varepsilon_n = \int (|\nabla u_n^2|^2 + \lambda (u_n^2)^2)dx - \int h(u_n^2)(u_n^2)^2 dx,
$$

com $\varepsilon_n \to 0$. Logo,

$$I_\lambda^{\infty\prime}(w_n^2)(w_n^2) = \sigma^{-N}\Big[(\sigma^2 - 1)\int |\nabla u_n^2|^2 dx + \varepsilon_n\Big].$$

Para que M_λ^∞ seja não vazio, é suficiente que $\int |\nabla u_n^2|^2 dx := a_n > 0$, n grande. De fato, se $a_n > 0$, para n suficientemente grande, então podemos tomar

$$\sigma_n = (1 - \frac{\varepsilon_n}{a_n})^{\frac{1}{2}}.$$

Notemos que, se $\varepsilon_n \leq 0$ então $1 - \frac{\varepsilon_n}{a_n} > 0$; e se $\varepsilon_n > 0$, como a_n é limitada, pois (u_n^2) o é em $H^1(\mathbb{R}^N)$, é possível tomar ε_n pequeno o bastante tal que $1 - \frac{\varepsilon_n}{a_n} > 0$. Assim, temos

$$(\sigma_n^2 - 1)\int |\nabla u_n^2|^2 dx + \varepsilon_n = 0, \tag{3.57}$$

ou seja, $I_\lambda^{\infty\prime}(w_n^2)(w_n^2) = 0$ e $w_n^2 \in M_\lambda^\infty$. Portanto, se a dicotomia ocorrer, tem-se que $M_\lambda^\infty \neq \varnothing$. Precisamos então provar que

$$\int |\nabla u_n^2|^2 dx \geq a_0 > 0.$$

Com efeito, suponhamos que existe uma subsequência, também denotada por (u_n^2), tal que

$$\int |\nabla u_n^2|^2 dx \to 0. \tag{3.58}$$

Como estamos supondo que a dicotomia ocorre, temos

$$\Big|\int \tilde{\tilde{\rho}}_n dx - (\alpha - \alpha_0)\Big| = \Big|\int_{|x-y_n|\geq R_n} (|\nabla u_n|^2 + \lambda (u_n)^2) dx - (\alpha - \alpha_0)\Big| \leq \varepsilon.$$

Desde que, pela definição de u_n^2,

$$\int_{|x-y_n|\geq R_n} [(u_n^2)^2 - (u_n)^2] dx = \int_{R_n \leq |x-y_n| \leq 2R_n} (u_n^2)^2 dx,$$

tem-se

$$\begin{aligned}\Bigg|\Big|\int_{|x-y_n|\geq 2R_n} |\nabla u_n|^2 dx \quad &+ \quad \int_{|x-y_n|\geq R_n} \lambda (u_n^2)^2 dx - (\alpha - \alpha_0)\Big| \\ &- \quad \Big|\int_{|x-y_n|\geq R_n} (|\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2) dx - (\alpha - \alpha_0)\Big|\Bigg| \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

para n suficientemente grande; em particular,

$$\int_{|x-y_n|\geq 2R_n} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{|x-y_n|\geq R_n} \lambda (u_n^2)^2 dx \geq (\alpha - \alpha_0) - \varepsilon. \tag{3.59}$$

Agora, sendo $\varphi_n(x) = 1$, se $|x - y_n| \geq 2R_n$, temos

$$\begin{aligned} \int_{|x-y_n|\geq R_n} |\nabla u_n^2|^2 dx &= \int_{|x-y_n|\geq R_n} |\frac{1}{R_n} u_n(\nabla \varphi_n) + \varphi_n(\nabla u_n)|^2 dx \\ &\geq \int_{|x-y_n|\geq 2R_n} |\frac{1}{R_n} u_n(\nabla \varphi_n) + \varphi_n(\nabla u_n)|^2 dx \\ &= \int_{|x-y_n|\geq 2R_n} |\nabla u_n|^2 dx. \end{aligned}$$

Assim, obtemos por (3.59) que (lembremos que $u_n^2(x) = 0$, se $|x - y_n| \leq R_n$)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n^2|^2 dx + \lambda (u_n^2)^2) dx &\geq \int_{|x-y_n|\geq 2R_n} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{|x-y_n|\geq R_n} \lambda (u_n^2)^2 dx \\ &\geq (\alpha - \alpha_0) - \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Por outro lado, usando (3.26) e (3.52) temos que

$$\begin{aligned} \int (|\nabla u_n^2|^2 dx + \lambda (u_n^2)^2) dx &\leq \int f(x, u_n^2)(u_n^2)^2 dx + C\varepsilon \\ &\leq \int (\varepsilon (u_n^2)^2 + C(\varepsilon, 2^*)(u_n^2)^{2^*}) dx + C\varepsilon \\ &= \varepsilon \int (u_n^2)^2 dx + C(\varepsilon, 2^*) \int (u_n^2)^{2^*} dx + C\varepsilon, \end{aligned}$$

e utilizando a imersão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int (|\nabla u_n^2|^2 dx + \lambda (u_n^2)^2) dx \leq \varepsilon \int (u_n^2)^2 dx + C_1(\varepsilon, 2^*) \int |\nabla u_n^2|^2 dx + C\varepsilon.$$

Assim, em vista de (3.60), tem-se

$$(\alpha - \alpha_0) - \varepsilon \leq \varepsilon \int (u_n^2)^2 dx + C_1(\varepsilon, 2^*) \int |\nabla u_n^2|^2 dx + C\varepsilon,$$

que é uma contradição, pois usando (3.58), e sendo (u_n^2) limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$, podemos fazer $\varepsilon \to 0$ e $n \to \infty$ e concluir que

$$0 < (\alpha - \alpha_0) \leq 0.$$

Portanto, temos necessariamente que

$$\int |\nabla u_n^2|^2 dx \geq a_0 > 0$$

e $M_\lambda^\infty \neq \varnothing$, caso a dicotomia ocorra.

Finalmente, estamos prontos para provar que a dicotomia não pode acontecer no caso 1. Fazendo mudança de variável temos

$$\begin{aligned}
I_\lambda^\infty(w_n^2) &= \frac{1}{2}\int (|\nabla w_n^2|^2 + \lambda(w_n^2)^2)dx - \int H(w_n^2)dx \\
&= \frac{1}{2}\int (\sigma_n^2|\nabla u_n^2(\sigma_n x)|^2 + \lambda(u_n^2(\sigma_n x))^2)dx - \int H(u_n^2(\sigma_n x))dx \\
&= \frac{1}{2}\sigma_n^{-N}\int (\sigma_n^2|\nabla u_n^2(x)|^2 + \lambda(u_n^2(x))^2)dx - \sigma_n^{-N}\int H(u_n^2(x))dx \\
&= \frac{1}{2}\sigma_n^{-N}(\sigma_n^2 - 1)\int |\nabla u_n^2|^2 dx + \sigma_n^{-N}\Big[\frac{1}{2}\int (|\nabla u_n^2|^2 + \lambda(u_n^2)^2)dx \\
&- \int H(u_n^2)dx\Big] \\
&= \frac{1}{2}\sigma_n^{-N}(\sigma_n^2 - 1)\int |\nabla u_n^2|^2 dx + \sigma_n^{-N} I_\lambda^\infty(u_n^2) \\
&= \frac{1}{2}\sigma_n^{-N}(\sigma_n^2 - 1)\int |\nabla u_n^2|^2 dx + (\sigma_n^{-N} - 1)I_\lambda^\infty(u_n^2) + I_\lambda^\infty(u_n^2),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$I_\lambda^\infty(w_n^2) = I_\lambda^\infty(u_n^2) + \frac{1}{2}\sigma_n^{-N}(\sigma_n^2 - 1)\int |\nabla u_n^2|^2 dx + (\sigma_n^{-N} - 1)I_\lambda^\infty(u_n^2). \tag{3.61}$$

Também temos que $I_\lambda^\infty(u_n^2)$ é limitada. De fato, usando (3.55) e $F(x, u_n^2) \leq C(u_n^2)^2$, tem-se

$$\begin{aligned}
|I_\lambda^\infty(u_n^2)| &= \Big|\frac{1}{2}\|u_n^2\|_\lambda^2 - \int H(u_n^2)dx\Big| \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_n^2\|_\lambda^2 + \Big|\int (F(x, u_n^2) - H(u_n^2))dx\Big| + \Big|\int F(x, u_n^2)dx\Big| \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_n^2\|_\lambda^2 + C\|u_n^2\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \varepsilon,
\end{aligned}$$

e sendo (u_n^2) limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos a limitação desejada.

Utilizando (3.56) e (3.61), temos

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_n^2) &\geq I_\lambda^\infty(u_n^2) - \varepsilon \\
&= I_\lambda^\infty(w_n^2) - \frac{1}{2}\sigma_n^{-N}(\sigma_n^2 - 1)\int |\nabla u_n^2|^2 dx - (\sigma_n^{-N} - 1)I_\lambda^\infty(u_n^2) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Sendo $(\sigma_n^2 - 1)\int |\nabla u_n^2|^2 dx = -\varepsilon_n$, por (3.57), onde $\sigma_n = (1 - \frac{\varepsilon_n}{a_n})^{\frac{1}{2}}$, tem-se para $\varepsilon = |\varepsilon_n|$ que

$$I_\lambda(u_n^2) \;\geq\; I_\lambda^\infty(w_n^2) - \frac{1}{2}\sigma_n^{-N}\varepsilon_n + (\sigma_n^{-N} - 1)I_\lambda^\infty(u_n^2) - |\varepsilon_n|.$$

Desde que $\sigma_n \to 1$ quando $\varepsilon_n \to 0$ e $I_\lambda^\infty(u_n^2)$ é limitada, então

$$I_\lambda(u_n^2) \geq I_\lambda^\infty(w_n^2) - \varepsilon_n',$$

onde $\varepsilon_n' > 0$ tal que $\varepsilon_n' \to 0$, ou ainda, (veja definição de m_λ^∞)

$$I_\lambda(u_n^2) \geq m_\lambda^\infty - \varepsilon_n'. \tag{3.62}$$

Para a sequência (u_n^1), usando (3.25) e (3.51), temos

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n^1) &= \frac{1}{2}\|u_n^1\|_\lambda^2 - \int F(x,u_n^1)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int f(x,u_n^1)(u_n^1)^2dx - \varepsilon_n' - \int F(x,u_n^1)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int f(x,u_n^1)(u_n^1)^2dx - \int \frac{1}{2}f(x,u_n^1)(u_n^1)^2dx - \varepsilon_n', \end{aligned}$$

ou seja,

$$I_\lambda(u_n^1) \geq -\varepsilon_n'. \tag{3.63}$$

Finalmente, por (3.39), (3.62) e (3.63), obtemos

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) &\geq I_\lambda(u_n^1) + I_\lambda(u_n^2) - \varepsilon_n' \\ &\geq m_\lambda^\infty - 2\varepsilon_n', \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois temos $I_\lambda(u_n) \to c < m_\lambda^\infty$ e $\lim_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) \geq m_\lambda^\infty$.

Portanto, de fato, a dicotomia não ocorre no Caso 1.

Caso 2: (y_n) não é limitada.

Passando se necessário a uma subsequência, que também denotaremos por (y_n), podemos assumir que $|y_n| \to \infty$. Pela definição de u_n^1 temos

$$u_n^1(x) = 0, \quad |x - y_n| \geq 2R,$$

e segue que $\text{supp}(u_n^1) \subset B(y_n, 2R)$, com os centros das bolas $B(y_n, 2R)$ convergindo a infinito. Assim, podemos repetir para u_n^1 os mesmos argumentos feitos para u_n^2 no Caso 1. Já para u_n^2, agora repetiremos a argumentação feita com u_n^1 no Caso 1. Logo, obtemos a mesma contradição anterior.

Portanto, podemos afirmar que a dicotomia não ocorre e que a afirmação 2 está provada.

Assim pelo Lema 3.9 a compacidade ocorre, ou seja, existe uma sequência (y_n) em $\mathbb{R}^N$ tal que, dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ de modo que

$$\int_{B(y_n,R)} \rho_n dx \geq \alpha - \varepsilon,$$

ou melhor,

$$\int_{B(y_n,R)^C} \rho_n = \int \rho_n dx - \int_{B(y_n,R)} \rho_n dx \leq \varepsilon. \tag{3.64}$$

Como no Caso 2 da dicotomia, podemos mostrar que se para alguma subsequência de (y_n) temos $|y_n| \to \infty$, obtemos uma contradição com

$$I_\lambda(u_n) \to c < m_\lambda^\infty.$$

Logo, (y_n) é uma sequência limitada e, para cada $\varepsilon > 0$, existe R_0 suficientemente grande tal que

$$B(y_n, R) \subset B(0, R_0).$$

Como consequência de (3.64), temos

$$\begin{aligned}\int_{B(0,R_0)^C} (|\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2) dx &\leq \int_{B(y_n,R)^C} (|\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2) dx \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned} \tag{3.65}$$

Desde que (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pelo Lema 1.10 podemos assumir que

$$u_n \rightharpoonup u, \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Afirmamos que $u_n \to u,$ em $L^p(\mathbb{R}^N),\ 2 \leq p < 2^*$. De fato, sendo $|u|^p$ integrável, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $R' > 0$ grande tal que

$$\int_{B(0,R')^C} |u|^p dx \leq \varepsilon. \tag{3.66}$$

Logo, se $\bar{R} = \max\{R_0, R'\}$, então por (3.66), tem-se

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^p dx &= \int_{B(0,\bar{R})} |u_n - u|^p dx + \int_{B(0,\bar{R})^C} |u_n - u|^p dx \\ &\leq \varepsilon + 2^p \Big(\int_{B(0,\bar{R})^C} |u_n|^p dx + \int_{B(0,\bar{R})^C} |u|^p dx \Big) \\ &\leq C\varepsilon,\end{aligned}$$

onde acima usamos a imersão de Sobolev e (3.65) para estimar o termo com $|u_n|^p$. Assim, realmente temos $u_n \to u,$ em $L^p(\mathbb{R}^N),\ 2 \leq p < 2^*$.

Pelo Teorema 1.5,

$$u_n \to u, \ q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

e existe $h_2 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|u_n| \leq h_2, \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Pela Observação 3.1,

$$f(x, u_n)u_n^2 \leq gh_2^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

e

$$|f(x, u_n)u_n u| \leq gh_2|u| \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\int f(x, u_n)u_n^2 dx \to \int f(x, u)u^2 dx \tag{3.67}$$

e

$$\int f(x, u_n)u_n u dx \to \int f(x, u)u^2 dx. \tag{3.68}$$

De modo similar, tem-se

$$\int f(x, u)u_n u dx \to \int f(x, u)u^2 dx. \tag{3.69}$$

Por fim, afirmamos que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
I'_\lambda(u_n)(u_n - u) - I'_\lambda(u)(u_n - u) = & \\
& \int (\nabla u_n \nabla(u_n - u) + \lambda u_n(u_n - u))dx - \int f(x, u_n)u_n(u_n - u)dx \\
& - \int (\nabla u \nabla(u_n - u) + \lambda u(u_n - u))dx + \int f(x, u)u(u_n - u)dx \\
& = \int (|\nabla(u_n - u)|^2 + \lambda(u_n - u)^2)dx - \int f(x, u_n)u_n^2 dx \\
& + \int f(x, u_n)u_n u dx + \int f(x, u)uu_n dx - \int f(x, u)u^2 dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|_\lambda^2 &= I'_\lambda(u_n)(u_n - u) - I'_\lambda(u)(u_n - u) \\
&\quad + \int f(x, u_n)u_n^2 dx + \int f(x, u)u^2 dx \\
&\quad - \int f(x, u_n)u_n u dx - \int f(x, u)uu_n dx.
\end{aligned}$$

Desde que $I'_\lambda(u_n)(u_n - u) \to 0$ e $I'_\lambda(u)(u_n - u) \to 0$, pois $(u_n - u) \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, segue de (3.67)-(3.69) que

$$\|u_n - u\|_\lambda^2 \to 0.$$

Assim, a sequência de Cerami (u_n) possui uma subsequência convergente, e o teorema está provado.

□

Teorema 3.10 *Assuma as hipóteses* (f_1)-(f_4). *Suponha que* $f(x,s) = h(s)$ *e que* $0 < \lambda < |\Lambda|$. *Se* (u_n) *é uma sequência de Cerami de* I_λ *no nível* $c = m_\lambda^\infty$, *então existe uma sequência* (y_n) *em* $\mathbb{R}^N$ *tal que* $\bar{u}_n(x) = u_n(x + y_n)$ *possui uma subsequência convergente em* $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: A prova é praticamente uma repetição da demonstração do Teorema 3.8. Não reproduziremos toda a prova do teorema, mas faremos algumas etapas que supomos relevantes. Como feito para o Teorema 3.8, aplicaremos o Lema 3.9 a:

$$\rho_n := |\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2,$$

e mostraremos que nem o anulamento nem a dicotomia ocorrem.

Afirmação 1: O Anulamento não ocorre.

A prova é a mesma da Afirmação 1 do Teorema 3.8.

Afirmação 2: A Dicotomia não ocorre.

Suponha que ocorra. Como na prova da Afirmação 2 do Teorema 3.8, obtemos

$$I_\lambda(u_n) \geq I_\lambda(u_n^1) + I_\lambda(u_n^2) - C\varepsilon, \tag{3.70}$$

e

$$\left| \|u_n^i\|_\lambda^2 - \int f(x, u_n^i)(u_n^i)^2 dx \right| \leq C\varepsilon, \;\; i = 1, 2. \tag{3.71}$$

Desde que $f(x,s) = h(s)$, temos

$$\int f(x, u_n^i)(u_n^i)^2 dx = \int h(u_n^i)(u_n^i)^2 dx, \;\; i = 1, 2.$$

Isto, juntamente com (3.71), implicam que

$$\left| I_\lambda^{\infty\prime}(u_n^i)(u_n^i) \right| \;\; = \;\; \left| \|u_n^i\|_\lambda^2 - \int h(u_n^i)(u_n^i)^2 dx \right| \leq C\varepsilon, \;\; i = 1, 2. \tag{3.72}$$

Do mesmo modo, sendo

$$\int F(x, u_n^i) dx = \int H(u_n^i) dx, \;\; i = 1, 2, \tag{3.73}$$

temos

$$\left| I_\lambda(u_n^i) - I_\lambda^\infty(u_n^i) \right| \leq \varepsilon, \;\; i = 1, 2. \tag{3.74}$$

Como na prova do Teorema 3.8, usando (3.72), tem-se

$$w_n^2 \in M_\lambda^\infty,$$

e agora, de modo análogo, obtemos

$$w_m^1 := u_m^1(\sigma_m x) \in M_\lambda^\infty,$$

com $\sigma_m = (1 - \frac{\varepsilon_m}{b_m})$, onde $b_m = \int |\nabla u_m^1|^2 dx > 0$. Assim, com as considerações feitas para (3.62), temos

$$I_\lambda(u_n^i)1 \geq I_\lambda^\infty(w_m^i) - \varepsilon'_m, \quad i = 1, 2,$$

com $\varepsilon'_m \to 0$, ou ainda, usando a definição de m_λ^∞,

$$I_\lambda(u_n^i) \geq m_\lambda^\infty - \varepsilon'_m, \quad i = 1, 2. \tag{3.75}$$

Agora, em vista de (3.70) e (3.75), tem-se

$$I_\lambda(u_n) \geq 2m_\lambda^\infty - \varepsilon'_m,$$

o que é uma contradição, pois fazendo $n \to \infty$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) \geq 2m_\lambda^\infty$ e $I_\lambda(u_n) \to c = m_\lambda^\infty$.

Observemos que a única diferença da prova da Afirmação 2 do Teorema 3.8 é que, sendo f independente de x, obtemos imediatamente (3.72), que é crucial na prova de que $w_m^1 \in M_\lambda^\infty$, e (3.73), que auxilia a obtenção de (3.75) e a consequente contradição.

Portanto, a dicotomia não ocorre.

Desde que o anulamento e a dicotomia não ocorrem, pelo Lema 3.9, a compacidade ocorre, ou seja, existe $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que, dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ de modo que

$$\int_{B(y_n,R)} (|\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2) dx \geq \alpha - \varepsilon,$$

e fazendo uma mudança de variável, obtemos

$$\int_{B(0,R)^C} (|\nabla \bar{u}_n|^2 + \lambda \bar{u}_n^2) dx \leq \varepsilon,$$

onde $\bar{u}_n(x) = \bar{u}_n(x + y_n)$. Notemos que não podemos descartar que $|y_n| \to \infty$. Daremos os passos que provam que $(\bar{u}_n)$ possui uma subsequência convergente. Com efeito, sendo $\|\bar{u}_n\|_\lambda = \|u_n\|_\lambda$, pelo Teorema 1.10 podemos assumir que

$$\bar{u}_n \rightharpoonup \bar{u} \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Procedendo como na demonstração do Teorema 3.8, temos que

$$\bar{u}_n \to \bar{u} \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N), \ 2 \leq p < 2^*.$$

Desde que $I_\lambda^\infty(u_n) = I_\lambda^\infty(\bar{u}_n)$ e $I_\lambda^{\infty\prime}(u_n)(\phi) = I_\lambda^{\infty\prime}(\bar{u}_n)(\phi_n)$, onde $\phi_n(x) = \phi(x - y_n)$, obtemos

$$\bar{u}_n \to \bar{u} \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

$\square$

3.2 Existência de Solução Positiva

Dedicaremos esta seção ao estudo da existência de solução para o problema (P_λ), isto é, à prova do Teorema 3.2. Como dissemos no final da introdução deste capítulo, usaremos o Teorema 1.44. Começaremos provando as condições geométricas deste teorema , especificamente, os itens (a) e (b).

Proposição 3.11 (Geometria do Passo da Montanha) *Assuma as hipóteses* (f_1)-(f_4) *e suponha* $0 < \lambda < |\Lambda|$. *Então:*

(a) *Existem* $\rho = \rho(\lambda) > 0$ *e* $\alpha = \alpha(\lambda) > 0$ *tais que* $I_\lambda(u) \geq 0$ *para* $\|u\|_\lambda \leq \rho$ *e* $I_\lambda(u) \geq \alpha$ *quando* $\|u\|_\lambda = \rho$*;*

(b) *Existe* $e = e(\lambda) \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $\|e\|_\lambda > \rho$ *e* $I_\lambda(e) \leq 0$.

Demonstração: Para provarmos (a), utilizaremos (3.26) para obtermos

$$F(x,s) \leq \frac{1}{2}\varepsilon s^2 + \frac{1}{2}C(\varepsilon, 2^*)s^{2^*},$$

e considerando a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N),\ 2 \leq p \leq 2^*$, temos que

$$\begin{aligned}\int F(x,u)dx &\leq \frac{1}{2}\varepsilon \int u^2 dx + \frac{1}{2}C(\varepsilon,2^*)\int u^{2^*}dx \\ &\leq C\varepsilon\|u\|_\lambda^2 + \widetilde{C}(\varepsilon,2^*)\|u\|_\lambda^{2^*}.\end{aligned}$$

Fazendo $C\varepsilon = \frac{1}{4}$, concluímos que

$$\begin{aligned}I_\lambda(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 - \int F(x,u_n)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{4}\|u\|_\lambda^2 - \widetilde{C}(\varepsilon,2^*)\|u\|_\lambda^{2^*}. \\ &\geq (\frac{1}{4} - \widetilde{C}(\varepsilon,2^*)\|u\|_\lambda^{(2^*-2)})\|u\|_\lambda^2,\end{aligned}$$

para toda $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Assim, tomando por exemplo $\rho(\lambda) = (\frac{1}{8\widetilde{C}(\varepsilon,2^*)})^{1/(2^*-2)}$ e $\alpha(\lambda) = \frac{1}{4}(\frac{1}{8\widetilde{C}(\varepsilon,2^*)})^{2/(2^*-2)}$, obtemos (a).

Para Provarmos (b), fixemos $u \neq 0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e consideremos a função $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$p(t) = I_\lambda(tu) = \frac{1}{2}t^2\|u\|_\lambda^2 - \int F(x,tu)dx. \tag{3.76}$$

Temos que

$$p'(t) = I'_\lambda(tu)(u) = t(\|u\|_\lambda^2 - \int f(x,tu)u^2dx). \tag{3.77}$$

Com o mesmo argumento da parte (a) obtemos

$$p(t) \geq [\frac{1}{4} - C(\varepsilon, 2^*)(t\|u\|_\lambda)^{2^*-2}]t^2\|u\|_\lambda^2$$

e

$$p'(t) \geq t\|u\|_\lambda - \frac{1}{4}t^2\|u\|_\lambda^2 - C(\varepsilon, 2^*)t^{2^*}\|u\|_\lambda^{2^*}.$$

Portanto,

$$p(t) > 0 \quad \text{e} \quad p'(t) > 0, \tag{3.78}$$

para $t > 0$ suficientemente pequeno. Faremos agora duas afirmações que serão úteis para o resto da demonstração.

Afirmação 1: $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \int F(x, tu)dx = \frac{1}{2} \int g(x)(u^+)^2 dx;$

Afirmação 2: $\lim_{t\to\infty} \int f(x, tu)u^2 dx = \int g(x)(u^+)^2 dx.$

Prova da Afirmação 1: Fazendo a mudança de variável $s = \tau tu$, temos

$$\begin{aligned} \int F(x, tu)dx &= \int \Big[\int_0^{tu} f(x, s)sds\Big]dx \\ &= \int \Big[t^2u^2 \int_0^1 f(x, \tau tu)\tau d\tau\Big]dx. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Dado $\varepsilon > 0$, por (f_2) existe t_0 tal que $|f(x, t\tau u(x)) - g(x)| < \varepsilon$, para todo $t > t_0$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Então,

$$\Big|\int_0^1 (f(x, \tau tu) - g(x))\tau d\tau\Big| < \varepsilon,$$

para todo $t > t_0$. Logo,

$$u^2(x) \int_0^1 f(x, \tau tu(x))\tau d\tau \to (u^+(x))^2 \int_0^1 g(x)\tau d\tau = \frac{1}{2}(u^+(x))^2 g(x) \ q.t.p. \ em \ \mathbb{R}^N$$

(lembremos que $f(x, s) = 0$, para $s \leq 0$). Desde que $f(x, s) \leq g(x)$,

$$u^2 \int_0^1 f(x, \tau tu)\tau d\tau \leq u^2 \int_0^1 g(x)\tau d\tau \leq \frac{1}{2}u^2 g(x) \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

Assim, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obtermos que:

$$\lim_{t\to\infty} \int u^2(x) \int_0^1 f(x, \tau tu(x))\tau d\tau dx = \int \frac{1}{2}g(x)(u^+(x))^2 dx.$$

Isto, juntamente com (3.79), implica que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \int F(x,tu)dx = \frac{1}{2} \int g(x)(u^+)^2 dx,$$

como queríamos. A prova da Afirmação 2 é análoga.

Como consequência das Afirmações 1 e 2, temos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t^2} = \frac{1}{2}(\|u\|_\lambda^2 - \int g(x)(u^+)^2 dx), \tag{3.80}$$

e

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p'(t)}{t} = \|u\|_\lambda^2 - \int g(x)(u^+)^2 dx. \tag{3.81}$$

Agora consideremos duas situações:

(A) $\|u\|_\lambda^2 - \int g(x)(u^+)^2 dx \geq 0$: Neste caso, segue de (f_2) que

$$\begin{aligned} p'(t) &= t(\|u\|_\lambda^2 - \int f(x,u)u^2 dx) \\ &\geq t(\|u\|_\lambda^2 - \int g(x)(u^+)^2 dx) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

para todo $t > 0$. Assim, p é não-decrescente. Desde que $p(t) > 0$, para $t > 0$ pequeno, temos $p(t) > 0$ para todo $t > 0$.

(B) $\|u\|_\lambda^2 - \int g(x)(u^+)^2 dx < 0$: Como já sabemos que $p'(t) > 0$ para t pequeno, se (B) ocorre, então p' muda de sinal. Logo, existe $t_1 > 0$ tal que $p'(t_1) = 0$. Definamos

$$E_1 = \{t > 0; t \leq t_1 \text{ } e \text{ } p'(t) = 0\} \quad \text{e} \quad t_0 = \inf E_1.$$

Sendo $p'(t)/t$ não-crescente em t, temos que, se $t < t_0$ então

$$\frac{p'(t)}{t} \geq \frac{p'(t_0)}{t_0} \geq \frac{p'(t_1)}{t_1} = 0.$$

Logo, $p'(t) \geq 0$, $\forall\ t < t_0$. Além disso, se $p'(t) = 0$, tem-se que $t \in E_1$ e $t < t_0$, contradição. Logo, $p'(t) > 0$, $\forall\ t < t_0$. De modo similar, definindo $t_2 = \sup E_2$, onde $E_2 = \{t > 0; t \geq t_1 \text{ } e \text{ } p'(t) = 0\}$, obtemos $p'(t) < 0$, $\forall\ t > t_2$ (notemos que $\sup E_2 < \infty$, pois $p'(t)$ é não-crescente). Portanto, temos que existem $t_0 = t_0(u) \leq t_2 = t_2(u)$, tais que

$$\begin{aligned} p'(t) &> 0, \quad \text{se } t < t_0; \\ p'(t) &= 0, \quad \text{se } t_0 \leq t \leq t_2; \\ p'(t) &< 0, \quad \text{se } t > t_2, \end{aligned} \tag{3.82}$$

e consequentemente,

$$\max_{0<t<\infty} I_\lambda(tu) = I_\lambda(\bar{t}u), \quad \forall\, \bar{t} \in [t_0, t_2] \tag{3.83}$$

e

$$\lim_{t\to\infty} I_\lambda(tu) = -\infty, \tag{3.84}$$

caso a situação (B) ocorra.

Para concluirmos a demonstração da proposição vamos consideraremos dois casos:

Caso 1: $\Lambda < -l_\infty$.

Nesta caso, estamos no Caso 1 da prova do Lema 3.6. Logo, Λ é o menor autovalor de S. Sendo $\psi > 0$ a autofunção correspondente a Λ, temos

$$\int |\nabla\psi|^2 dx - \int g(x)\psi^2 dx = \Lambda \int \psi^2 dx,$$

donde

$$\int (|\nabla\psi|^2 + \lambda\psi^2) dx - \int g(x)\psi^2 dx = (\lambda + \Lambda) \int \psi^2 dx < 0$$

pois $\lambda + \Lambda < 0$, já que $\lambda < |\Lambda|$. Assim, estamos na situação (B) e, por (3.84), temos

$$\lim_{t\to\infty} I_\lambda(tu) = -\infty.$$

Portanto, podemos tomar $e = t\psi$, para t suficientemente grande, e obtemos $I_\lambda(e) \leq 0$, como desejávamos.

Caso 2: $\Lambda = -l_\infty$.

Neste caso temos $\lambda < |\Lambda| = l_\infty$. Consideremos $\phi \geq 0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash B(0,1))$ e definamos

$$\phi_\sigma(x) = \sigma^{\frac{N}{2}}\phi(\sigma x).$$

Então fazendo uma mudança de variável, obtemos [3]

$$\begin{aligned} \int g(x)\phi_\sigma^2(x)dx &= \int \sigma^N g(x)\phi^2(\sigma x)dx \\ &= \int_{B(0,1)^C} g(x/\sigma)\phi^2(x)dx. \end{aligned}$$

[3]Notemos que as integrais fazem sentido em $\mathbb{R}^N$ através da extensão zero fora de $B(0,1)$.

Desde que $g \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ e $\lim\limits_{|x|\to\infty} g(x) = l_{\infty}$, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\lim_{\sigma\to 0} \int g(x)\phi_{\sigma}^2(x)dx = \lim_{\sigma\to 0} \int_{B(0,1)^C} g(x/\sigma)\phi^2(x)dx = \int l_{\infty}\phi^2(x)dx. \tag{3.85}$$

Agora, sendo

$$\int |\nabla\phi_{\sigma}|^2 dx = \sigma^2 \int |\nabla\phi|^2 dx \quad \text{ e } \quad \int \phi_{\sigma}^2 dx = \int \phi^2 dx,$$

tem-se $\int |\nabla\phi_{\sigma}|^2 dx \to 0$ quando $\sigma \to 0$. Assim,

$$\int (|\nabla\phi_{\sigma}|^2 + \lambda\phi_{\sigma}^2)dx - \int g(x)\phi_{\sigma}^2 dx \;=\; \int \lambda\phi_{\sigma}^2 dx - \int g(x)\phi_{\sigma}^2 dx$$

e usando (3.85) obtemos

$$\lim_{\sigma\to 0}\Big(\|\phi_{\sigma}\|_{\lambda}^2 - \int g(x)\phi_{\sigma}^2(x)dx\Big) = (\lambda - l_{\infty})\int \phi^2 dx < 0.$$

Logo, tomando σ_0 suficientemente pequeno, temos

$$\|\phi_{\sigma_0}\|_{\lambda}^2 - \int g(x)\phi_{\sigma_0}^2(x)dx < 0,$$

e estamos novamente na situação (B). Então, em vista de (3.84)

$$\lim_{t\to\infty} I_{\lambda}(t\phi_{\sigma_0}) = -\infty,$$

e podemos assim escolher $e = t\phi_{\sigma_0}$, para t grande o bastante, tal que

$$I_{\lambda}(e) \le 0.$$

Portanto, a proposição está provada.

$\square$

Observação 3.12 *Em particular, se $f(x,s) = h(s)$ (f independe de x), então $\Lambda = -l_{\infty}$. De fato, neste caso, temos que $g(x) = 1$ e $S_0 = -\Delta - 1$ (Notemos que S_0 é essencialmente auto-adjunto). Assim, estamos diante do problema de autovalor*

$$-\Delta u = (1+\mu)u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

que não possui solução, pelo Corolário 1.35. Portanto,

$$\sigma(S) = \sigma_{ess}(S) = [-l_{\infty}, \infty),$$

e desde que $\Lambda = \inf \sigma(S)$ temos $\Lambda = -l_{\infty}$.

Enunciaremos agora três resultados que são consequências da prova da Proposição 3.11, os quais serão bastante úteis.

Corolário 3.13 *Assuma as condições* (f_1)-(f_4) *e suponha* $0 < \lambda < |\Lambda|$. *Então:*

(a) *Existem* $\rho = \rho(\lambda) > 0$ *e* $\alpha = \alpha(\lambda) > 0$ *tais que* $I_\lambda^\infty(u) \geq 0$ *se* $\|u\|_\lambda \leq \rho$ *e* $I_\lambda^\infty(u) \geq \alpha$ *para* $\|u\|_\lambda = \rho$;

(b) *Existe* $e = e(\lambda) \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $\|e\|_\lambda > \rho$ *e* $I_\lambda^\infty(e) \leq 0$.

Demonstração: Repetir a prova da Proposição 3.11, trocando g e I_λ por l_∞ e I_λ^∞.

$\square$

Proposição 3.14 *Assuma as condições* (f_1)-(f_4) *e suponha* $0 < \lambda < |\Lambda|$. *Sejam*

$$M_\lambda := \left\{ u \neq 0 \in H^1(\mathbb{R}^N); I'_\lambda(u)(u) = \|u\|_\lambda^2 - \int f(x,u)u^2 dx = 0 \right\}$$

e $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

(a) *Se* $\|w\|_\lambda^2 - \int g(x)(w^+)^2 dx \geq 0$, *então* $I_\lambda(tw) > 0$, *para todo* $t > 0$, *e* $\mathbb{R}^+ w \cap M_\lambda = \varnothing$;

(b) *Se* $\|w\|_\lambda^2 - \int g(x)(w^+)^2 dx < 0$, *então existem* $0 < t_0 = t_0(w) \leq t_2 = t_2(w)$ *tais que* $\bar{t}w \in M_\lambda$, *para todo* $\bar{t} \in [t_0, t_2]$,

$$\max_{t \in (0,\infty)} I_\lambda(tw) = I_\lambda(\bar{t}w), \ \forall \ t \in [t_0, t_2],$$

e

$$\lim_{t \to \infty} I_\lambda(tw) = -\infty.$$

Demonstração: A argumentação utilizada aqui é a mesma da prova da Proposição 3.11.

$\square$

No caso em que $g(x) = l_\infty$, podemos escrever a Proprosição 3.14 na forma:

Corolário 3.15 *Assuma as condições* (f_1)-(f_4) *e suponha* $0 < \lambda < |\Lambda|$. *Seja* $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

(a) *Se* $\|w\|_\lambda^2 - \int l_\infty (w^+)^2 dx \geq 0$, *então* $I_\lambda^\infty(tw) > 0$, *para todo* $t > 0$, *e* $\mathbb{R}^+ w \cap M_\lambda^\infty = \varnothing$;

(b) *Se* $\|w\|_\lambda^2 - \int l_\infty (w^+)^2 dx < 0$, *então existem* $0 < t_0 = t_0(w) \leq t_2 = t_2(w)$ *tais que* $\bar{t}w \in M_\lambda^\infty$, *para todo* $\bar{t} \in [t_0, t_2]$,

$$\max_{t \in (0,\infty)} I_\lambda^\infty(tw) = I_\lambda^\infty(\bar{t}w), \ \forall\ t \in [t_0, t_2],$$

e

$$\lim_{t \to \infty} I_\lambda^\infty(tw) = -\infty.$$

Estamos agora prontos para mostrar a existência de solução positiva para o problema (P_λ). Antes, porém, consideraremos o seguinte problema auxiliar:

$$(P_\infty) \qquad\qquad -\Delta u + \lambda u = h(u)u, \quad u > 0 \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Provaremos a existência de uma solução para o problema (P_∞), aplicando o Teorema 1.44 ao funcional correspondente I_λ^∞ definido em (3.30).

Proposição 3.16 *O problema* (P_∞) *possui uma solução não-trivial.*

Demonstração: Pelo Corolário 3.13 sabemos que as condições (a) e (b) do Teorema 1.44 são satisfeitas. Além disso, pelos Teoremas 3.8 e 3.10 temos que I_λ^∞ satisfaz a condição de compacidade de Cerami para todo nível $0 < c \leq m_\lambda^\infty$. Consideremos agora o nível

$$0 < c_\lambda^\infty := \inf_{\gamma \in \Gamma_\infty} \sup_{0 \leq t \leq 1} I_\lambda^\infty(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma_\infty = \{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)); \gamma(0) = 0 \ e \ I_\lambda^\infty(\gamma(1)) < 0\}$.

Precisamos mostrar que $c_\lambda^\infty \leq m_\lambda^\infty$, de modo que c_λ^∞ é um valor crítico, pelo Teorema 1.44. Notemos que, neste caso, temos necessariamente $c_\lambda^\infty = m_\lambda^\infty$, pois qualquer ponto crítico de I_λ^∞ pentence a M_λ^∞.

Com efeito, se $M_\lambda^\infty = \varnothing$, então $c_\lambda^\infty \leq m_\lambda^\infty := \infty$. Suponha que $M_\lambda^\infty = \varnothing$. Dado $u \in M_\lambda^\infty$, pelo Corolário 3.15 temos que

$$\|u\|_\lambda^2 - \int l_\infty (u^+)^2 dx < 0,$$

$I_\lambda^\infty(tu) \leq 0$ para $t \geq t_2 = t_2(u)$ e $\max_{t \in (0,\infty)} I_\lambda^\infty(tu) = I_\lambda^\infty(t_2 u)$. Portanto, se considerarmos $\tilde{\gamma} : [0,1] \to H^1(\mathbb{R}^N)$, $\tilde{\gamma}(s) = st_2 u$, então $\tilde{\gamma} \in \Gamma_\infty$ e

$$c_\lambda^\infty \leq \sup_{0 \leq s \leq 1} I_\lambda^\infty(\tilde{\gamma}(s)) \leq \sup_{0 < t < \infty} I_\lambda^\infty(tu) = I_\lambda^\infty(t_2 u).$$

Desde que $t_2 u \in M_\lambda^\infty$, por (b) do Corolário 3.15, e u foi arbitrário, concluímos que $c_\lambda^\infty \leq \inf\limits_{u \in M_\lambda^\infty} I_\lambda^\infty(u) = m_\lambda^\infty$. Portanto, aplicando o Teorema 1.44, mostramos a existência de uma solução u_0 de (P_∞) no nível $c_\lambda^\infty = m_\lambda^\infty$ de modo que

$$I_\lambda^\infty(u_0) = c_\lambda^\infty = m_\lambda^\infty. \tag{3.86}$$

□

Finalmente, mostraremos que (P_λ) tem uma solução positiva para $0 < \lambda < |\Lambda|$.

Demonstração do Teorema 3.2: Pelo Teorema 3.8 e Proposição 3.11, temos que I_λ satisfaz as condições do Teorema 1.44, com a condição de compacidade de Cerami satisfeita para todo $c \in (0, m_\lambda^\infty)$. Assim, fazendo

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)); \gamma(0) = 0 \ e \ I_\lambda(\gamma(1)) < 0\},$$

temos que

$$c_\lambda := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{0 \leq t \leq 1} I_\lambda(\gamma(t)) > 0$$

é um valor crítico de I_λ se provarmos que $c_\lambda < m_\lambda^\infty$. Para tanto, usaremos a hipótese (f_5), a qual não havíamos usado até o momento.

Com efeito, por (f_5) temos que

$$f(x,s) \geq h(s), \ \text{ para todo } \ x \in \mathbb{R}^N, \ \ s \geq 0.$$

Logo, $I_\lambda(u) \leq I_\lambda^\infty(u)$, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Seja u_0 uma solução do problema (P_∞), assegurada pela Proposição 3.16. Desde que $u_0 \in M_\lambda^\infty$, temos que $I_\lambda(tu_0) \leq I_\lambda^\infty(tu_0) \leq 0$, para todo $t \geq t_2 = t_2(u_0)$. Daí, definindo $\bar{\gamma} : [0,1] \to H^1(\mathbb{R}^N)$ por $\bar{\gamma}(s) = st_2 u_0$, pelo Corolário 3.15, tem-se $\bar{\gamma} \in \Gamma$, já que $t_2 u_0 \in M_\lambda^\infty$. Por outro lado, como $u_0 \in M_\lambda^\infty$, novamente usando o Corolário 3.15, temos necessariamente que

$$\|u_0\|_\lambda^2 - \int l_\infty (u_0^+)^2 dx < 0.$$

Pelas hipóteses (f_4) e (f_5), temos

$$g(x) = \lim_{s \to \infty} f(x,s) \geq \lim_{s \to \infty} h(s) = l_\infty.$$

Assim, segue que

$$\|u_0\|_\lambda^2 - \int g(x)(u_0^+)^2 dx \leq \|u_0\|_\lambda^2 - \int l_\infty (u_0^+)^2 dx < 0,$$

e utilizando a Proposição 3.14, concluímos que existe $s_0 > 0$ tal que

$$\max_{t \in (0,\infty)} I_\lambda(tu_0) = I_\lambda(s_0 u_0).$$

Logo, temos

$$
\begin{aligned}
c_\lambda &\leq \sup_{0\leq s\leq 1} I_\lambda(\bar{\gamma}(s)) \leq \sup_{0<t<\infty} I_\lambda(tu_0) = I_\lambda(s_0u_0) \\
&< I_\lambda^\infty(s_0u_0) \leq I_\lambda^\infty(u_0) = m_\lambda^\infty,
\end{aligned}
$$

onde a desigualdade estrita segue da hipótese (f_5), a última desigualdade do fato que $u_0 \in M_\lambda^\infty$ (veja Corolário 3.15) e a igualdade de (3.86). Obtemos assim que $c_\lambda < m_\lambda^\infty$. Portanto, pelo Teorema 1.44 temos a existência de uma solução que, como já vimos, é positiva.

$\square$

Capítulo 4

Uma Equação de Schrödinger com Potencial Periódico

Introdução

Neste capítulo estudaremos uma equação semilinear de Schrödinger com potencial periódico e contínuo. Na busca por solução para tal equação, o método utilizado é de natureza variacional, aplicado a uma sequência de problemas aproximados. Especificamente, estudaremos a equação

$$(P) \qquad -\Delta u + V(x)u = f(x,u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

onde o potencial V e a não-linearidade $f(x,s)$ satisfazem as seguintes hipóteses:

(f_1) $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são contínuas e 1-periódicas em cada variável $x_i, i = 1, \ldots, N$;

(f_2) $|f(x,s)| \leq C(1 + |s|^{p-1})$, onde $C > 0$ e $2 < p < 2^*$;

(f_3) $f(x,s) = o(|s|)$, quando $s \to 0$, uniformemente em x;

(f_4) Existe $\gamma > 2$ tal que $0 < \gamma F(x,s) \leq sf(x,s)$, para todo $s \neq 0$, onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$;

(f_5) 0 está em um gap espectral de $S_0 = -\Delta + V$.

Um exemplo de uma função que satisfaz as quatro hipóteses iniciais é

$$f(x,s) = (3/2 + \text{sen}(2\pi x_1) \ldots \text{sen}(2\pi x_N))|s|^{p-1},$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_N)$.

Por uma ***solução clássica*** do problema (P), entende-se uma função $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ que satisfaz a equação em cada ponto $x \in \mathbb{R}^N$. Por uma ***solução fraca*** de (P), entende-se uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)vdx, \quad \forall\, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{4.1}$$

Assumida as hipóteses (f_1) a (f_5), nosso objetivo é provar o seguinte teorema de existência para o problema (P):

Teorema 4.1 *Sob as hipóteses (f_1) a (f_5), o problema (P) possui uma solução fraca não-trivial.*

Usando a periodicidade de $f(x,.)$ e $V(x)$, obteremos uma solução de (P) como limite de uma sequência de soluções periódicas em cubos do $\mathbb{R}^N$. Em cada cubo do $\mathbb{R}^N$, iremos obter uma solução via Teorema de Linking.

Os resultados deste capítulo são baseados no trabalho de Pankov-Pflüger [15].

4.1 Aproximação por Funções Periódicas

Associado ao problema (P), estudaremos o problema aproximado em cubos Q_k de $\mathbb{R}^N$ com lados de comprimento $k \in \mathbb{N}$:

$$(P_k) \qquad -\Delta u + V(x)u = f(x,u) \text{ em } Q_k, \quad u \in E_k = H^1_{per}(Q_k),$$

onde $H^1_{per}(Q_k)$ denota o subespaço de Sobolev de $H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, cujas funções são k-periódicas em $x_i, i = 1, \ldots, N$.

Por uma ***solução clássica*** do problema (P_k), entende-se uma função $u \in C^2(Q_k) \cap C^0(\overline{Q_k})$ que satisfaz a equação em cada ponto $x \in Q_k$. Por uma ***solução fraca*** de (P_k), entende-se uma função $u \in E_k$ tal que

$$\int_{Q_k} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx = \int_{Q_k} f(x,u)vdx, \quad \forall\, v \in E_k. \tag{4.2}$$

Encontrar solução fraca para o problema (P_k), é equivalente a encontrar um ponto crítico para o funcional energia $J_k : E_k \to \mathbb{R}$, definido por

$$J_k(u) = \frac{1}{2}\int_{Q_k} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \int_{Q_k} F(x,u)dx.$$

De fato, pelo Exemplo 1.1 e Lema 1.41, temos que $J_k \in C^1(E_k, \mathbb{R})$ e

$$J_k'(u)(v) = \int_{Q_k} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx - \int_{Q_k} f(x,u)vdx, \quad \forall v \in E_k.$$

Portanto, u é solução fraca de (P_k) se, e somente se, u é um ponto crítico de J_k.

Ao longo de toda esta seção admitiremos que os problemas (P_k) possuem solução não-trivial, embora a existência de solução para estes problemas aproximados seja o assunto da Seção 3. O motivo da escolha desta abordagem, é facilitar a exposição e compreensão do conteúdo.

Pelo Teorema 2.41, temos que o espectro do operador $-\Delta + V : C^\infty(T_k^N) \subset L^2(T_k^N) \to L^2(T_k^N)$, onde T_k^N é o N-toro que estamos identificando com Q_k, é discreto com autovalores $\lambda_{k,1} \leq \lambda_{k,2} \leq \cdots \to \infty$, e apenas um número finito desses autovalores são negativos. Logo, existe um número finito

$$j(k) = \min\{i; \lambda_{k,i} > 0\}.$$

Assim, se $(-\alpha, \beta), \alpha, \beta > 0$, denota o gap espectral em torno de 0, temos que $\lambda_{k,i} \notin (-\alpha, \beta)$, para cada $k, i \in \mathbb{N}$. Denotemos por $\phi_{k,i}$ as autofunções correspondentes.

Consideremos agora uma decomposição ortogonal de E_k da seguinte forma:

$$E_k = Y_k \oplus Z_k,$$

onde $Y_k = [\phi_{k,1}, \ldots, \phi_{k,j(k)-1}]$[1] e $Z_k = Y_k^\perp$. A partir desta decomposição definamos a forma bilinear simétrica $(\cdot,\cdot)_k : E_k \times E_k \to \mathbb{R}$, dada por

$$(u,v)_k = \begin{cases} -\int_{Q_k} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx, & \text{se} \quad u, v \in Y_k \\ \int_{Q_k} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx, & \text{se} \quad u, v \in Z_k \\ 0 & , \text{ se} \quad u \in Y_k \text{ e } v \in Z_k. \end{cases}$$

A primeira observação que fazemos sobre $(\cdot,\cdot)_k$, é que esta define um produto interno em E_k. De fato, resta-nos apenas mostrar que $(\cdot,\cdot)_k$ é positiva definida. Para tanto, observemos que é suficiente provar apenas para as autofunções $\phi_{k,i}$. Assim, se $\phi_{k,i}$ é autofunção de $-\Delta + V$, associada ao autovalor $\lambda_{k,i}$, temos $-\Delta\phi_{k,i} + V(x)\phi_{k,i} = \lambda_{k,i}\phi_{k,i}$ que implica

$$\int_{Q_k} (|\nabla \phi_{k,i}|^2 + V(x)\phi_{k,i}^2)dx = \lambda_{k,i} \int_{Q_k} \phi_{k,i}^2 dx. \tag{4.3}$$

Logo,

$$\int_{Q_k} (|\nabla \phi_{k,i}|^2 + V(x)\phi_{k,i}^2)dx = \begin{cases} < 0, & \text{se} \quad \phi_{k,i} \in Y_k \\ > 0, & \text{se} \quad \phi_{k,i} \in Z_k. \end{cases}$$

Podemos então concluir que

$$(u,u)_k \geq 0, \quad \forall\ u \in E_k.$$

Agora, suponhamos que $(u,u)_k = 0$. Para mostrarmos que $u = 0$, é suficiente usarmos o seguinte lema:

[1][ ] denota o espaço gerado.

Lema 4.2 *Existe uma constante $C_1 > 0$, independente de k, tal que*

$$(u,u)_k \geq C_1\|u\|^2_{H^1(Q_k)}, \tag{4.4}$$

para todo $u \in H^1(Q_k)$.

De fato, assumindo o lema, se $(u,u)_k = 0$, então

$$C_1\|u\|^2_{H^1(Q_k)} \leq (u,u)_k = 0,$$

e portanto, $u = 0$.

Demonstração do Lema 4.2: Sejam $z \in Z_k,\ \varepsilon > 0$ e $(-\alpha,\beta)$ o gap espectral de $-\Delta + V$ em torno do 0, com $\alpha,\beta > 0$. Sendo V contínua e 1-periódica em cada $x_i,\ i = 1,\ldots,N$, podemos tomar $C_0 = \sup\limits_{Q_k}|V(x)|$ $(= \sup\limits_{\mathbb{R}^N}|V(x)|)$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_{Q_k}(|\nabla z|^2 + V(x)z^2)dx &= \varepsilon\int_{Q_k}(|\nabla z|^2 + V(x)z^2)dx \\
&+ (1-\varepsilon)\int_{Q_k}(|\nabla z|^2 + V(x)z^2)dx \\
&\geq \varepsilon\int_{Q_k}|\nabla z|^2dx - \varepsilon C_0\int_{Q_k}z^2dx \\
&+ (1-\varepsilon)\int_{Q_k}(|\nabla z|^2 + V(x)z^2)dx. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Desde que $z = \sum\limits_{i=j(k)}^{\infty}\alpha_i\phi_{k,i}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{Q_k}(|\nabla z|^2 + V(x)z^2)dx &= \int_{Q_k}\Big(\big|\nabla\sum_{i=j(k)}^{\infty}\alpha_i\phi_{k,i}\big|^2 + V(x)\big(\sum_{i=j(k)}^{\infty}\alpha_i\phi_{k,i}\big)^2\Big)dx \\
&= \int_{Q_k}\Big(\big|\sum_{i=j(k)}^{\infty}\alpha_i\nabla\phi_{k,i}\big|^2 + V(x)\big(\sum_{i=j(k)}^{\infty}\alpha_i\phi_{k,i}\big)^2\Big)dx \\
&\geq \int_{Q_k}\Big(\sum_{i=j(k)}^{\infty}\alpha_i^2|\nabla\phi_{k,i}|^2 + V(x)\sum_{i=j(k)}^{\infty}\alpha_i^2\phi_{k,i}^2\Big)dx \\
&= \sum_{i=j(k)}^{\infty}\alpha_i^2\int_{Q_k}\big(|\nabla\phi_{k,i}|^2 + V(x)\phi_{k,i}^2\big)dx. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Notemos que usamos na desigualdade acima que $(a+b)^2 \geq a^2 + b^2, \forall\ a,b \geq 0$.

Assim, usando (4.3) em (4.6), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{Q_k}(|\nabla z|^2+V(x)z^2)dx &\geq \sum_{i=j(k)}^{\infty}\alpha_i^2\lambda_{k,i}\int_{Q_k}\phi_{k,i}^2dx\\ &\geq \beta\int_{Q_k}(\sum_{i=j(k)}^{\infty}\alpha_i^2\phi_{k,i}^2)dx\\ &= \beta\int_{Q_k}z^2dx, \qquad (4.7)\end{aligned}$$

pois $\lambda_{k,i}>\beta,\forall\ i\geq j(k)$, e $\phi_{k,i}$ são ortonormais. Substituindo então (4.7) em (4.5), temos

$$\begin{aligned}\int_{Q_k}(|\nabla z|^2+V(x)z^2)dx &\geq \varepsilon\int_{Q_k}|\nabla z|^2dx-\varepsilon C_0\int_{Q_k}z^2dx+(1-\varepsilon)\beta\int_{Q_k}z^2dx\\ &= \varepsilon\int_{Q_k}|\nabla z|^2dx+((1-\varepsilon)\beta-\varepsilon C_0)\int_{Q_k}z^2dx\\ &\geq C_2\int_{Q_k}(|\nabla z|^2+z^2)dx,\end{aligned}$$

onde $C_2=\min\{\varepsilon,((1-\varepsilon)\beta-\varepsilon C_0)\}$. Observemos que C_2 independe de k. Escolhendo, $\varepsilon>0$ tal que $(1-\varepsilon)\beta-\varepsilon C_0>0$, tem-se

$$(z,z)_k=\int_{Q_k}(|\nabla z|^2+V(x)z^2)dx\geq C_2\|z\|^2_{H^1(Q_k)}. \qquad (4.8)$$

Fazendo a mesma argumentação para $y\in Y_k$, obtemos

$$\begin{aligned}(y,y)_k=-\int_{Q_k}(|\nabla y|^2+V(x)y^2)dx &\geq \varepsilon\int_{Q_k}|\nabla y|^2-\varepsilon C_0\int_{Q_k}y^2dx+(1+\varepsilon)\alpha\int_{Q_k}y^2dx\\ &\geq C_3\|y\|^2_{H^1(Q_k)}, \qquad (4.9)\end{aligned}$$

onde C_3 depende de C_0,α e ε. Portanto, considerando $u=y+z$, desde que $(y,z)_k=0$, temos por (4.8) e (4.9) que

$$\begin{aligned}(u,u)_k &= (y,y)_k+(z,z)_k\\ &\geq C_3\|y\|^2_{H^1(Q_k)}+C_2\|z\|^2_{H^1(Q_k)}\\ &\geq C_1\|y+z\|^2_{H^1(Q_k)},\end{aligned}$$

onde $C_1=\min\{C_2,C_3\}$, que independe de k, e isto implica que

$$(u,u)_k\geq C_1\|u\|^2_{H^1(Q_k)},\ \ \forall\, u\in H^1(Q_k),$$

como desejado.

□

Como consequência direta do Lema 4.2, temos uma proposição que talvez seja a essência de tudo que faremos.

Proposição 4.3 *A norma $\|\cdot\|_k$ induzida pelo produto interno $(\cdot,\cdot)_k$, é equivalente à norma padrão de $H^1(Q_k)$, com constante independente de k.*

Demonstração: Como no Lema 4.2, seja $C_0 = \max\limits_{Q_k} |V(x)|$. Então,

$$\|u\|_k^2 = \int_{Q_k} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx \leq \int_{Q_k} (|\nabla u|^2 + C_0 u^2)dx \leq \max\{1, C_0\}\|u\|_{H^1 Q_k}^2.$$

A outra desigualdade segue de (4.4).

□

Nosso objetivo agora é mostrar que qualquer sequência (u_k), onde cada u_k é um ponto crítico do funcional J_k, tem um limite não-trivial em $H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, o qual é uma solução de (P). Para isto, precisaremos de alguns resultados relativos ao comportamento de tais sequências. Faremos estes resultados, que são técnicos, em uma sequência de lemas. Antes, porém, fazemos a seguinte observação que é de extrema importância quando usamos as imersões de Sobolev.

Observação 4.4 *A constante de imersão de Sobolev não depende do volume do domínio; depende, dentre outros parâmetros, da forma do domínio. Esta propriedade encontra-se em Adams [1], Lema 5.12. Baseado nisto, podemos então garantir que as constantes das imersões contínuas $H^1(Q_k) \hookrightarrow L^p(Q_k), 1 \leq p \leq 2^*$, não dependem de k.*

Usando a decomposição $E_k = Y_k \oplus Z_k$ e definindo as projeções ortogonais $P_k : E_k \to Y_k, u = y + z \mapsto y$, e $T_k : E_k \to Z_k, u \mapsto z$ temos $u = P_k(u) + T_k(u)$. Desde que $(P_k(u), T_k(u))_k = 0$, podemos escrever o funcional J_k na forma

$$J_k(u) = \frac{1}{2}(\|T_k(u)\|_k^2 - \|P_k(u)\|_k^2) - \int_{Q_k} F(x,u)dx.$$

Além disso,

$$J_k'(u)(v) = (T_k(u), v)_k - (P_k(u), v)_k - \int_{Q_k} f(x,u)v dx.$$

Faremos agora uma sequência de lemas técnicos que serão necessários para os nossos objetivos.

Lema 4.5 *Sejam u_k um ponto crítico de J_k e $c_k = J_k(u_k)$ seu valor crítico. Então existe uma constante $C_k > 0$, dependendo apenas de c_k, tal que*

$$\|u_k\|_k \leq C_k.$$

Demonstração: Como $J_k(u_k) = c_k$ e $J_k'(u_k) = 0$, temos que

$$c_k = J_k(u_k) - \frac{1}{2}J_k'(u_k)(u_k) = \frac{1}{2}[(T_k u_k, T_k u_k)_k - (P_k u_k, P_k u_k)_k] - \int_{Q_k} F(x,u_k)dx$$

$$-\frac{1}{2}[(T_k u_k, u_k)_k - (P_k u_k, u_k)_k] - \frac{1}{2}\int_{Q_k} f(x,u_k)u_k dx.$$

Desde que $(T_k u_k, u_k)_k = (T_k u_k, T_k u_k)_k$ e $(P_k u_k, u_k)_k = (P_k u_k, P_k u_k)_k$, pois $u_k = P_k u_k + T_k u_u$ e $(T_k u_k, P_k u_k)_k = 0$, temos

$$c_k = \frac{1}{2}\int_{Q_k} f(x,u_k)u_k dx - \int_{Q_k} F(x,u_k)dx,$$

e usando (f_4) obtemos

$$c_k \geq (\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma})\int_{Q_k} f(x,u_k)u_k dx, \tag{4.10}$$

com $\gamma > 2$. Pelas hipóteses $(f_2), (f_3)$ e (f_4), tem-se as seguintes desigualdades:

$$|f(x,s)|^2 \leq C_1 s f(x,s), \quad \text{se } |s| \leq 1, \tag{4.11}$$

e

$$|f(x,s)|^{p'} \leq C_2|s|^{(p-1)(p'-1)}|f(x,s)| = C_2 s f(x,s), \quad \text{se } |s| > 1, \tag{4.12}$$

onde $p' = \frac{p}{p-1}$ é expoente conjugado de p. Com efeito, pela hipótese (f_3), dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|s| < \delta \Rightarrow |f(x,s)| \leq \varepsilon|s|, \tag{4.13}$$

e multiplicando por $|f(x,s)|$, tem-se

$$|f(x,s)|^2 \leq \varepsilon s f(x,s), \quad \text{se } |s| \leq \delta, \tag{4.14}$$

pois $sf(x,s) > 0$, por (f_4). Agora, para $\delta \leq |s| \leq 1$, temos que $\frac{1}{|s|} \leq \frac{1}{\delta}$, e pela hipótese (f_2),

$$|f(x,s)| \leq C(1 + |s|^{p-1}) = C(\frac{1}{|s|^{p-1}} + 1)|s|^{p-1} \leq C(\frac{1}{\delta^{p-1}} + 1)|s|^{p-1}. \tag{4.15}$$

Assim, denotando $C(\varepsilon,p)=C(\frac{1}{\delta^{p-1}}+1)$, obtemos

$$|f(x,s)|^2 \le C(\varepsilon,p)|s|^{p-1}|f(x,s)| \le C(\varepsilon,p)sf(x,s), \quad \text{se } \delta \le |s| \le 1. \tag{4.16}$$

Logo, (4.11) segue de (4.14) e (4.16), considerando $C_1=\max\{\varepsilon, C(\varepsilon,p)\}$. A desigualdade (4.12) é obtida da hipótese (f_2). De fato, temos

$$|f(x,s)|^{p'-1} = C^{p'-1}(1+|s|^{p-1})^{p'-1} \le 2^{p'-1}C^{p'-1}(1+|s|^{(p-1)(p'-1)}).$$

Sendo $|s|>1$ e $(p-1)(p'-1)=1$, segue que

$$|f(x,s)|^{p'} \le 2^{p'}C^{p'-1}sf(x,s),$$

provando assim a desigualdade. Denotando agora

$$B_k=\{x\in Q_k; |u_k(x)|\le 1\},$$

temos por (4.10), (4.11) e (4.12) que

$$\begin{aligned} c_k &\ge (\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma})\Big[\int_{B_k} f(x,u_k)u_k dx + \int_{Q_k\setminus B_k} f(x,u_k)u_k dx\Big] \\ &\ge (\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma})\Big[\frac{1}{C_1}\int_{B_k} |f(x,u_k)|^2 dx + \frac{1}{C_2}\int_{Q_k\setminus B_k} |f(x,u_k)|^{p'} dx\Big] \\ &\ge C_3\int_{B_k} |f(x,u_k)|^2 dx + C_3\int_{Q_k\setminus B_k} |f(x,u_k)|^{p'} dx, \end{aligned}$$

onde $C_3=(\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma})\min\{\frac{1}{C_1},\frac{1}{C_2}\}$. Em particular,

$$I_1 := \int_{B_k} |f(x,u_k)|^2 dx \le \frac{c_k}{C_3} \qquad \text{e} \qquad I_2 := \int_{Q_k\setminus B_k} |f(x,u_k)|^{p'} dx \le \frac{c_k}{C_3}.$$

Agora, fazendo $y_k=P_k u_k$ e $z_k=T_k u_k$, temos

$$0 = J_k'(u_k)(y_k) = (T_k(u_k),y_k)_k - (P_k(u_k),y_k)_k - \int_{Q_k} f(x,u_k)y_k dx.$$

Logo,

$$\|y_k\|_k^2 = -\int_{Q_k} f(x,u_k)y_k dx \le \Big|\int_{B_k} f(x,u_k)y_k dx + \int_{Q_k\setminus B_k} f(x,u_k)y_k dx\Big|,$$

e usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \|y_k\|_k^2 &\le \Big(\int_{B_k} |f(x,u_k)|^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\int_{B_k} |y_k|^2 dx\Big)^{1/2} \\ &\qquad + \Big(\int_{Q_k\setminus B_k} |f(x,u_k)|^{p'} dx\Big)^{1/p'}\Big(\int_{Q_k\setminus B_k} |y_k|^p dx\Big)^{1/p} \\ &= I_1^{1/2}\|y_k\|_{L^2(B_k)} + I_2^{1/p'}\|y_k\|_{L^p(Q_k\setminus B_k)}. \end{aligned}$$

Desde que a imersão $H^1(Q_k) \hookrightarrow L^r(Q_k),\ 2 \leq r \leq 2^*$, é contínua, segue que

$$\|y_k\|_k^2 \leq (C_4 I_1^{1/2} + C_5 I_2^{1/p'})\|y_k\|_k.$$

Logo, tomando $C_6 = \max\{C_4, C_5\}$ e usando as estimativa de I_i, tem-se

$$\|y_k\|_k \leq C_6\Big(\Big(\frac{c_k}{C_3}\Big)^{1/2} + \Big(\frac{c_k}{C_3}\Big)^{1/p'}\Big) = \frac{C_k}{2^{1/2}}. \tag{4.17}$$

Notemos que as constantes C_4 e C_5 não dependem de k, bem como C_6 (veja Observação 4.4).

Utilizando os mesmos argumentos feitos para y_k, agora com $z_k \in Z_k$, encontramos (4.17), a menos de constante. Assim, temos que

$$\|u_k\|_k^2 = \|y_k\|_k^2 + \|z_k\|_k^2 \leq \frac{C_k^2}{2} + \frac{C_k^2}{2},$$

provando o lema.

□

No que segue, faremos uso da seguinte estimativa para f:

$$|f(x,s)| \leq \varepsilon|s| + C(\varepsilon,p)|s|^{p-1}. \tag{4.18}$$

A prova é imediata de (f_2) e (f_3). Com efeito, por (f_2) temos

$$|f(x,s)| = C(1+|s|^{p-1}) \leq C(|s|^{p-1} + |s|^{p-1}) = 2C|s|^{p-1}, \quad \text{se} \quad |s| \geq 1.$$

Juntando esta estimativa a (4.13) e (4.15), obtemos (4.18) considerando

$$C(\varepsilon,p) = \max\{2C, C(\frac{1}{\delta^{p-1}} + 1)\}.$$

Lema 4.6 *Existem $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$, independentes de k, tais que*

$$\|u_k\|_k \geq \varepsilon_1 \quad e \quad J_k(u_k) \geq \varepsilon_2,$$

para qualquer ponto crítico não-trivial u_k de J_k.

Demonstração: Seja

$$q_k(u) = \int_{Q_k} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx,$$

a parte quadrática de J_k. Desde que $(-\alpha,\beta)$ é o gap espectral de $-\Delta+V$ em torno do 0, com $\alpha,\beta > 0$, afirmamos que existe uma constante $C_0 > 0$, independente de k, tal que

$$|q_k(u)| \geq C_0\|u\|^2_{L^2(Q_k)}. \tag{4.19}$$

De fato, pela Proposição 4.3 existe $C' > 0$, independente de k, tal que

$$|q_k(u)| = \|u\|_k^2 \geq C'\|u\|_{H^1(Q_k)}^2.$$

Isto, juntamente com a imersão $H^1(Q_k) \hookrightarrow L^2(Q_k)$, implicam (4.19).

Seja $C_1 = |\min_{Q_k} V(x)|$ (notemos que $V(x) \geq -C_1$). Então, por (4.19) temos

$$\begin{aligned}
|q_k(u)| &= \varepsilon\Big|\int_{Q_k}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx\Big| + (1-\varepsilon)\Big|\int_{Q_k}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx\Big| \\
&\geq \varepsilon\int_{Q_k}|\nabla u|^2dx - C_1\varepsilon\int_{Q_k}u^2dx + (1-\varepsilon)C_0\|u\|_{L^2(Q_k)}^2 \\
&= \varepsilon\int_{Q_k}|\nabla u|^2dx + [(1-\varepsilon)C_0 - C_1\varepsilon]\int_{Q_k}u^2dx \\
&\geq \min\{\varepsilon, (1-\varepsilon)C_0 - C_1\varepsilon\}\int_{Q_k}(|\nabla u|^2 + u^2)dx.
\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon > 0$ tal que $(1-\varepsilon)C_0 - C_1\varepsilon > 0$ e usando a equivalência das normas obtemos

$$|q_k(u)| \geq C_2\|u\|_k^2, \tag{4.20}$$

com $C_2 > 0$ independente de k.

Agora seja u_k um ponto crítico não-trivial de J_k. Desde que

$$0 = J_k'(u_k)(u_k) = \int_{Q_k}(|\nabla u_k|^2 + V(x)u_k^2)dx - \int_{Q_k}f(x,u_k)u_kdx, \tag{4.21}$$

segue da hipótese (f_4) que

$$q_k(u_k) = \int_{Q_k}f(x,u_k)u_kdx \geq 0.$$

Desde que $|f(x,s)s| \leq \varepsilon|s|^2 + C(\varepsilon,p)|s|^p$, pela imersão de Sobolev juntamente com (4.20), tem-se

$$\begin{aligned}
C_2\|u_k\|_k^2 &\leq q_k(u_k) \\
&= \int_{Q_k}f(x,u_k)u_kdx \\
&\leq \int_{Q_k}(\varepsilon|u_k|^2 + C(\varepsilon,p)|u_k|^p)dx \\
&\leq \varepsilon C_3\|u_k\|_k^2 + C(\varepsilon,p)C_4\|u_k\|_k^p \\
&= \|u_k\|_k^2(\varepsilon C_3 + C(\varepsilon,p)C_4\|u_k\|_k^{p-2}).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|u_k\|_k \;\geq\; \Big(\frac{C_2 - \varepsilon C_3}{C(\varepsilon,p)C_4}\Big)^{\frac{1}{p-2}} := \varepsilon_1,$$

escolhendo $\varepsilon < C_2/C_3$. Observemos que a estimativa independe de k.

Para estimar $J_k(u_k)$, notemos que por (f_4) e (4.21) que

$$\begin{aligned}
J_k(u_k) &= \frac{1}{2}\int_{Q_k}(|\nabla u_k|^2 + V(x)u_k^2)dx - \int_{Q_k}F(x,u_k)dx \\
&\geq \frac{1}{2}q_k(u_k) - \frac{1}{\gamma}\int_{Q_k}f(x,u_k)u_k dx \\
&= \Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}\Big)q_k(u_k) + \frac{1}{\gamma}\Big[q_k(u_k) - \int_{Q_k}f(x,u_k)u_k dx\Big] \\
&= \Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}\Big)q_k(u_k).
\end{aligned}$$

Usando agora (4.20) e observando que $q_k(u_k) \geq 0$, obtemos

$$J_k(u_k) \geq \Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}\Big)C_2\|u_k\|_k^2 \geq \Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}\Big)C_2\varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

Novamente a estimativa é não-depende de k.

□

Lema 4.7 *Seja Q_n um cubo de $\mathbb{R}^N$ com comprimento de lado $l_n \to \infty$ e centro na origem. Seja $K_r(\xi)$ um cubo fechado de $\mathbb{R}^N$ com comprimento de lado r e centro no ponto ξ. Considere uma sequência (u_n) em $H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ de funções l_n-periódicas tais que $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C,\ C > 0$. Assuma que existe $r > 0$ tal que*

$$\liminf_{n\to\infty}\Big(\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\int_{K_r(\xi)}u_n^2dx\Big) = 0.$$

Então, $\|u_n\|_{L^q(Q_n)} \to 0$, para $q \in (2, 2^*)$.

Demonstração: Sejam $r > 0$, Q'_n e Q''_n cubos centrados na origem e de lados medindo $l_n + r$ e $l_n + 2r$, respectivamente. Tomemos, para cada n, $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $0 \leq \varphi_n(x) \leq 1$ tal que

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in Q'_n \\ 0, & \text{se} \quad x \in (Q''_n)^c \end{cases}$$

e $|\nabla\varphi_n| \leq C_1,\ C_1 > 0$ não dependendo de n.

Definamos $v_n(x) = \varphi_n(x)u_n(x)$. Afirmamos que (v_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato, desde que $l_n \to \infty$ podemos assumir que $l_n > r$, ou ainda, $2l_n > l_n + 2r$.

Denotemos por Q_{2n} o cubo centrado na origem com lado medindo $2l_n$. Sendo $\|u_n\|_{H^1(Q_n)} \leq C$ e $|\nabla\varphi_n| \leq C_1$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v_n|^2 + v_n^2)dx &= \int_{Q_{2n}}(|\nabla(\varphi_n u_n)|^2 + (\varphi_n u_n)^2)dx \\
&= \int_{Q_n}(|\nabla u_n|^2 + u_n^2)dx \\
&+ \int_{Q_{2n}\setminus Q_n}(|(\nabla\varphi_n)u_n + \varphi_n\nabla u_n|^2 + \varphi_n^2 u_n^2)dx \\
&\leq C^2 + \int_{Q_{2n}\setminus Q_n}(2^2|\nabla\varphi_n|^2 u_n^2 + 2^2\varphi_n^2|\nabla u_n|^2 + \varphi_n^2 u_n^2)dx \\
&\leq C^2 + \int_{Q_{2n}\setminus Q_n}(4|\nabla u_n|^2 + (4C_1^2+1)u_n^2)dx \\
&\leq C^2 + C_2\int_{Q_{2n}\setminus Q_n}(|\nabla u_n|^2 + u_n^2)dx. \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

Desde que u_n é l_n-periódica, fazendo a mudança de $z = x - y$, onde $y = (l_n, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}^N$, temos que

$$
\int_{Q_{2n}\setminus Q_n}(|\nabla u_n|^2 + u_n^2)dx \leq \int_{Q_n}(|\nabla u_n|^2 + u_n^2)dx.
$$

Substituindo em (4.22), obtemos

$$
\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v_n|^2 + v_n^2)dx \leq C^2 + C_2C^2,
$$

mostrando assim que v_n é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Por outro lado, em vista de $v_n(x) = \varphi_n(x)u_n(x) \leq u_n(x)$, tem-se que

$$
\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\int_{K_r(\xi)} v_n^2 dx \leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\int_{K_r(\xi)} u_n^2 dx.
$$

Consequentemente,

$$
\liminf_{n\to\infty}\Big(\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\int_{K_r(\xi)} v_n^2 dx\Big) \leq \liminf_{n\to\infty}\Big(\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\int_{K_r(\xi)} u_n^2 dx\Big) = 0.
$$

Sendo (v_n) limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$
\liminf_{n\to\infty}\Big(\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\int_{K_r(\xi)} v_n^2 dx\Big) = 0,
$$

podemos aplicar o Lema 1.20, para concluir que

$$
\|v_n\|_{L^q(Q_n)} \to 0,
$$

para $q \in (2, 2^*)$. Desde que $v_n = u_n$ em Q_n, o lema está provado.

□

Lema 4.8 *Se uma sequência* (u_k) *em* E_k *é uniformemente limitada na norma de* $H^1(Q_k)$ *e* $J'_k(u_k) \to 0$*, então uma das duas seguintes alternativas é válida:*

(i) $\|u_k\|_k \to 0$*, quando* $k \to \infty$*;*

(ii) *Existem* $r, \eta > 0$ *e uma sequência de pontos* (ξ_n) *em* $\mathbb{R}^N$ *tal que*

$$\liminf_{n\to\infty}\Big(\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\int_{K_r(\xi)} u_n^2 dx\Big) \geq \eta.$$

Demonstração: Suponhamos que (ii) não vale. Então pelo Lema 4.7 temos

$$\|u_k\|_{L^q(Q_k)} \to 0, \tag{4.23}$$

para $q \in (2, 2^*)$. Denotemos por $y_k = P_k u_k$ e $z_k = T_k u_k$. Como $J'_k(u_k) \to 0$, dado $\varepsilon > 0$, temos em particular que

$$J'_k(u_k)(z_k) = (T_k(u_k), z_k)_k - (P_k(u_k), z_k)_k - \int_{Q_k} f(x, u_k) z_k dx \leq \varepsilon\|z_k\|_k.$$

Assim,

$$\|z_k\|_k^2 \leq \varepsilon\|z_k\|_k + \int_{Q_k} f(x, u_k) z_k dx,$$

já que $(P_k(u_k), z_k)_k = 0$. Assim, usando (4.18), a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev temos

$$\begin{aligned}
\|z_k\|_k^2 &\leq \int_{Q_k}(\varepsilon|u_k| + C(\varepsilon,p)|u_k|^{p-1})|z_k|dx + \varepsilon\|z_k\|_k \\
&= \varepsilon\int_{Q_k}|u_k z_k|dx + C(\varepsilon,p)\int_{Q_k}|u_k|^{p-1}|z_k|dx + \varepsilon\|z_k\|_k \\
&\leq \varepsilon\|u_k\|_{L^2(Q_k)}\|z_k\|_{L^2(Q_k)} + C(\varepsilon,p)\|u_k\|_{L^p(Q_k)}^{p-1}\|z_k\|_{L^p(Q_k)} + \varepsilon\|z_k\|_k \\
&\leq \varepsilon C_1\|u_k\|_{L^2(Q_k)}\|z_k\|_k + C(\varepsilon,p)C_2\|u_k\|_{L^p(Q_k)}^{p-1}\|z_k\|_k + \varepsilon\|z_k\|_k,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|z_k\|_k \leq \varepsilon C_1\|u_k\|_{L^2(Q_k)} + C(\varepsilon,p)C_2\|u_k\|_{L^p(Q_k)}^{p-1} + \varepsilon.$$

onde C_1 e C_2 são as constantes de imersão, que independem de k. Desde que (u_n) é uniformemente limitada em $L^2(Q_k)$, segue de (4.23) que

$$\|z_k\|_k \to 0.$$

Fazendo a mesma argumentação para y_k, obtemos que $\|y_k\|_k \to 0$, provando que vale (i).

Por fim, se (i) não vale, então (ii) é válido, pois caso (ii) também não fosse válido, o Lema 4.8 implicaria, como vimos, que $\|u_k\|_k \to 0$, o que seria uma contradição. Portanto, o lema está provado.

$\square$

Agora estamos em condições de provar o principal resultado desta seção. Antes, porém, faremos uma propriedade das funções periódicas que será muito útil na demonstração de tal resultado.

Seja $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função $k-$periódica em cada variável $x_i, i = 1, \ldots, N$ e integrável em cada cubo de $\mathbb{R}^N$, e seja Q_k um cubo de $\mathbb{R}^N$ centrado na origem de lado k. Então,

$$\int_{Q_k} v(x)dx = \int_{Q_k} v(x+b)dx, \tag{4.24}$$

para todo $b \in \mathbb{R}^N$. Para mostrar esta propriedade, primeiro observemos que

$$\int_0^k v(x)dx_i = \int_{b_i}^{b_i+k} v(x)dx_i.$$

De fato, definamos $g(t) = \int_t^{t+k} v(x)dx_i$. Temos que $g'(t) = v(x_1, \ldots, t+k, \ldots, x_N) - v(x_1, \ldots, t, \ldots, x_N) = 0$. Logo, g é constante e $g(0) = g(b_i)$, mostrando o desejado. Em particular, tomando $b_i = -\frac{k}{2}$ obtemos

$$\int_0^k v(x)dx_i = \int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} v(x)dx_i.$$

Por simplicidade, mostraremos (4.24) para $N = 2$. Com efeito, escrevendo $x = (x_1, x_2)$, $b = (b_1, b_2)$ e fazendo mudança de variável, temos

$$\begin{aligned}
\int_{Q_k} v(x)dx &= \int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} \int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} v(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_0^k \int_0^k v(x_1, x_2)dx_1dx_2 \\
&= \int_{b_1}^{b_1+k} \int_{b_2}^{b_2+k} v(x_1, x_2)dx_1dx_2 \\
&= \int_0^k \int_0^k v(x_1 + b_1, x_2 + b_2)dx_1dx_2 \\
&= \int_{Q_k} v(x+b)dx,
\end{aligned}$$

provando (4.24).

Por fim, podemos enunciar o teorema.

Teorema 4.9 *Suponha satisfeitas as hipóteses* (f_1)*-*(f_5) *e seja* $(u_k) \subset E_k$ *uma sequência de pontos críticos não-triviais de* J_k*, tal que* $J_k(u_k) = c_k$ *seja uma sequência limitada uniformemente por cima. Então, existe uma solução fraca não-trivial* $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *de* (P)*. Além disso,* $u_k \to u$ *em* $H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$*, a menos de translações inteiras e passagem a uma subsequência.*

Demonstração: Usando o Lema 4.5 temos que $\|u_k\|_k \leq C_k$, onde $C_k > 0$ depende de c_k e independe de k. Como estamos supondo que (c_k) é uniformemente limitada, segue que (u_k) também é uniformemente limitada. Pelo Lema 4.6 temos $\|u_k\|_k \geq \varepsilon_1 > 0$ não dependendo de k. Então, o item (ii) do Lema 4.8 ocorre. Assim, existem $r, \eta > 0$ e uma sequência (ξ_n) em $\mathbb{R}^N$ tais que, passando a uma subsequência se necessário, temos

$$\|u_k\|^2_{L^2(K_r(\xi_k))} \geq \eta/2. \tag{4.25}$$

Escrevendo $\xi_k = (\xi_{k,1}, \ldots, \xi_{k,N}) \in \mathbb{R}^N$, para cada k, seja $b_{k,i}$ o maior inteiro menor do que $\xi_{k,i}$. Assim, podemos escrever

$$\xi_k = b_k + a_k,$$

onde $b_k = (b_{k,1}, \ldots, b_{k,N}) \in \mathbb{Z}^N$ e $a_k = (a_{k,1}, \ldots, a_{k,N}) \in \mathbb{R}^N$ com $a_{k,i} \in [0,1)$. Deste modo, tomando $s = r + 1$ temos que

$$K_r(\xi_k) \subset K_s(b_k),$$

e fazendo uma mudança de variável obtemos por (4.25) que

$$\int_{K_s(0)} (u_k(x+b_k))^2 dx = \int_{K_s(b_k)} (u_k(x))^2 dx \geq \int_{K_r(\xi_k)} (u_k(x))^2 dx \geq \eta/2.$$

Consequentemente, definindo $\tilde{u_k}(x) = u_k(x + b_k)$, tem-se

$$\|\tilde{u}_k\|^2_{L^2(K_s(0))} \geq \eta/2. \tag{4.26}$$

Desde que V e f são invariantes sob translações por b_k, pois ambas são 1-periódicas, segue por (4.24) que

$$\int_{Q_k} (|\nabla u_k|^2 + V(x)u_k^2)dx = \int_{Q_k} (|\nabla \tilde{u}_k|^2 + V(x)\tilde{u}_k^2)dx$$

e

$$\int_{Q_k} F(x, u_k)dx = \int_{Q_k} F(x, \tilde{u}_k)dx.$$

Logo, $J_k(\tilde{u}_k) = J_k(u_k)$ e $\|J'_k(\tilde{u}_k)\|_{E'_k} = \|J_k(u_k)\|_{E'_k}$[2]. Usando o Lema 4.5 e o mesmo argumento usado anterior para (u_k), tem-se que $(\tilde{u}_k)$ é uniformemente limitada na norma $\|\cdot\|_k$, ou seja, existe C indenpende de k tal que

$$\|u_k\|_k \leq C, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

[2] E'_k denota o espaço dual de E_k

Denotemos por $\bar{u}_k$ a extensão de u_k para $\mathbb{R}^N$. Pela propriedade do operador extensão temos que

$$\|\bar{u}_k\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \|u_k\|_{H^1(Q_k)} \leq \widetilde{C}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{4.27}$$

Passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que

$$\bar{u}_k \rightharpoonup u \ \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N) \ \text{ e } \ \bar{u}_k(x) \to u(x) \ \ q.t.p \ \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Afirmamos que

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{em } H^1_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

De fato, fixado um compacto $K' \subset \mathbb{R}^N$ existe k_0 tal que $K' \subset Q_{k_0}$. Assim,

$$K' \subset Q_{k_0} \subset Q_k \quad \text{para todo } k \geq k_0.$$

Por (4.27) temos que $u_{k|_{K'}} \rightharpoonup u'$ em $H^1(K')$. Desde que $\bar{u}_k \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e para $k \geq k_0$ $\bar{u}_{k_{|_{K'}}} = u_{k|_{K'}}$ temos $u'_{|_{K'}} = u_{|_{K'}}$.

Para $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ fixada, podemos escolher k_0 suficientemente grande tal que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset Q_{k_0}$. Logo para $k \geq k_0$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_k \nabla \varphi + V(x) u_k \varphi) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_k) \varphi dx = 0.$$

Usando a continuidade do operador de Nemitskii, Teorema 1.39, concluímos que

$$f(x, u_k)\varphi \to f(x, u)\varphi \ \text{ em } L^1(\mathbb{R}^N).$$

Isto juntamente, com a convergência $u_k \rightharpoonup u$ em $H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \varphi + V(x) u \varphi) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u) \varphi dx = 0$$

Portanto, u é uma solução fraca para o problema (P), e é não trivial em vista de (4.26).

$\square$

4.2 Condição de Compacidade de Palais-Smale

A ferramenta que utilizaremos para provar a existência de solução para cada problema (P_k), ou seja, a existência de uma sequência $(u_k) \subset E_k$ de pontos críticos de J_k, é o Teorema 1.46. Desde que este exige condição de compacidade, dedicaremos esta seção ao estudo da condição de compacidade de Palais-Smale para o funcional J_k definido na seção anterior.

Lema 4.10 *Sob as hipóteses* (f_1)*-*(f_4)*, qualquer sequência* (PS) *de* J_k *é limitada em* E_k*.*

Demonstração: Seja (u_n) uma sequência (PS) de J_k. Desde que $|J_k(u_n)| \leq M$, $M > 0$, e $J_k'(u_n) \to 0$ em E_k', então dado $\varepsilon > 0$, para n suficientemente grande, temos que

$$\left|\frac{1}{2}\|u_n\|_k^2 - \int_{Q_k} F(x, u_n)dx\right| \leq M$$

e

$$\left|\|u_n\|_k^2 - \int_{Q_k} f(x, u_n)u_n dx\right| \leq \varepsilon\|u_n\|_k.$$

Em particular, usando (f_4) segue que

$$\frac{1}{2}\|u_n\|_k^2 \leq \int_{Q_k} F(x, u_n)dx + M \leq \int_{Q_k} \frac{1}{\gamma}f(x, u_n)u_n dx + M \tag{4.28}$$

e

$$-\frac{\varepsilon}{\gamma}\|u_n\|_k \leq \frac{1}{\gamma}\|u_n\|_k^2 - \frac{1}{\gamma}\int_{Q_k} f(x, u_n)u_n dx \tag{4.29}$$

Somando (4.28) e (4.29) obtemos

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma})\|u_n\|_k^2 \leq \frac{\varepsilon}{\gamma}\|u_n\|_k + M, \tag{4.30}$$

o que é suficiente para concluir que (u_n) é limitada em (E_k). De fato, pois do contrário, passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que $\|u_n\|_k \to \infty$. Então dividindo (4.30) por $\|u_n\|_k^2$, tem-se

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}) \leq \frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{1}{\|u_n\|_k} + \frac{M}{\|u_n\|_k^2},$$

que é uma contradição, visto que o lado esquerdo da desigualdade é positivo e o lado direito tende a zero. Portanto, (u_n) é limitada em E_k.

□

Teorema 4.11 *Sob as hipóteses* (f_1)*-*(f_4)*, o funcional satisfaz a condição* (PS)*.*

Demonstração: Seja (u_n) uma sequência (PS) de J_k. Sendo E_k reflexivo e (u_n) limitada, podemos assumir que $u_n \rightharpoonup u$ em E_k. Desde que Q_k é limitado, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, tem-se

$$u_n \to u \;\text{ em } L^p(Q_k), \tag{4.31}$$

sendo $p \in (2, 2^*)$. Então, por (f_2), podemos aplicar a continuidade do operador de Nemitskii para concluir que

$$f(x, u_n) \to f(x, u) \quad \text{em } L^q(Q_k), \tag{4.32}$$

$q = \frac{p}{p-1}$ o expoente conjugado de $p \in (2, 2^*)$. Agora temos

$$\begin{aligned} J_k'(u_n)(u_n - u) - J_k'(u)(u_n - u) &= \int_{Q_k} (\nabla u_n \nabla(u_n - u) + V(x)u_n(u_n - u))dx \\ &- \int_{Q_k} f(x, u_n)(u_n - u)dx \\ &- \int_{Q_k} (\nabla u \nabla(u_n - u) + V(x)u(u_n - u))dx \\ &+ \int_{Q_k} f(x, u)(u_n - u)dx \\ &= \int_{Q_k} (|\nabla(u_n - u)|^2 + V(x)(u_n - u)^2)dx \\ &+ \int_{Q_k} (f(x, u) - f(x, u_n))(u_n - u)dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u_n - u\|_k^2 = J_k'(u_n)(u_n - u) - J_k'(u)(u_n - u) + \int_{Q_k} (f(x, u_n) - f(x, u))(u_n - u)dx.$$

Como $(u_n - u) \rightharpoonup 0$, segue que $J_k'(u)(u_n - u) \to 0$. Além disso, desde que $u_n - u$ é limitada em E_k, então dado $\varepsilon > 0$ temos $|J_k'(u_n)(u_n - u)| \leq \varepsilon \|u_n - u\|_k \leq \varepsilon C$, $C > 0$, para n suficientemente grande. Logo,

$$J_k'(u_n)(u_n - u) \to 0.$$

Para mostrar que $\|u_n - u\|_k^2 \to 0$, resta-nos provar que

$$\int_{Q_k} (f(x, u_n) - f(x, u))(u_n - u)dx \to 0.$$

Mas isto é consequência imediata da desigualdade de Hölder, (4.31) e (4.32). De fato,

$$\int_{Q_k} (f(x, u_n) - f(x, u))(u_n - u)dx \leq \|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{L^q(Q_k)} \|u_n - u\|_{L^p(Q_k)} \to 0.$$

Portanto, $u_n \to u$ em E_k.

$\square$

4.3 Existência de Pontos Críticos Periódicos

Nosso objetivo nesta seção é mostrar a existência de uma sequência de pontos críticos de J_k que satisfaz as hipóteses do Teorema 4.9. Provada a existência de uma tal sequência, o Teorema 4.9 nos assegura uma solução não trivial de (P). Para demonstrarmos esta existência, faremos uso do Teorema 1.46.

Desde que $E_k = Y_k \oplus Z_k$ e J_k satisfaz a condição (PS), como mostrado na seção anterior, o que devemos fazer agora é provar a condição (1.11) no Teorema 1.46. Faremos isso nos resultados a seguir.

Lema 4.12 *Existem números reais $\delta, r > 0$, não dependentes de k, tais que*

$$\inf_{z \in N_k} J_k(z) \geq \delta,$$

onde $N_k := \{z \in Z_k; \|z\|_k = r\}$.

Demonstração: Para $z \in Z_k$, temos

$$J_k(z) = \frac{1}{2}\|z\|_k^2 - \int_{Q_k} F(x,z)dx. \tag{4.33}$$

Para cada $\varepsilon > 0$, por (4.18), temos

$$|F(x,s)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + \frac{C(\varepsilon,p)}{p}|s|^p.$$

Logo,

$$\int_{Q_k} F(x,z)dx \leq \frac{\varepsilon}{2}\|z\|_{L^2(Q_k)}^2 + \frac{C(\varepsilon,p)}{p}\|z\|_{L^p(Q_k)}^p.$$

Pela imersão de Sobolev, existem $C_1, C_2 > 0$, independentes de k, tais que

$$\int_{Q_k} F(x,z)dx \leq \frac{\varepsilon}{2}C_1\|z\|_k^2 + C_2\frac{C(\varepsilon,p)}{p}\|z\|_k^p. \tag{4.34}$$

Então, de (4.33) e (4.34), segue que

$$\begin{aligned} J_k(z) &\geq \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon C_1)\|z\|_k^2 - C_2\tfrac{C(\varepsilon,p)}{p}\|z\|_k^p \\ &= \|z\|_k^2(C_3 - C_4\|z\|_k^{p-2}). \end{aligned}$$

Desde que $p > 2$, podemos tomar ε e $\|z\|_k$ suficientemente pequenos de modo que $J_k(z) > 0$, como queríamos.

$\square$

Agora, para cada k, fixemos uma função $z_k \in Z_k$, com $\|z_k\|_k = r$, r como no Lema 4.12. Para $\rho > 0$, consideremos o conjunto

$$M_k := \{y + tz_k; y \in Y, \|y + tz_k\|_k \leq \rho \ e \ t \geq 0\}.$$

Como no Teorema 1.46 temos que

$$\partial M_k := \{y + tz_k; y \in Y, \|y + tz_k\|_k = \rho \ e \ t \geq 0 \ ou \ \|y\|_k \leq \rho \ e \ t = 0\}.$$

Lema 4.13 *Existe $\rho > 0$, independente de k, tal que*

$$\sup_{u \in \partial M_k} J_k(z) = 0.$$

Demonstração: Desde que $0 \in \partial M_k$ e $J_k(0) = 0$, precisamos então mostrar apenas que existe $\rho > 0$ tal que

$$\sup_{u \in \partial M_k} J_k(z) \leq 0.$$

Para tanto, se $y + tz_k \in M_k$ temos

$$\begin{aligned} J_k(y + tz_k) &= \frac{1}{2}\|tz_k\|_k^2 - \frac{1}{2}\|y\|_k^2 - \int_{Q_k} F(x, y + tz_k)dx \\ &= -\frac{1}{2}\|y\|_k^2 + \frac{1}{2}r^2t^2 - \int_{Q_k} F(x, y + tz_k)dx. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$F(x, s) \geq C_\varepsilon |s|^\gamma, \tag{4.35}$$

onde $\gamma \in (2, 2^*)$. De fato, usando (f_4), tem-se

$$\frac{\gamma}{s} \leq \frac{f(x, s)}{F(x, s)}.$$

Se $s \geq \varepsilon > 0$, então

$$\int_\varepsilon^s \frac{\gamma}{t} dt \leq \int_\varepsilon^s \frac{f(x, s)}{F(x, s)} dt = \ln\Big(\frac{F(x, s)}{F(x, \varepsilon)}\Big).$$

Admitindo, sem perda de generalidade, que $\varepsilon \leq 1$ temos $\ln(\varepsilon) \leq 0$, o que nos garante

$$\ln s^\gamma \leq \ln\Big(\frac{F(x, s)}{F(x, \varepsilon)}\Big) \quad \Rightarrow \quad F(x, s) \geq F(x, \varepsilon) s^\gamma. \tag{4.36}$$

Agora, se $s < -\varepsilon$, então $-s > \varepsilon$ e o mesmo argumento nos leva a

$$F(x,s) \geq F(x,-\varepsilon)(-s)^{\gamma}. \tag{4.37}$$

Logo, (4.35) segue que (4.36) e (4.37).

Por (4.35), temos que

$$-\int_{Q_k} F(x, y+tz_k)dx \leq -C_{\varepsilon}\|y+tz_k\|^{\gamma}_{L^{\gamma}(Q_k)},$$

e podemos escrever

$$J_k(y+tz_k) \leq -\frac{1}{2}\|y\|_k^2 + \frac{1}{2}r^2t^2 - C_{\varepsilon}\|y+tz_k\|^{\gamma}_{L^{\gamma}(Q_k)}.$$

Seja agora $X_k = Y_k \oplus \mathbb{R}z_k$, o qual é continuamente imerso em $L^{\gamma}(Q_k)$. Definamos as projeções contínuas $\pi_k : X_k \to \mathbb{R}z_k,\ y+tz_k \mapsto tz_k$. Desde que $z_k \neq 0$, temos $\|\pi_k\| = 1$, por π_k ser projeção. Em particular,

$$\|tz_k\|_{L^{\gamma}(Q_k)} \leq \|y+tz_k\|_{L^{\gamma}(Q_k)}.$$

Além disso, sendo $\dim(X_k) < \infty$, as normas $\|\cdot\|_{L^{\gamma}(Q_k)}$ e $\|\cdot\|_k$ são equivalentes. Assim,

$$\begin{aligned} J_k(y+tz_k) &\leq -\frac{1}{2}\|y\|_k^2 + \frac{1}{2}r^2t^2 - C_{\varepsilon}\|tz_k\|^{\gamma}_{L^{\gamma}(Q_k)} \\ &\leq \frac{1}{2}r^2t^2 - C_{\varepsilon}\|tz_k\|_k^{\gamma} \\ &\leq \frac{1}{2}r^2t^2 - C_{\varepsilon}r^{\gamma}t^{\gamma}. \end{aligned}$$

Consequentemente, $J_k(y+tz_k) \leq 0$, se $t = 0$, e $J_k(y+tz_k) \to -\infty$, quando $\|y+tz_k\|_k \to \infty$. Isto mostra que podemos escolher $\rho > 0$, independente de k, de modo que o lema seja válido.

□

Lema 4.14 *Para o conjunto de deformações* $\Gamma_k := \{h \in C(M_k, E_k); h|_{\partial M_k} = id\}$ *os números*

$$c_k = \inf_{h\in\Gamma_k} \max_{u\in M_k} J_k(h(u))$$

são valores críticos de J_k *e satisfazem* $0 < \delta \leq c_k \leq C < \infty$.

Demonstração: Desde que E_k é um espaço de Banach, Y_k tem dimensão finita, $J_k \in C^1(E_k, \mathbb{R})$ e satisfaz a condição (PS), então pelos Lemas 4.12 e 4.13, podemos aplicar o Teorema 1.46 para concluir que c_k é valor crítico de J_k. Além disso, $c_k \geq \delta$, onde $\delta > 0$ independe de k, pelo Lema 4.5. Sendo ρ a constante da definição de M_k independente de k, e J_k limitado sobre conjuntos limitados, pois $|J_k(u)| \leq \|u\|_k^2$, obtemos considerando $h = id$

$$c_k \leq \sup_{u \in M_k} J_k(u) \leq C,$$

onde C depende somente de ρ.

$\square$

Enfim, a prova do Teorema 4.1 segue imediatamente do Lema 4.14 e do Teorema 4.9.

Bibliografia

[1] Adams, R.A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] Bartle, R. G., *The elements of integration and Lebesgue measure*, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley Sons, Inc., New York, 1995.

[3] Bachman, G. e Narici, L., *Functional Analysis*, Dover Publications, New York, 2000.

[4] Berezin, F.A. e Shubin, M.A., *The Schrodinger Equation*, Kluwer, Dordrecht, 1991.

[5] Brezis, H., *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[6] Costa, D.G. e H. Tehrani, *On a Class of Asymptotically Linear Elliptic Problems in* $\mathbb{R}^N$, J. Differential Equations **173** (2001), 470-494.

[7] de Figueiredo, D. G., *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 81. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[8] Evans, L. C. *Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics, 19.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[9] Gilbarg, D. e Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second order*, Reprint of the 1998 edition, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlim, 2001.

[10] Grossinho, M. R. e Tersian, S. A., *An introduction to minimax theorems and their applications to differential equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001

[11] Kavian, Otared, *Introduction à Théorie des points critiques*, Springer-Verlag, France, Paris, 1993.

[12] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley Sons, Inc., New York, 1989.

[13] Lions, P.-L. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations.* The locally compact case. I. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 1 (1984), no. 2, 109–145.

[14] Lions, P.-L. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations.* The locally compact case. II. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 1 (1984), no. 4, 223–283.

[15] Pankov, A.A. e Pflüger, K., *On a Semilinear Schrödinger Equation with Periodic Potential*, Nonlinear Analysis **33** (1998), 593-609.

[16] Rabinowitz, Paul H. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, 65. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[17] Reed, M. e Simon, B. *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis.* Academic Press, New York-London, 1972.

[18] Reed, M. e Simon, B. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978.

[19] Schrödinger, E., *Collected Papers on Wave Mechanics*, London and Glasgow. Blackie and Son Limited, 1928.

[20] Stuart, C.A. e Zhou, H.S., *Applying the Mountain Pass Theorem to an Asymptotically Linear Elliptic Equation on* $\mathbb{R}^N$, Comm. Partial Differential Equations **24** (1999), 1731-1758.

[21] von Neumann, J., *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1955.

[22] Willem, M., *Minimax Theorems*, Birkhauser, Boston, Besel, Berlim, 1996.

Índice