Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes

Joedson Silva dos Santos

2008

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes

por

Joedson Silva dos Santos

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Julho de 2008
João Pessoa-PB

Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes

por

Joedson Silva dos Santos

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho - UFU

Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho - UFCG

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB (suplente)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

A minha avó Estelina (in memorian).

Agradecimentos.

Ao Sr. José Ferreira dos Santos e a Sra. Anailza de Fátima Silva dos Santos, papai e mamãe, sem os quais eu nem sequer existiria e a minha namorada Joilma pelo companheirismo e pela paciência.

Ao meu orientador Prof. Daniel Marinho Pellegrino, que cumpriu de forma excelente o papel de orientador. Agradeço também, pela confiança e credibilidade em minha capacidade, pela paciência, pela boa vontade em me receber em sua sala em qualquer momento; sendo desta forma um dos grandes responsáveis por esta conquista.

Aos professores de graduação e pós-graduação. Especialmente a Everaldo Souto de Medeiros, Flávia Jerônimo Barbosa, Fágner Dias Araruna, José Gomes de Assis e Pedro Hinojosa Vera.

A todos os meus colegas de graduação e pós-graduação. Em particular, Antonio Pereira, Ailton e Thiago.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

No presente trabalho apresentamos uma introdução à teoria linear de operadores absolutamente somantes e também investigamos temas recentes de pesquisa relacionados à teoria de polinômios absolutamente somantes. São apresentados, em detalhes, vários dos principais resultados da teoria linear, assim como resultados recentes de coincidência e não-coincidência no contexto da teoria de polinômios absolutamente somantes.

Palavras-Chave:
Operadores absolutamente somantes, polinômios, séries em espaços de Banach, resultados de coincidência.

Abstract

In the present work we present an introduction to the theory of absolutely summing operators and also investigate recent research works related to the theory of absolutely summing polynomials. Several of the main results of the linear theory are discussed in detail, as well as recent coincidence and non-coincidence results in the context of the polynomial theory.

Key-Words:
Absolutely summing operators, polynomials, series in Banach spaces, coincidence results.

Sumário

Introdução

Uma série numérica é absolutamente convergente se, e somente se, é incondicionalmente convergente. Não é difícil provar que, em alguns espaços de Banach de dimensão infinita, esse resultado não é válido. Entretanto, apenas em 1950, A. Dvoretzky e C. A. Rogers [18] mostraram que esse comportamento era comum a todos os espaços de Banach de dimensão infinita. Precisamente: em todo espaço de Banach de dimensão infinita existem séries incondicionalmente somáveis que não são absolutamente somáveis. Em um trabalho memorável, A. Grothendieck [21] apresentou uma demonstração diferente para o Teorema de Dvoretzky-Rogers e introduziu o conceito de operador absolutamente somante (application semi-integral à droite). Na década de 60, com os trabalhos de Pietsch [38], Lindenstrauss e Pełczyński [24] e Mitjagin e Pełczyński [29], a teoria de operadores absolutamente somantes foi apresentada de forma mais acessível, simplificando a apresentação original de Grothendieck e, desde então, a teoria de operadores absolutamente somantes vem tendo um papel de destaque na Análise Funcional.

O sucesso da teoria de operadores absolutamente somantes é uma das razões para um estudo sistemático de ideais de operadores entre espaços de Banach, que teve seu início impulsionado pelo livro de Pietsch [39]. A partir da década de 80, com o trabalho de Pietsch [40], começaram a ser investigadas generalizações do conceito "absolutamente somante" para polinômios, aplicações multilineares e até aplicações arbitrárias entre espaços de Banach (veja [2, 7, 12, 15, 27, 28, 32, 34]).

Dados espaços de Banach X e Y, uma pergunta natural é se todo operador linear contínuo de X em Y é absolutamente $(p; q)$-somante (quando isso ocorre, chamamos de resultado de coincidência). Esse tipo de questão foi tema de trabalhos de Bennet [5], Carl [13], Dubinsky, Pełczyński e Rosenthal [17], Garling [20], Kwapień [22], Lindenstrauss e Pełczyński [24] e vários outros. Nesse trabalho, estudamos resultados de coincidência no âmbito da teoria multilinear de operadores absolutamente somantes.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

No Capítulo 1 demonstraremos alguns dos principais resultados necessários para um estudo relativamente auto-sufuciente da teoria linear de operadores absolutamente somantes.

No Capítulo 2 estudamos os fundamentos da teoria de operadores absolutamente somantes e alguns de seus resultados mais conhecidos. Nossa principal fonte de referência foi o livro [16].

No Capítulo 3 estudamos um pouco da teoria multilinear relacionada a operadores absolutamente somantes, com especial atenção a resultados de coincidência para a teoria de polinômios absolutamente somantes.

Notação e Terminologia

- Em todo este texto, $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Os espaços vetoriais sempre serão considerados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, a menos que se mencione algo em contrário.

- Usaremos o termo "operador" com o mesmo sentido de "função".

- Na maior parte deste texto, $X, Y, E, G, H, X_i, Y_i, ...$ denotarão espaços de Banach. A norma de um espaço de Banach (ou normado) X será usualmente denotada por $\|\cdot\|$; quando maior precisão for necessaria, nós usaremos $\|\cdot\|_X$. O símbolo B_X denotará a bola unitária fechada $\{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ de um espaço de Banach X.

- O dual (topológico) de um espaço de Banach X será denotodo por X'.

- A notação $w - \lim$ ou $\xrightarrow{w}$ indica convergência fraca.

- Um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é dito operador de posto finito quando a dimensão da imagem de T é finita.

- Denotamos por q^* o conjugado de que q, isto é, $q^* = \frac{q}{q-1}$.

Capítulo 1

Séries em espaços de Banach e resultados relacionados

1.1 Séries Absolutamente e Incondicionalmente Convergentes em Espaços de Banach

Seja X uma espaço vetorial normado e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência em X. Dizemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é absolutamente somável se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, e é incondicionalmente somável se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ converge, qualquer que seja a permutação $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Na reta, uma seqüência é incondicionalmente somável se, e somente se, é absolutamente somável; este resultado é devido a Dirichlet.

As relações entre os conceitos de seqüências absolutamente e incondicionalmente somáveis estão intimamente relacionadas com espaços de Banach. A prova disso é a seguinte caracterização dos espaços de Banach.

Proposição 1.1.1 *Um espaço vetorial normado X é Banach se, e somente se, toda seqüência absolutamente somável é incondicionalmente somável.*

Demonstração. Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência absolutamente somável em X. Vamos mostrar que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência incondicionalmente somável.

Dada uma permutação σ dos naturais, considere $y_n = \|x_n\|$. Como $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é absolutamente somável então é incondicionalmente somável, logo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\|x_{\sigma(n)}\right\|$ converge e, portanto, é de Cauchy. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > m > n_0 \Rightarrow \left\| \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{m} x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_{\sigma(k)} \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \left\|x_{\sigma(k)}\right\| < \sum_{k=n_0}^{\infty} \left\|x_{\sigma(k)}\right\| < \varepsilon.$$

Isso mostra que a seqüência das somas parciais de $(x_{\sigma(n)})_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, logo é convergente. Portanto $(x_{\sigma(n)})_{n=1}^{\infty}$ é somável.

Agora, suponhamos que toda seqüência absolutamente somável em X é incondicionalmente somável. Note que nesse caso a própria seqüência é somável, pois basta considerar a permutação $\sigma = id$.

Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de Cauchy em X. Então, dados $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon = 2^{-k} > 0$, existe $n_0^{(k)} \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq n_0^{(k)} \Rightarrow \|x_n - x_m\| < 2^{-k}.$$

Assim, podemos encontrar $n_1 < n_2 < ...$ tais que

$$\left\| x_{n_k} - x_{n_{k+1}} \right\| < 2^{-k}.$$

Em particular,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$$

e, portanto, a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ é absolutamente convergente e, por hipótese, é convergente. Note agora que

$$x_{n_{k+1}} = x_{n_1} + \sum_{j=1}^{k} (x_{n_{j+1}} - x_{n_j})$$

Logo $(x_{n_{k+1}})_{k=1}^{\infty}$ é convergente. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy e admite subseqüência convergente, então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ também converge, implicando que X é completo. ■

A seguir veremos algumas equivalências sobre seqüências incondicionalmente somáveis.

Teorema 1.1.2 *Para uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ num espaço de Banach X, são equivalentes:*

(i) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência incondicionalmente somável;

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$, existe um $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, quando M é um subconjunto finito de $\mathbb{N}$ com $\min M > n_\varepsilon$, temos $\left\| \sum\limits_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon$;

(iii) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é subsérie somável, isto é, para qualquer seqüência estritamente crescente $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ de inteiros positivos, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ converge;

(iv) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é sinal somável, ou seja, para qualquer escolha de $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ temos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ converge.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Suponha que (ii) seja falsa. Então, existe $\delta > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$, existe um subconjunto finito M dos naturais com $\min M > m$ e $\left\| \sum\limits_{n \in M} x_n \right\| \geq \delta$.

Isso nos permite construir uma seqüência $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos finitos dos naturais tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\min M_n > \max M_{n-1} \text{ e } \left\| \sum_{n \in M_n} x_n \right\| \geq \delta.$$

De fato, para $m = 1$, existe $M_1 \subset \mathbb{N}$, M_1 finito, com

$$\min M_1 > 1 \text{ e } \left\| \sum_{n \in M_1} x_n \right\| \geq \delta;$$

para $m = \max M_1$, existe $M_2 \subset \mathbb{N}$, M_2 finito, com

$$\min M_2 > \max M_1 \text{ e } \left\| \sum_{n \in M_2} x_n \right\| \geq \delta.$$

Fazendo isso para $m = \max M_{n-1}$, irá existir $M_n \subset \mathbb{N}$, M_n finito, com

$$\min M_n > \max M_{n-1} \text{ e } \left\| \sum_{n \in M_n} x_n \right\| \geq \delta.$$

Agora, defina uma permutação $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que leva cada inteiro do intervalo $[\min M_n, \min M_n + |M_n|)$ em M_n, onde $|M_n|$ é a quantidade de elementos de M_n. Isso é possível porque o número de inteiros no intervalo $[\min M_n, \min M_n + |M_n|)$ é igual a $|M_n|$ uma vez que

$$\underbrace{\min M_n + |M_n| - 1}_{\text{último inteiro do intervalo}} - \underbrace{\min M_n}_{\text{primeiro inteiro do intervalo}} + 1 = |M_n|$$

e também porque tanto os intervalos quanto os M_n são disjuntos. Com efeito, $M_n \cap M_{n+1} = \varnothing$ por construção, e os intervalos considerados são disjuntos porque $\min M_n + |M_n| \leq \max M_n + 1 \leq \min M_{n+1}$. Agora, vejamos que a seqüência $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)}$ não é de Cauchy. Para tanto, tome $\varepsilon = \delta > 0$. Então, para todo $m \in \mathbb{N}$, podemos escolher algum dos $M_n \subset \mathbb{N}$, com $\min M_n > m$ e $\left\| \sum_{n \in M_n} x_n \right\| \geq \delta$. Tomando agora $p = \min M_n - 1$ e $q = \min M_n + |M_n| - 1$, teremos $q \geq p + 1 > m$, e

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{k \in M_n} x_k \right\| \geq \delta = \varepsilon.$$

Logo $\left(x_{\sigma(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ não é somável.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Seja σ uma permutação dos naturais e consideremos a seqüência $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)}$. Fixe $\varepsilon > 0$ e escolha $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de acordo com (ii). Então existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, de modo que $\{1, ..., n_\varepsilon\} \subset \{\sigma(1), ..., \sigma(m_\varepsilon)\}$, e isso implica que para $q, p \in \mathbb{N}$ com $q \geq p + 1 \geq m_\varepsilon$, temos $\sigma(p+1), \sigma(q) > n_\varepsilon$, e portanto

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{n \in \{\sigma(p+1), ..., \sigma(q)\}} x_n \right\| < \varepsilon.$$

Logo $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, e portanto convergente.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Fixe $\varepsilon > 0$ e escolha $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de modo que $\left\| \sum\limits_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon$ para todo subconjunto finito M dos naturais com $\min M > n_\varepsilon$. Agora, se $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência estritamente crescente de naturais, temos que $k_n \geq n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo, para $q, p \in \mathbb{N}$ com $q \geq p + 1 > n_\varepsilon$, segue que $k_q \geq q > n_\varepsilon$ e $k_{p+1} \geq p + 1 > n_\varepsilon$. Logo $T_n = \sum\limits_{j=1}^{n} x_{k_j}$ é de Cauchy. De fato, se $M_0 = \{k_{p+1}, ..., k_q\}$, temos

$$\|T_q - T_p\| = \left\| \sum_{j=p+1}^{q} x_{k_j} \right\| = \left\| \sum_{n \in M_0} x_n \right\| < \varepsilon.$$

Portanto, $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ é somável.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Seja $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência formada por 1 e -1. Seja também $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência subsérie somável e considere os conjuntos $S^+ = \{n \in \mathbb{N} \colon \varepsilon_n = 1\}$ e $S^- = \{n \in \mathbb{N} \colon \varepsilon_n = -1\}$, com a ordem herdada dos naturais. Então, as séries $\sum\limits_{n \in S^+} x_n$ e $\sum\limits_{n \in S^-} x_n$ são convergentes. Considere as seqüências $R_n = \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \in S^+}}^{n} x_k$ e $V_n = \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \in S^-}}^{n} x_k$. Dado $\varepsilon > 0$, a convergência das séries $\sum\limits_{n \in S^+} x_n$ e $\sum\limits_{n \in S^-} x_n$ nos garante que existe $m_\varepsilon^+ \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|R_q - R_p\| = \left\| \sum_{\substack{k=p+1 \\ k \in S^+}}^{q} x_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sempre que $q > p > m_\varepsilon^+$. De modo análogo existe $m_\varepsilon^- \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|V_q - V_p\| = \left\| \sum_{\substack{k=p+1 \\ k \in S^-}}^{q} x_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sempre que $q > p > m_\varepsilon^-$. Escolhendo $m_\varepsilon = \max\{m_\varepsilon^+, m_\varepsilon^-\}$, segue que a seqüência $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k$ satisfaz

$$\begin{aligned} \|S_q - S_p\| &= \left\| \sum_{k=p+1}^{q} \varepsilon_k x_k \right\| = \left\| \sum_{\substack{k=p+1 \\ k \in S^+}}^{q} x_k - \sum_{\substack{k=p+1 \\ k \in S^-}}^{q} x_k \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{\substack{k=p+1 \\ k \in S^+}}^{q} x_k \right\| + \left\| \sum_{\substack{k=p+1 \\ k \in S^-}}^{q} x_k \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

sempre que $q > p > m_\varepsilon$, ou seja, a seqüência $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em X. Como X é Banach, segue que $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é convergente. Portanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é sinal somável.

$(iv) \Rightarrow (ii)$ Sunponha que (ii) não vale. Então, existem $\delta > 0$ e uma seqüência $(M_k)_{k=1}^{\infty}$ de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, com $\max M_k < \min M_{k+1}$ e $\left\| \sum\limits_{n\in M_k} x_n \right\| \geq \delta$ para todo k.

Defina $\varepsilon_n = \begin{cases} 1, \text{se } n \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k \\ -1, \text{se } n \notin \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k. \end{cases}$.

Agora considere a seqüência $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (1+\varepsilon_k)\, x_k$.

Seja m um natural qualquer. Escolha um inteiro positivo k tal que $m < \min M_k$. Logo

$$\left\| \sum_{n=\min M_k}^{\max M_k} (1+\varepsilon_k)\, x_k \right\| = \left\| \sum_{n\in M_k} 2x_n \right\| \geq 2\delta.$$

Conseqüentemente a seqüência $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ não é de Cauchy, e portanto não converge. Assim, pelo menos uma das séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ e/ou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ não converge, e daí concluímos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ não é sinal somável. ■

Corolário 1.1.3 *Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência incondicionalmente somável em um espaço de Banach X, então para toda permutação σ dos naturais temos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$.*

Demonstração. Apresentaremos duas demonstrações:

Primeira Demonstração: Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência incondicionalmente somável, o teorema anterior garante que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, quando $M \subset \mathbb{N}$ (M finito) com $\min M > n_\varepsilon$, então $\left\| \sum\limits_{n\in M} x_n \right\| < \varepsilon$. Agora, escolhemos L suficientemente grande, de modo que $\{1, ..., n_\varepsilon\} \subset \{\sigma(1), ..., \sigma(L)\}$. Assim, se $N > L$, definindo $M_1 = \{1, ..., N\} - \{\sigma(1), ..., \sigma(N)\}$ e $M_2 = \{\sigma(1), ..., \sigma(N)\} - \{1, ..., N\}$ temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{N} x_n - \sum_{n=1}^{N} x_{\sigma(n)} \right\| &= \left\| \sum_{n\in M_1} x_n - \sum_{n\in M_2} x_n \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n\in M_1} x_n \right\| + \left\| \sum_{n\in M_2} x_n \right\| \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Como

$$\sum_{n=1}^{N} x_n = \left(\sum_{n=1}^{N} x_n - \sum_{n=1}^{N} x_{\sigma(n)} \right) + \sum_{n=1}^{N} x_{\sigma(n)},$$

fazendo $N \to \infty$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

Segunda Demonstração: Para seqüências de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, sabemos que se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é incondicionalmente convergente, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente e, além disso, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ para toda permutação σ (veja [23, Teorema 22]). Logo, para toda $f \in X'$ temos que

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f\left(x_{\sigma(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f\left(x_n\right) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right).$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

■

Teorema 1.1.4 (Teste dos Multiplicadores Limitados) *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência em X. A seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável se, e somente se, a seqüência $(b_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ é somável para todo $b = (b_n)_{n=1}^{\infty} \in l_\infty$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Seja $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de 1 e -1. Como $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty} \in l_\infty$ temos que $(\varepsilon_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ é somável, isto é, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é sinal somável. Portanto, pelo teorema anterior, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável.

($\Rightarrow$) Agora fixe $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência incondicionalmente somável em X. Dado $b = (b_n)_{n=1}^{\infty} \in l_\infty$, mostraremos que $(b_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ é somável. Como X é completo, basta mostrar que $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k x_k$ é de Cauchy. Por Hahn-Banach, para $n > m$, temos

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} b_k x_k \right\| = \sup_{\|f\| \le 1} \left| f\left(\sum_{k=m+1}^{n} b_k x_k \right) \right| \le \|b\|_\infty \sup_{\|f\| \le 1} \left(\sum_{k=m+1}^{n} |f(x_k)| \right). \quad (1.1)$$

Portanto, para mostrar que $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, basta mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{\|f\| \le 1} \left(\sum_{k \ge m+1} |f(x_k)| \right) \le \varepsilon \quad (1.2)$$

para todo $m \ge m_0$. De fato, se (1.2) for provado, obteremos

$$\sup_{\|f\| \le 1} \left(\sum_{k=m+1}^{n} |f(x_k)| \right) \le \varepsilon \quad (1.3)$$

para todo $n, m \geq m_0$. Assim, de (1.1) e (1.3), teremos

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} b_k x_k \right\| < \|b\|_\infty \varepsilon,$$

ou seja, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k x_k$ será de Cauchy em X (Banach), e portanto será convergente.

Vamos então provar (1.2). Pelo teorema anterior, vale (ii). Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, quando $M \subset \mathbb{N}$ é finito com $\min M \geq m_\varepsilon$, temos que $\left\| \sum\limits_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon/4$.

Vamos nos concentrar em $\mathrm{Re}\,(f\,(x_k))$ para $f \in X^{'}$, com $\|f\| = 1$ fixo. Escolha $n > m > m_\varepsilon$ e os conjuntos $M^+ = \{m+1 \leq k \leq n \colon \mathrm{Re}\,(f\,(x_k)) \geq 0\}$ e $M^- = \{m+1 \leq k \leq n \colon \mathrm{Re}\,(f\,(x_k)) < 0\}$. Então

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m+1}^{n} |\mathrm{Re}\,(f\,(x_k))| &= \sum_{n \in M^+} |\mathrm{Re}\,(f\,(x_k))| + \sum_{n \in M^-} |\mathrm{Re}\,(f\,(x_k))| \\
&= \left| \sum_{n \in M^+} \mathrm{Re}\,(f\,(x_k)) \right| + \left| \sum_{n \in M^-} \mathrm{Re}\,(f\,(x_k)) \right| \\
&= \left| \mathrm{Re}\left(f\left(\sum_{n \in M^+} x_k \right) \right) \right| + \left| \mathrm{Re}\left(f\left(\sum_{n \in M^-} x_k \right) \right) \right| \\
&\leq \left| f\left(\sum_{n \in M^+} x_k \right) \right| + \left| f\left(\sum_{n \in M^-} x_k \right) \right| \\
&\leq \left\| \sum_{n \in M^+} x_k \right\| + \left\| \sum_{n \in M^-} x_k \right\|.
\end{aligned}$$

Como $\begin{cases} \min M^+ > m_\varepsilon \\ \min M^- > m_\varepsilon \end{cases}$, segue que

$$n > m > m_\varepsilon \Rightarrow \sum_{k=m+1}^{n} |\mathrm{Re}\,(f\,(x_k))| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Analogamente, temos

$$n > m > m_\varepsilon \Rightarrow \sum_{k=m+1}^{n} |\mathrm{Im}\,(f\,(x_k))| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo

$$n > m > m_\varepsilon \Rightarrow \sum_{k=m+1}^{n} |f\,(x_k)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |\mathrm{Re}\,(f\,(x_k))| + \sum_{k=m+1}^{n} |\mathrm{Im}\,(f\,(x_k))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Fazendo $n \to \infty$, teremos

$$m > m_\varepsilon \Rightarrow \sum_{k \geq m+1} |f(x_k)| \leq \varepsilon, \text{ para todo} f \in X'.$$

Conseqüentemente

$$\sup_{\|f\| \leq 1} \left(\sum_{k \geq m+1} |f(x_k)| \right) \leq \varepsilon,$$

como queríamos. ■

1.2 O Teorema de Dvoretzky-Rogers

O Teorema de Dvoretzky-Rogers é um resultado muito importante da Análise Funcional. Através dele é possível garantir a existência (em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita) de uma seqüência incondicionalmente somável que não é absolutamente somável. Antes de demonstrá-lo, precisamos provar um lema técnico:

Lema 1.2.1 *Seja E um espaço de Banach de dimensão $2n$. Então existem n vetores $y_1, ..., y_n$ em E, com $\frac{1}{2} \leq \|y_j\| \leq 1$ e $j = 1, ..., n$ tais que para quaisquer escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tem-se*

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \right\| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Demonstração. Por (**A4**) temos que, se F é um espaço vetorial de dimensão finita n e $\omega : F \to F$ é um operador linear, o traço de ω, denotado por $tr(\omega)$, não depende da base escolhida para F.

A partir de agora, vamos fixar uma base para l_2^{2n} e uma base para E.

Vamos encontrar um isomorfismo

$$u : l_2^{2n} \longrightarrow E$$

de modo que $\|u\| = 1$ e que para todo operador linear

$$v : l_2^{2n} \longrightarrow E,$$

o traço de $u^{-1}v : l_2^{2n} \longrightarrow l_2^{2n}$ satisfaça

$$\left| tr\left(u^{-1}v\right) \right| \leq 2n \|v\|. \tag{1.4}$$

Tome u tal que

$$\det(u) = \max\left\{ |\det(v)| ; v \in \mathcal{L}\left(l_2^{2n}, E\right), \|v\| = 1 \right\}.$$

Isso é possível pois a função

$$|\det| : \mathcal{L}\left(l_2^{2n}, E\right) \longrightarrow [0, \infty)$$

é contínua e $\left\{v \in \mathcal{L}\left(l_2^{2n}, E\right), \|v\| = 1\right\}$ é um compacto (esfera unitária de um espaço de Banach de dimensão finita), e portanto existe $u_0 \in \mathcal{L}\left(l_2^{2n}, E\right)$, com $\|u_0\| = 1$, tal que

$$|\det(u_0)| = \max\left\{|\det(v)| ; v \in \mathcal{L}\left(l_2^{2n}, E\right), \|v\| = 1\right\} \neq 0.$$

Como $\det(u_0) \in \mathbb{K}$ segue que $\det(u_0) = |\det(u_0)| . e^{i\theta_0}$ para algum $\theta_0 \in [0, 2\pi)$. Definindo $u(x) = u_0(x) . e^{-\frac{i\theta_0}{2n}}$ para todo $x \in l_2^{2n}$, temos

$$\begin{aligned}
\det(u) &= \det\left(u_0 . e^{-\frac{i\theta_0}{2n}}\right) \\
&= \left(e^{-\frac{i\theta_0}{2n}}\right)^{2n} \det(u_0) \\
&= e^{-i\theta_0} . |\det(u_0)| . e^{i\theta_0} \\
&= |\det(u_0)|
\end{aligned}$$

como queríamos.

Para estabelecer (1.4) usaremos um argumento de perturbação. Sejam $0 \neq \varepsilon \in \mathbb{K}$ e $v \in \mathcal{L}\left(l_2^{2n}, E\right)$. Então pela escolha de u, temos, para o caso $u + \varepsilon v \neq 0$,

$$\frac{|\det(u + \varepsilon v)|}{\|u + \varepsilon v\|^{2n}} = \left|\det\left(\frac{u + \varepsilon v}{\|u + \varepsilon v\|}\right)\right| \leq \det(u)$$

ou seja,

$$|\det(u + \varepsilon v)| \leq \det(u) \|u + \varepsilon v\|^{2n} \leq \det(u) (\|u\| + |\varepsilon| \|v\|)^{2n} = \det(u) (1 + |\varepsilon| \|v\|)^{2n}. \quad (1.5)$$

Note que (1.5) também vale para o caso $u + \varepsilon v = 0$.

Seja id a identidade em l_2^{2n}. Então, como u é invertível (pois $\det u \neq 0$),

$$\begin{aligned}
|\det(u + \varepsilon v)| &= \left|\det\left(u \circ \left(id + \varepsilon u^{-1} v\right)\right)\right| \quad (1.6) \\
&= \left|\det(u) \det(id + \varepsilon u^{-1} v)\right| = \det(u) \left|\det\left(id + \varepsilon u^{-1} v\right)\right|.
\end{aligned}$$

Mas, por (**A1**),

$$\det\left(id + \varepsilon u^{-1} v\right) = 1 + \varepsilon tr\left(u^{-1} v\right) + c(\varepsilon) \quad (1.7)$$

onde $|c(\varepsilon)| = O\left(|\varepsilon|^2\right)$, isto é,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|c(\varepsilon)|}{\varepsilon} = 0.$$

Logo, por (1.5), (**??**) e (1.7), segue que

$$\begin{aligned}
&\det(u) \left|\det\left(id + \varepsilon u^{-1} v\right)\right| = |\det(u + \varepsilon v)| \leq \det(u) (1 + |\varepsilon| \|v\|)^{2n} \\
&\therefore \left|\det\left(id + \varepsilon u^{-1} v\right)\right| \leq (1 + |\varepsilon| \|v\|)^{2n} \\
&\therefore \left|1 + \varepsilon tr\left(u^{-1} v\right) + c(\varepsilon)\right| \leq (1 + |\varepsilon| \|v\|)^{2n} = 1 + 2n |\varepsilon| \|v\| + O\left(|\varepsilon|^2\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left|1 + \varepsilon tr\left(u^{-1} v\right)\right| - |c(\varepsilon)| \leq \left|1 + \varepsilon tr\left(u^{-1} v\right) + c(\varepsilon)\right| \leq 1 + 2n |\varepsilon| \|v\| + O\left(|\varepsilon|^2\right) \quad (1.8)$$

para todo $0 \neq \varepsilon \in \mathbb{K}$.

Temos $tr\left(u^{-1}v\right) = \left|tr\left(u^{-1}v\right)\right|.e^{i\theta}$ para algum $\theta \in [0, 2\pi)$. Se ε for da forma $|\varepsilon|\, e^{-i\theta} \neq 0$, temos

$$\varepsilon tr\left(u^{-1}v\right) = |\varepsilon|\, e^{-i\theta}\left|tr\left(u^{-1}v\right)\right|.e^{i\theta} = \left|\varepsilon tr\left(u^{-1}v\right)\right|. \tag{1.9}$$

Conseqüentemente, de (1.8) e (1.9) com ε sob a forma $|\varepsilon|\, e^{-i\theta}$, obtemos

$$|\varepsilon|\left|tr\left(u^{-1}v\right)\right| \leq 2n\,|\varepsilon|\,\|v\| + 2O\left(|\varepsilon|^2\right).$$

Logo

$$\left|tr\left(u^{-1}v\right)\right| \leq 2n\,\|v\| + 2O\left(|\varepsilon|\right)$$

e fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos (1.4).

Note que se $P : l_2^{2n} \longrightarrow l_2^{2n}$ a projeção ortogonal de l_2^{2n} num subespaço de l_2^{2n} de dimensão $m \leq 2n$, segue de (**A2**) e (1.4) que

$$m = tr\left(P\right) = tr\left(u^{-1}.uP\right) \leq 2n\,\|uP\|$$

e portanto

$$\|uP\| \geq \frac{m}{2n}. \tag{1.10}$$

Agora vamos selecionar $y_1, ..., y_n$ em E de forma conveniente. O truque é escolher vetores ortogonais $z_1, ..., z_n$ em l_2^{2n} e então considerar o conjunto $y_j = u\left(z_j\right)$ para cada $j = 1, ..., n$.

Como $\|u\| = 1$, então existe um $z_1 \in l_2^{2n}$ tal que $\|z_1\| = 1$ e $\|u\left(z_1\right)\| = 1$. Seja P_1 a projeção ortogonal de l_2^{2n} sobre o complemento ortogonal, $[z_1]^{\perp}$, de z_1. Como $[z_1]^{\perp}$ tem dimensão $2n-1$, segue de (1.10) que $\|uP_1\| \geq \frac{2n-1}{2n}$. Assim, existe $z_2 \in [z_1]^{\perp}$ tal que $\|z_2\| = 1$ e $\|u\left(z_2\right)\| = \|u\left(P_1\left(z_2\right)\right)\| \geq \frac{2n-1}{2n}$. Seja P_2 a projeção ortogonal de l_2^{2n} sobre o complemento ortogonal, $[z_1, z_2]^{\perp}$, de $[z_1, z_2]$. Então $\|uP_2\| \geq \frac{2n-2}{2n}$. Assim, existe $z_3 \in [z_1, z_2]^{\perp}$ tal que $\|z_3\| = 1$ e $\|u\left(z_3\right)\| = \|u\left(P_2\left(z_3\right)\right)\| \geq \frac{2n-2}{2n}$.

Fazendo isso n vezes, obtemos n vetores ortonormais $z_1, ..., z_n$ em l_2^{2n}. E, para $y_j = u\left(z_j\right)$, com $j = 1, ..., n$, tem-se que

$$\|y_j\| = \|u\left(z_j\right)\| \geq \frac{2n-j+1}{2n} \geq \frac{1}{2}$$

e

$$\|y_j\| = \|u\left(z_j\right)\| \leq \|u\| \leq 1.$$

Note também que para quaisquer escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$, temos

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j y_j\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u\left(z_j\right)\right\| &= \left\|u\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j z_j\right)\right\| \\
&\leq \|u\|\left\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j z_j\right\| \\
&= \left(\langle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j z_j, \sum_{k=1}^{n}\alpha_k z_k\rangle\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Teorema 1.2.2 (Dvoretzky-Rogers) *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Então para qualquer escolha de $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ em l_2, existe uma seqüência incondicionalmente somável $(x_n)_{n=1}^{\infty}$em X com $\|x_n\| = |\lambda_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, se escolhermos $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ em $l_2 - l_1$, obtemos uma seqüência incondicionalmente somável que não é absolutamente somável.*

Demonstração. Dada $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ em l_2, escolha uma seqüência $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ em $\mathbb{N}$ tal que $n_1 < n_2 < ...$ e

$$\sum_{n \geq n_k} |\lambda_n|^2 \leq 2^{-2k}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $X_k \subset X$ com $\dim X_k = 2\,(n_{k+1} - n_k)$. Pelo Lema 1.2.1, existem $(n_{k+1} - n_k)$ vetores, que chamaremos de

$$y_{n_k}, y_{n_k+1}, ..., y_{n_{k+1}-1}$$

com normas pertencentes ao intervalo $[1/2, 1]$ e tais que

$$\left\| \sum_{n=n_k}^{N} \alpha_n y_n \right\| \leq \left(\sum_{n=n_k}^{N} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2}$$

para todo inteiro N entre n_k e $n_{k+1} - 1$ e para quaisquer escalares $\alpha_{n_k}, ..., \alpha_N$.

Tome $x_j = \frac{\lambda_j y_j}{\|y_j\|}, j \geq n_1$. É claro que $\|x_n\| = |\lambda_n|$ para todo $n \geq n_1$, e observe que para toda escolha de $\varepsilon_n = \pm 1$, temos, para todo inteiro N entre n_k e $n_{k+1} - 1$, que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=n_k}^{N} \varepsilon_n x_n \right\| = \left\| \sum_{n=n_k}^{N} \frac{\varepsilon_n \lambda_n y_n}{\|y_n\|} \right\| &\leq \left(\sum_{n=n_k}^{N} \frac{|\varepsilon_n|^2 |\lambda_n|^2}{\|y_n\|^2} \right)^{1/2} \qquad (1.11) \\ &\leq 2 \left(\sum_{n=n_k}^{N} |\lambda_n|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 2. \left(2^{-2k} \right)^{1/2} = 2^{-k+1}. \end{aligned}$$

Veja ainda que se $n_k < n < m < n_{k+1}$, fazendo $\alpha_{n_k} = 0, ..., \alpha_{n-1} = 0, \alpha_n = \varepsilon_n, ..., \alpha_m = \varepsilon_m$ temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{l=n}^{m} \varepsilon_l x_l \right\| = \left\| \sum_{l=n_k}^{m} \alpha_l x_l \right\| &= \left\| \sum_{l=n_k}^{m} \frac{\alpha_l \lambda_l y_l}{\|y_l\|} \right\| \\ &\leq \left(\sum_{l=n_k}^{m} \frac{|\alpha_l|^2 |\lambda_l|^2}{\|y_l\|^2} \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \left(\sum_{l=n_k}^{m} |\lambda_l|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 2. \left(2^{-2k} \right)^{1/2} = 2^{-k+1}. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja $k_0 = k_0(\varepsilon)$ tal que $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k+1} < \varepsilon$. Se $m > n > n_{k_0}$, existem um inteiro positivo t e um certo $k \geq k_0$ tais que $n_k \leq n \leq n_{k+1}$ e $n_{k+t} \leq m \leq n_{k+t} - 1$. Assim,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{l=n}^{m}\varepsilon_l x_l\right\| &\leq \left\|\sum_{l=n}^{n_{k+1}-1}\varepsilon_l x_l\right\| + \left\|\sum_{l=n_{k+1}}^{n_{k+2}-1}\varepsilon_l x_l\right\| + ... + \left\|\sum_{l=n_{k+t}}^{m}\varepsilon_l x_l\right\| \\ &\leq 2^{-k+1} + 2^{-(k+1)+1} + ... + 2^{-(k+t)+1} \\ &\leq \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k+1} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Logo $\sum\limits_{n=n_1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ é de Cauchy, para toda escolha de $\varepsilon_n = \pm 1$. Portanto, $\sum\limits_{n=n_1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ converge (para toda escolha de $\varepsilon_n = \pm 1$) e isso implica que $(x_n)_{n=n_1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável (além disso, já sabemos que $\|x_n\| = |\lambda_n|$ para todo $n \geq n_1$). Agora, escolha $x_j \in X$ com $\|x_j\| = |\lambda_j|$ para todo $j = 1, ..., n_1 - 1$. É claro que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ converge, independentemente da escolha de $\varepsilon_n = \pm 1$. Finalmente, concluímos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável e $\|x_n\| = |\lambda_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 1.2.3 (Schur) *Em l_1 uma seqüência converge fracamente se, e somente se, converge na topologia da norma.*

Demonstração. Já é fato conhecido que convergência forte implica em convergência fraca. Agora, suponhamos que a seqüência $\left(\varsigma^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$converge fracamente para zero e, por contradição, suponha que $\left(\varsigma^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ não converge fortemente para zero. Logo, $\left(\varsigma^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ possui uma subseqüência $\left(\zeta^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ tal que, para algum $\varepsilon > 0$, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\zeta_j^{(n)}\right| = \left\|\zeta^{(n)}\right\|_1 \geq 5\varepsilon \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como essa subseqüência converge fracamente para zero, da caracterização do dual do l_1 tem-se que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j\zeta_j^{(n)} = 0 \qquad \text{para todo } \eta = (\eta_j)_{j=1}^{\infty} \in l_\infty. \tag{1.12}$$

Escolhendo, no lugar de η, os elementos e_j, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\zeta_j^{(n)} = 0 \qquad \text{para todo } j \text{ fixo.} \tag{1.13}$$

Defina $m_0 = n_0 = 1$ e, indutivamente, as seqüências estritamente crescentes $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ e $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ da seguinte maneira: n_k é o menor inteiro maior que n_{k-1} de modo que

$$\sum_{j=1}^{m_{k-1}}\left|\zeta_j^{(n_k)}\right| < \varepsilon \tag{1.14}$$

e m_k como o menor inteiro maior do que m_{k-1}, satisfazendo

$$\sum_{j=m_k}^{\infty} \left|\zeta_j^{(n_k)}\right| < \varepsilon. \tag{1.15}$$

Vejamos que realmente é possível construir essas seqüências:

- n_1 é o menor inteiro maior que $n_0 = 1$ tal que

$$\sum_{j=1}^{1} \left|\zeta_j^{(n_1)}\right| < \varepsilon, \text{ isto é, } \left|\zeta_1^{(n_1)}\right| < \varepsilon$$

e por (1.13) garantimos a existência de n_1;

- m_1 é o menor inteiro maior que $m_0 = 1$ tal que

$$\sum_{j=m_1}^{\infty} \left|\zeta_j^{(n_1)}\right| < \varepsilon.$$

É claro que m_1 existe, pois $\left(\zeta_j^{n_1}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_1$.

- Agora, suponha que não exista n_2, o menor inteiro maior que n_1, tal que

$$\sum_{j=1}^{m_1} \left|\zeta_j^{(n_2)}\right| < \varepsilon.$$

Então, para todo $n_2 > n_1$, temos

$$\left|\zeta_1^{(n_2)}\right| + \cdots + \left|\zeta_{m_1}^{(n_2)}\right| \geq \varepsilon.$$

Logo, para algum $j = 1, ..., m_1$, temos

$$\left|\zeta_j^{(n_2)}\right| \geq \frac{\varepsilon}{m_1}.$$

Deste modo, para algum $j \in \{1, ..., m_1\}$, fixo, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_j^{(n)} \neq 0$$

contradizendo (1.13). É claro que sempre existe $m_2 \in \mathbb{N}$ (menor inteiro maior que m_1) tal que

$$\sum_{j=m_2}^{\infty} \left|\zeta_j^{(n_2)}\right| < \varepsilon,$$

pois $\left(\zeta_j^{(n_2)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_1$. E assim sucessivamente.

Seja $(\eta_j)_{j=1}^{\infty} \in l_\infty$ definido da seguinte maneira: para $m_{k-1} < j \leq m_k$, tome

$$\eta_j = \begin{cases} 0 & \text{, se } \zeta_j^{(n_k)} = 0 \\ \dfrac{\zeta_j^{(n_k)}}{\left|\zeta_j^{(n_k)}\right|} & \text{, se } \zeta_j^{(n_k)} \neq 0. \end{cases}$$

Note que $|\eta_j| \leq 1$ para todo j. Logo

$$\begin{aligned}
&5\varepsilon - \left|\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \zeta_j^{(n_k)}\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left|\zeta_j^{(n_k)}\right| - \left|\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \zeta_j^{(n_k)}\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{\infty} \left|\zeta_j^{(n_k)}\right|\right| - \left|\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \zeta_j^{(n_k)}\right| \\
&\leq \left|\sum_{j=1}^{\infty} \left(\left|\zeta_j^{(n_k)}\right| - \eta_j \zeta_j^{(n_k)}\right)\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{m_{k-1}} \left(\left|\zeta_j^{(n_k)}\right| - \eta_j \zeta_j^{(n_k)}\right) + \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \left(\left|\zeta_j^{(n_k)}\right| - \eta_j \zeta_j^{(n_k)}\right) + \sum_{j=m_k+1}^{\infty} \left(\left|\zeta_j^{(n_k)}\right| - \eta_j \zeta_j^{(n_k)}\right)\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{m_{k-1}} \left(\left|\zeta_j^{(n_k)}\right| - \eta_j \zeta_j^{(n_k)}\right) + \sum_{j=m_k+1}^{\infty} \left(\left|\zeta_j^{(n_k)}\right| - \eta_j \zeta_j^{(n_k)}\right)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m_{k-1}} \left(\left|\zeta_j^{(n_k)}\right| + \left|\eta_j \zeta_j^{(n_k)}\right|\right) + \sum_{j=m_k+1}^{\infty} \left(\left|\zeta_j^{(n_k)}\right| + \left|\eta_j \zeta_j^{(n_k)}\right|\right) \\
&\leq 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \zeta_j^{(n_k)}\right| \geq \varepsilon,$$

e isso contradiz (1.12) ∎

Definição 1.2.4 *Uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ num espaço de Banach X é fracamente subsérie somável se, para qualquer seqüência estritamente crescente $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ de inteiros positivos, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ converge fracamente.*

Teorema 1.2.5 (Orlicz-Pettis) *Em um espaço de Banach X, uma seqüência é fracamente subsérie somável se, e somente se, é subsérie somável.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) É claro, pois convergência forte implica em covergência fraca.

($\Rightarrow$) Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência fracamente subsérie somável num espaço de Banach X. Como estamos tratando com limites de somas de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, basta trabalharmos com $X_0 = \overline{\langle x_1, x_2, ... \rangle}^{w} \overset{(\mathbf{A7})}{=} \overline{\langle x_1, x_2, ... \rangle}$ que é um subespaço fechado e separável em X.

Defina o operador

$$
\begin{gathered}
v : X_0^{'} \longrightarrow l_1 \\
v(g) = (g(x_n))_{n=1}^{\infty}.
\end{gathered}
$$

Vamos provar que v está bem definido, é linear e contínuo. Depois, veremos ainda que v é compacto.

Sendo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência fracamente subsérie somável, então $w - \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{k_j}$ existe, para toda seqüência estritamente crescente $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ de inteiros positivos. Segue que

$$
\lim_{n\to\infty} g\left(\sum_{j=1}^{n} x_{k_j}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} g\left(x_{k_j}\right)
$$

existe, para toda $g \in X_0^{'}$. Logo $(g(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência subsérie somável em $\mathbb{K}$ e, portanto, é incondicionalmente somável em $\mathbb{K}$. Com isso, $(g(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é absolutamente somável. Sendo assim, v está bem definido. Facilmente vemos que v é linear. Agora, nos resta mostrar que v é limitado.

Para isso, vamos provar que o gráfico de v é fechado e usar o Teorema do Gráfico Fechado. Sejam $g_j \in X_0^{'}$ e $y \in l_1$, tais que $g_j \to g \in X_0^{'}$ e $v(g_j) \to y$. Queremos mostrar que $v(g) = y$.

Como $v(g_j) = (g_j(x_n))_{n=1}^{\infty} \to y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$
j \geq N_0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |g_j(x_n) - y_n| = \|v(g_j) - y\| < \varepsilon
$$

Logo, para quaisquer $l \in \mathbb{N}$ e $j \geq N_0$, temos

$$
|g_j(x_l) - y_l| < \varepsilon,
$$

ou seja, para todo $l \in \mathbb{N}$

$$
\lim_{j\to\infty} g_j(x_l) = y_l. \tag{1.16}
$$

Como $g_j \to g \in X_0^{'}$, então, para todo $l \in \mathbb{N}$, temos

$$
\lim_{j\to\infty} g_j(x_l) = g(x_l). \tag{1.17}
$$

De (1.16) e (1.17), segue que $y_l = g(x_l)$ para todo $l \in \mathbb{N}$, e daí

$$
y = (y_n)_{n=1}^{\infty} = (g(x_n))_{n=1}^{\infty} = v(g).
$$

Portanto, o gráfico de v é fechado. E, pelo Teorema do Gráfico Fechado, v é limitado.

Para mostrar que v é compacto, iniciaremos com uma seqüência $\left(x_n'\right)_{n=1}^{\infty}$ em $B_{X_0'}$. Como X_0 é separável, temos que $B_{X_0'}$ é compacto e metrizável na topologia fraca estrela. Isso nos permite extrair uma subseqüência $\left(x_{m_k}'\right)_{k=1}^{\infty}$ de $\left(x_n'\right)_{n=1}^{\infty}$ que converge para um certo $x_0' \in B_{X_0'}$ na topologia fraca estrela. Se mostrarmos que $v\left(x_0'\right) = \lim_{k\to\infty} v\left(x_{m_k}'\right)$ (na topologia da norma), estabelecemos a compacidade de v. Mas, como v assume valores em l_1, pelo Teorema de Schur, basta mostrar que $v\left(x_{m_k}'\right) \xrightarrow{w} v\left(x_0'\right)$. Para isso, basta provar que

$$\lim_{k\to\infty} f\left(v\left(x_{m_k}'\right)\right) = f\left(v\left(x_0'\right)\right) \tag{1.18}$$

para todo $f \in A$, com A denso de l_∞ (na norma). De fato, se A é um subconjunto denso (na norma) de l_∞ tal que vale (1.18) para todo $f \in A$, então (1.18) vale para todo $f \in l_\infty$. Com efeito, dados $f \in l_\infty$ e $\varepsilon > 0$, existe $f_0 \in A$ tal que $\|f - f_0\| < \varepsilon$. Logo

$$\begin{aligned}
&\left\|f\left(v\left(x_{m_k}'\right)\right) - f\left(v\left(x_0'\right)\right)\right\| \\
&\leq \left\|f\left(v\left(x_{m_k}'\right)\right) - f_0\left(v\left(x_{m_k}'\right)\right)\right\| + \left\|f_0\left(v\left(x_{m_k}'\right)\right) - f_0\left(v\left(x_0'\right)\right)\right\| + \\
&+ \left\|f_0\left(v\left(x_0'\right)\right) - f\left(v\left(x_0'\right)\right)\right\| \\
&\leq \|f - f_0\| \left\|v\left(x_{m_k}'\right)\right\| + \left\|f_0\left(v\left(x_{m_k}'\right)\right) - f_0\left(v\left(x_0'\right)\right)\right\| + \|f - f_0\| \left\|v\left(x_0'\right)\right\| \\
&\leq \varepsilon \left\|v\left(x_{m_k}'\right)\right\| + \left\|f_0\left(v\left(x_{m_k}'\right)\right) - f_0\left(v\left(x_0'\right)\right)\right\| + \varepsilon \left\|v\left(x_0'\right)\right\|.
\end{aligned}$$

Mas, por hipótese, (1.18) vale para $f_0 \in A$ e então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > k_0 \Rightarrow \left\|f_0\left(v\left(x_{m_k}'\right)\right) - f_0\left(v\left(x_0'\right)\right)\right\| < \varepsilon.$$

Como v é limtado e $\left(x_{m_k}'\right)_{k=1}^{\infty}$ está em $B_{X_0'}$, segue que

$$k > k_0 \Longrightarrow \left\|f\left(v\left(x_{m_k}'\right)\right) - f\left(v\left(x_0'\right)\right)\right\| < \varepsilon \|v\| \left\|x_{m_k}'\right\| + \varepsilon + \varepsilon \left\|v\left(x_0'\right)\right\| = c\varepsilon,$$

onde c é uma constante positiva. Logo, basta verificar (1.18) para todo $f \in A$, com A denso de l_∞ (na norma).

Note que as funções simples formam um tal subconjunto denso (na norma) de l_∞ (veja (**A5**) para a definição de função simples e demonstração do resultado). Assim, a linearidade nos permite restringir a verificação de (1.18) para uma coleção de funções características $f = 1_M$ de subconjuntos M de $\mathbb{N}$.

Então, devemos verificar que

$$1_M\left(v\left(x_0'\right)\right) = \lim_{k\to\infty} 1_M\left(v\left(x_{m_k}'\right)\right).$$

Note que

$$f\left(v\left(x_0'\right)\right) = 1_M\left(v\left(x_0'\right)\right) = \sum_{n\in M} \left(v\left(x_0'\right)\right)_n = \sum_{n\in M} x_0'\left(x_n\right).$$

- Se M é finito, temos

$$\begin{aligned} f\left(v\left(x_0'\right)\right) &= \sum_{n\in M} x_0'\left(x_n\right) = x_0'\left(\sum_{n\in M} x_n\right) = \lim_{k\to\infty} x_{m_k}'\left(\sum_{n\in M} x_n\right) \\ &= \lim_{k\to\infty}\sum_{n\in M} x_{m_k}'\left(x_n\right) = \lim_{k\to\infty} f\left(v\left(x_{m_k}'\right)\right). \end{aligned}$$

- Se M é infinito, considere $M = \{n_1, n_2, ...\}$ com a ordem usual dos naturais.

Seja $l = w - \lim\limits_{r\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{r} x_{n_j}$. Temos

$$\begin{aligned} f\left(v\left(x_0'\right)\right) &= \sum_{n\in M} x_0'\left(x_n\right) = \lim_{r\to\infty}\sum_{j=1}^{r} x_0'\left(x_{n_j}\right) = \lim_{r\to\infty} x_0'\left(\sum_{j=1}^{r} x_{n_j}\right) = x_0'\left(l\right) = \lim_{k\to\infty} x_{m_k}'\left(l\right) \\ &= \lim_{k\to\infty}\left(\lim_{r\to\infty} x_{m_k}'\left(\sum_{j=1}^{r} x_{n_j}\right)\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\lim_{r\to\infty}\sum_{j=1}^{r} x_{m_k}'\left(x_{n_j}\right)\right) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n\in M} x_{m_k}'\left(x_n\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} f\left(v\left(x_{m_k}'\right)\right). \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que $v\left(x_{m_k}'\right) \xrightarrow{w} v\left(x_0'\right)$. Logo v é compacto.

Para completar a demonstração do teorema, basta observar que, como $v\left(B_{X_0'}\right)$ é relativamente compacto em l_1, dado $\varepsilon > 0$, existe um $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, para todo subconjunto finito M de $\mathbb{N}$ com $\min M > n_\varepsilon$ temos

$$\left\|\sum_{n\in M} x_n\right\| = \sup_{\|g\|\le 1}\left|g\left(\sum_{n\in M} x_n\right)\right| \le \sup_{\|g\|\le 1}\sum_{n\in M}\left|g\left(x_n\right)\right| \overset{(\mathbf{A6})}{\le} \varepsilon,$$

uma vez que $\left(g\left(x_n\right)\right)_{n=1}^{\infty} = v\left(g\right) \in v\left(B_{X_0'}\right)$. Concluímos, usando (ii) do Teorema 1.1.2, que $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência subsérie somável. ■

1.3 A Desigualdade de Khinchin

As funções de Rademacher são definidas como dadas por

$$\begin{aligned} r_n &: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \\ r_n\left(t\right) &:= sign\left(\sin 2^n \pi t\right). \end{aligned}$$

Essas funções formam uma seqüência de variáveis aleatórias independentes (para detalhes sobre variáveis aleatórias e teoria da medida, sugerimos [3]). O fato mais importante das funções de Rademacher é que elas têm a seguinte propriedade de ortogonalidade: Se $0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ e $p_1, ..., p_k \geq 0$ são inteiros, então

$$\int_0^1 r_{n_1}^{p_1}(t) \cdot \ldots \cdot r_{n_k}^{p_k}(t)\, dt = \begin{cases} 1, & \text{se cada } p_j \text{ é par} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Uma conseqüência imediata é que as r_n formam seqüência ortonormal em $L_2[0,1]$, e assim

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \tag{1.19}$$

para todo $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2$. De fato, considere a seqüência $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k r_k$ e, para $n > m$, temos

$$\begin{aligned}
\|S_n - S_m\|_{L_2[0,1]}^2 &= \left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k r_k \right\|_{L_2[0,1]}^2 = \int_0^1 \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k r_k(t) \right|^2 dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=m+1}^{n} a_i r_i(t) \right) \overline{\left(\sum_{j=m+1}^{n} a_j r_j(t) \right)} dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=m+1}^{n} a_i r_i(t) \right) \left(\sum_{j=m+1}^{n} \overline{a_j} r_j(t) \right) dt \\
&= \sum_{i,j=m+1}^{n} a_i \overline{a_j} \int_0^1 r_i(t) r_j(t)\, dt \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 \int_0^1 r_k^2(t)\, dt + \sum_{\substack{i,j=m+1 \\ i \neq j}}^{n} a_i \overline{a_j} \int_0^1 r_i r_j(t)\, dt \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 .
\end{aligned}$$

Como $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2$, segue que $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em $L_2[0,1]$, e portanto $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é convergente. O argumento usado acima e o fato de $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ ser convergente garantem que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \right\|_{L_2[0,1]}^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right\|_{L_2[0,1]}^2 = \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^2 dt,$$

como queríamos.

O principal resultado, no nosso contexto, sobre as funções de Rademacher é a Desigualdade de Khinchin.

Teorema 1.3.1 (Desigualdade de Khinchin) *Para todo $0 < p < \infty$, existem constantes A_p e B_p tais que, para toda seqüência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ em l_2, temos*

$$A_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Demonstração. Provaremos primeiro para $p = 4$. Vamos primeiro provar a Desigualdade de Khinchin para uma seqüência finita $(a_1, a_2, ..., a_m)$ de escalares. Então

$$\int_0^1 \left|\sum_{n\leq m} a_n r_n(t)\right|^4 dt = \int_0^1 \left(\sum_{i\leq m} a_i r_i(t)\right) \overline{\left(\sum_{j\leq m} a_j r_j(t)\right)} \left(\sum_{k\leq m} a_k r_k(t)\right) \overline{\left(\sum_{l\leq m} a_l r_l(t)\right)} dt \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j,k,l\leq m} a_i\overline{a_j}a_k\overline{a_l} \int_0^1 r_i(t) r_j(t) r_k(t) r_l(t)\, dt \\
&= \sum_{\substack{i=j\\k=l}} a_i\overline{a_j}a_l\overline{a_k} + \sum_{\substack{i=k\\j=l}} a_i\overline{a_j}a_l\overline{a_k} + \sum_{\substack{i=l\\j=k}} a_i\overline{a_j}a_l\overline{a_k} - 2\sum_{i\leq m} |a_i|^4 \\
&= 2\sum_{i,j\leq m} |a_i|^2 |a_j|^2 + \sum_{i,j\leq m} a_i^2\overline{a_j}^2 - 2\sum_{i\leq m} |a_i|^4 \\
&\leq 2\left(\sum_{i\leq m} |a_i|^2\right)\left(\sum_{j\leq m} |a_j|^2\right) + \left(\sum_{i\leq m} a_i^2\right)\overline{\left(\sum_{j\leq m} a_j^2\right)} \\
&= 2\left(\sum_{n\leq m} |a_n|^2\right)^2 + \left|\sum_{n\leq m} a_n^2\right|^2 \\
&\leq 2\left(\sum_{n\leq m} |a_n|^2\right)^2 + \left(\sum_{n\leq m} |a_n|^2\right)^2 \\
&= 3\left(\sum_{n\leq m} |a_n|^2\right)^2,
\end{aligned}$$

pois as r_n têm a propriedade da ortogonalidade. Assim, da monotonicidade das normas de $L_p[0,1]$ e de (1.20), temos

$$\left(\sum_{n\leq m} |a_n|^2\right)^2 = \left(\int_0^1 \left|\sum_{n\leq m} a_n r_n(t)\right|^2 dt\right)^2 \leq \int_0^1 \left|\sum_{n\leq m} a_n r_n(t)\right|^4 dt \leq 3\left(\sum_{n\leq m} |a_n|^2\right)^2$$

e conseqüentemente

$$\left(\sum_{n\leq m} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{n\leq m} a_n r_n(t)\right|^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \leq 3^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{n\leq m} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.21}$$

Agora, considere a seqüência $S_n = \sum_{k=1}^n a_k r_k$ e, para $n > m$, temos

$$\|S_n - S_m\|_{L_4[0,1]} = \left(\int_0^1 \left|\sum_{k=m+1}^n a_k r_k(t)\right|^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \overset{(1.21)}{\leq} 3^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{k=m+1}^n |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.22}$$

Como $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2$, segue que $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em $L_4\,[0,1]$ e, portanto, $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é convergente.

Fazendo $m \to \infty$ em (1.21), obtemos

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n\,(t)\right|^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \leq 3^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.23}$$

Com isso, $B_4 \leq 3^{\frac{1}{4}}$ e $A_4 \geq 1$. Mas, facilmente, vemos que $A_4 = 1$; basta só considerar $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0, ...$ em

$$A_4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n\,(t)\right|^4 dt\right)^{\frac{1}{4}}$$

e daí segue que

$$A_4 \cdot 1 \leq 1.$$

Começaremos a provar, agora, a Desigualdade de Khinchin para p qualquer e para o caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Se $p \in \mathbb{N}$, note que

$$|y|^p \leq p! \left(1 + \frac{|y|^p}{p!}\right) \leq p! e^{|y|}.$$

Assim, se tomarmos

$$f\,(t) = \sum_{n \leq m} a_n r_n\,(t)\,,$$

teremos que

$$\int_0^1 |f\,(t)|^p\,dt \leq p! \int_0^1 e^{|f(t)|} dt \leq p! \int_0^1 \left(e^{f(t)} + e^{-f(t)}\right) dt.$$

Considere

$$g\,(t) = \frac{f\,(t)}{\|f\|_2} = \sum_{n \leq m} b_n r_n\,(t)\,,$$

com $b_n = \frac{a_n}{\|f\|_2}$ (é claro que $\|g\|_2 = 1$). Note que

$$\int_0^1 e^{g(t)} dt = \int_0^1 e^{\sum_{n \leq m} b_n r_n(t)} dt = \int_0^1 \prod_{n \leq m} e^{b_n r_n(t)} dt.$$

Como as funções de Rademacher são variáveis aleatórias independentes, usando [3, Theorem 5.2.3 e Theorem 5.3.1], podemos transformar a integral em produto de integrais. Sejam $B_n = \{t \in [0,1]\,; r_n\,(t) = 1\}$. Logo

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{g(t)} dt &= \prod_{n \leq m} \int_0^1 e^{b_n r_n(t)} dt = \prod_{n \leq m} \left(\int_{B_n} e^{b_n} + \int_{[0,1] \setminus B_n} e^{-b_n}\right) dt \\ &= \prod_{n \leq m} \left(\frac{e^{b_n}}{2} + \frac{e^{-b_n}}{2}\right) = \prod_{n \leq m} \cosh\,(b_n)\,.\end{aligned}$$

Usando o critério de comparação para as séries

$$\begin{cases} \cosh(x) = \sum_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_n \frac{x^{2n}}{n!2^n} \end{cases} \quad \text{(sabendo que } (2n)! \geq n!2^n\text{)},$$

segue que

$$\int_0^1 e^{g(t)}dt \leq \prod_{n\leq m} e^{\left(\frac{b_n^2}{2}\right)} = e^{\left(\sum_{n\leq m}\frac{b_n^2}{2}\right)} = e^{\frac{1}{2}}.$$

Analogamente,

$$\int_0^1 e^{-g(t)}dt \leq e^{\frac{1}{2}},$$

e conseqüentemente

$$\int_0^1 |g(t)|^p\, dt \leq p! \int_0^1 e^{|g(t)|}dt \leq p! \int_0^1 \left(e^{g(t)} + e^{-g(t)}\right) dt \leq 2p!e^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, para $2 \leq p < \infty$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, segue, da monotonicidade das normas do $L_p[0,1]$, que

$$\begin{aligned} 1 = \left(\sum_{n\leq m} |b_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left\|\sum_{n\leq m} b_n r_n\right\|_2 \leq \left\|\sum_{n\leq m} b_n r_n\right\|_p &\leq \left\|\sum_{n\leq m} b_n r_n\right\|_k \\ &= \left(\int_0^1 |g(t)|^k\, dt\right)^{\frac{1}{k}} \\ &\leq \left(2k!e^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

onde k é o menor inteiro maior ou igual a p. Daí, lembrando que $b_n = \frac{a_n}{\|f\|_2}$, temos

$$\|f\|_2 \leq \left\|\sum_{n\leq m} a_n r_n\right\|_p \leq \left(2k!e^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{k}} \|f\|_2\,,$$

ou seja,

$$\left(\sum_{n\leq m} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\sum_{n\leq m} a_n r_n\right\|_p \leq \left(2k!e^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{n\leq m} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como $(a_n) \in l_2$, usando argumentos semelhantes aos usados em (1.22), temos que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k r_k$$

converge. Logo, fazendo $m \to \infty$ obtemos

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(2k!e^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

No caso complexo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $2 \leq p < \infty$, para

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = (b_n)_{n=1}^{\infty} + i\,(c_n)_{n=1}^{\infty}$$

em l_2, ficamos com

$$f(t) = \sum_{n \leq m} a_n r_n(t) = \sum_{n \leq m} b_n r_n(t) + i \sum_{n \leq m} c_n r_n(t).$$

Logo, para as funções reais

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(f(t)) = \sum_{n \leq m} b_n r_n(t) \\ \operatorname{Im}(f(t)) = \sum_{n \leq m} c_n r_n(t), \end{cases}$$

segue, do que já foi provado e de (1.19), que

$$\|\operatorname{Re}(f)\|_p \leq C_p \left(\sum_{n \leq m} |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C_p \|\operatorname{Re}(f)\|_2 \quad \text{e}$$

$$\|\operatorname{Im}(f)\|_p \leq C_p \left(\sum_{n \leq m} |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C_p \|\operatorname{Im}(f)\|_2 .$$

Portanto

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n \leq m} a_n r_n \right\|_p &= \|f\|_p \leq \|\operatorname{Re}(f)\|_p + \|\operatorname{Im}(f)\|_p \\ &\leq C_p \|\operatorname{Re}(f)\|_2 + C_p \|\operatorname{Im}(f)\|_2 \\ &\leq 2C_p \|f\|_2 . \end{aligned}$$

Usando novamente os mesmos argumentos usados em (1.22) garantimos que $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k r_k$ converge. Logo, fazendo $m \to \infty$ e usando a monotonicidade das normas em $L_p[0,1]$, obtemos

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Agora analisemos o caso em que $0 < p < 2$ e, para tanto, usaremos a Desigualdade de Hölder. Defina $0 < \theta < 1$ por

$$\theta = \left(2 - \frac{p}{2} \right)^{-1} .$$

Assim,

$$p\theta + 4(1 - \theta) = 2$$

e

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(t)|^2\,dt &= \int_0^1 |f(t)|^{p\theta}\,|f(t)|^{4(1-\theta)}\,dt \\
&\overset{Hölder}{\leq} \left(\int_0^1 \left[|f(t)|^{p\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}}\right)^{\theta}\cdot\left(\int_0^1 \left[|f(t)|^{4(1-\theta)}\right]^{\frac{1}{1-\theta}}\right)^{1-\theta} \\
&= \left(\int_0^1 |f(t)|^p\right)^{\theta}\cdot\left(\int_0^1 |f(t)|^4\right)^{1-\theta} \\
&= \left[\left(\int_0^1 |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{p\theta}\cdot\left[\left(\int_0^1 |f(t)|^4\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{4(1-\theta)}.
\end{aligned}$$

Da Desigualdade de Khinchin para $p=4$, sabemos que $\|f\|_4 \leq B_4\|f\|_2$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
&\|f\|_2^2 \leq \|f\|_p^{p\theta}\cdot(B_4\|f\|_2)^{4(1-\theta)} \\
&\quad\Rightarrow B_4^{-4(1-\theta)}\cdot\|f\|_2^{2-4(1-\theta)} \leq \|f\|_p^{p\theta} \\
&\quad\Rightarrow B_4^{-4(1-\theta)}\cdot\|f\|_2^{p\theta} \leq \|f\|_p^{p\theta} \\
&\quad\Rightarrow B_4^{4(\theta-1)}\cdot\|f\|_2^{p\theta} \leq \|f\|_p^{p\theta} \\
&\quad\Rightarrow B_4^{\frac{4(\theta-1)}{p\theta}}\cdot\|f\|_2 \leq \|f\|_p.
\end{aligned}$$

Note que $\frac{4(\theta-1)}{p\theta} = 2-\frac{4}{p}$. Com efeito,

$$\frac{4}{p}\left(\frac{\theta-1}{\theta}\right) = \frac{4}{p}\left(1-\frac{1}{\theta}\right) = \frac{4}{p}\left[1-\left(2-\frac{p}{2}\right)\right] = \frac{4}{p}\left(\frac{p}{2}-1\right) = 2-\frac{4}{p}.$$

Portanto,

$$B_4^{2-\frac{4}{p}}\cdot\|f\|_2 \leq \|f\|_p.$$

Por outro lado, da motonocidade das normas do $L_p[0,1]$, temos que $\|f\|_p \leq \|f\|_2$. Logo

$$B_4^{2-\frac{4}{p}}\cdot\|f\|_2 \leq \|f\|_p \leq \|f\|_2,$$

isto é,

$$B_4^{2-\frac{4}{p}}\cdot\left\|\sum_{n\leq m} a_n r_n(t)\right\|_2 \leq \left\|\sum_{n\leq m} a_n r_n(t)\right\|_p \leq \left\|\sum_{n\leq m} a_n r_n(t)\right\|_2$$

e, mais um vez, com os argumentos usados em (1.22), fazendo $m\to\infty$, obtemos

$$B_4^{2-\frac{4}{p}}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

■

O próximo resultado é devido a Orlicz (1933) e pode ser, de certa forma, considerado como o precursor de resultados bem mais gerais da geometria dos espaços de Banach.

Teorema 1.3.2 *Se* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uma seqüência incondicionalmente somável em* $L_1[0,1]$*, então* $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1^2 < \infty$.

Demonstração. Primeiro vamos demostrar o teorema para funções que assumem valores reais. Como $L_1[0,1]$ é separável, pela demonstração do Teorema de Orlicz-Pettis, sabemos que $v : L_\infty[0,1] \longrightarrow l_1$ dado por

$$v(g) = (g(f_n))_{n=1}^{\infty}$$

é um operador linear compacto (note que, como $(f_n)_n$ é incondicionalmente somável, então $(g(f_n))_n$ é incondicionalmente somável em $\mathbb{R}$, e portanto está em l_1). Como $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é sinal somável, temos, para toda seqüência de sinais $\varepsilon_n = \pm 1$,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n \right\|_1 &= \sup_{g \in B_{L_\infty[0,1]}} \left| g\left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n \right) \right| = \sup_{g \in B_{L_\infty[0,1]}} \left| g\left(\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n f_n \right) \right| \\
&= \sup_{g \in B_{L_\infty[0,1]}} \left| \lim_{k\to\infty} g\left(\sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n f_n \right) \right| = \sup_{g \in B_{L_\infty[0,1]}} \left| \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n g(f_n) \right) \right| \\
&= \sup_{g \in B_{L_\infty[0,1]}} \lim_{k\to\infty} \left| \sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n g(f_n) \right| \\
&\leq \sup_{g \in B_{L_\infty[0,1]}} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |g(f_n)| = \sup_{g \in B_{L_\infty[0,1]}} \sum_{n=1}^{\infty} |g(f_n)| = \sup_{g \in B_{L_\infty[0,1]}} \|v(g)\| = \|v\|.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Note que para quaisquer $b_1, ..., b_m > 0$, pela Desigualdade de Hölder temos que

$$\sum_{n=1}^{m} |f_n(s)| b_n \leq \left(\sum_{n=1}^{m} |f_n(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{m} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Integrando termo a termo temos

$$\sum_{n=1}^{m} \int_0^1 |f_n(s)| b_n ds \leq \left(\sum_{n=1}^{m} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{m} |f_n(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ds.$$

Em particular, escolhendo $b_n = \int_0^1 |f_n(s)| ds$ temos

$$\sum_{n=1}^{m} b_n^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{m} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{m} |f_n(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ds.$$

Portanto,

$$\left(\sum_{n=1}^{m} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{m} |f_n(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ds$$

e

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \left(\int_0^1 |f_n(s)| ds \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{m} |f_n(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ds. \tag{1.25}$$

Agora, para todo $m \in \mathbb{N}$, podemos usar a Desigualdade de Khinchin e deduzir que

$$A_1 \left(\sum_{n=1}^{m} |f_n(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{m} f_n(s) r_n(t) \right| dt$$

e conseqüentemente

$$\left(\sum_{n=1}^{m} |f_n(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq A_1^{-1} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{m} f_n(s) r_n(t) \right| dt.$$

Integrando em relação a s temos

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{m} |f_n(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ds \leq A_1^{-1} \int_0^1 \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{m} f_n(s) r_n(t) \right| dt \right) ds.$$

Pela linearidade da integral (ou usando o Teorema de Fubini) trocamos a ordem de integração na expressão anterior e obtemos

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{m} |f_n(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ds \leq A_1^{-1} \int_0^1 \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{m} f_n(s) r_n(t) \right| ds \right) dt$$

e

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{m} |f_n(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ds \leq A_1^{-1} \int_0^1 \left\| \sum_{n=1}^{m} f_n r_n(t) \right\|_1 dt.$$

Logo

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \|f_n\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \overset{(1.25)}{\leq} \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{m} |f_n(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ds \leq A_1^{-1} \int_0^1 \left\| \sum_{n=1}^{m} f_n r_n(t) \right\|_1 dt. \tag{1.26}$$

Como $r_n(t) = \pm 1$ para todo t fora do conjunto $\{k \cdot 2^{-n} : 0 \leq k \leq 2^n \text{ e } k, n \in \mathbb{N}\}$, segue, de (1.24) e (1.26), que

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \|f_n\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq A_1^{-1} \|v\|, \text{ ou ainda,}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \|f_n\|_1^2 \right) \leq A_1^{-2} \|v\|^2.$$

Então, $S_m = \sum_{n=1}^{m} \|f_n\|_1^2$ é crescente e limitada em $\mathbb{R}$, logo é convergente, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1^2 = \lim_{m \to \infty} S_m$$

existe (e é finito), como queríamos. Já para o caso complexo, considere $f_n = p_n + iq_n$ onde p_n, q_n são funções reais. Como $f_n \in L_1[0,1]$ então $p_n,\ q_n \in L_1[0,1]$. De fato, p_n e q_n são mensuráveis e

$$
\begin{aligned}
|p_n(s)| &\leq \sqrt{p_n^2(s) + q_n^2(s)} = |f_n(s)| \\
|q_n(s)| &\leq \sqrt{p_n^2(s) + q_n^2(s)} = |f_n(s)| .
\end{aligned}
$$

Logo, integrando, temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 |p_n(s)|\, ds &\leq \int_0^1 |f_n(s)|\, ds < \infty \\
\int_0^1 |q_n(s)|\, ds &\leq \int_0^1 |f_n(s)|\, ds < \infty.
\end{aligned}
$$

Agora, considerando a seqüência $S_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k p_k$, com $\varepsilon_k = \pm 1$, temos que

$$
\begin{aligned}
n > m \Rightarrow \|S_n - S_m\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k p_k \right\|_1 \\
&\leq \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k p_k + i \left(\sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k q_k \right) \right\|_1 \\
&= \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k (p_k + i q_k) \right\|_1 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k f_k \right\|_1 .
\end{aligned}
$$

Como $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência incondicionalmente somável em $L_1[0,1]$, segue que $T_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k f_k$ é de Cauchy. Logo $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy e, portanto, convergente. Portanto $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ é sinal somável em $L_1[0,1]$. Pelo Teorema 1.1.2, segue que $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável em $L_1[0,1]$. Da mesma forma, $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável em $L_1[0,1]$.

Pelo caso real, segue que

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \|p_n\|_1^2 < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|q_n\|_1^2 < \infty. \tag{1.27}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \|f_n\|_1^2 &= \sum_{n=1}^{m} \|p_n + i q_n\|_1^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{m} \left(\|p_n\|_1 + \|q_n\|_1 \right)^2 \\
&= \sum_{n=1}^{m} \left(\|p_n\|_1^2 + 2 \|p_n\|_1 \|q_n\|_1 + \|q_n\|_1^2 \right) \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \sum_{n=1}^{m} \|p_n\|_1^2 + 2 \left(\sum_{n=1}^{m} \|p_n\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{m} \|q_n\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{m} \|q_n\|_1^2 .
\end{aligned}
$$

Fazendo $m \to \infty$, temos, por (1.27), que $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1^2$ converge. ∎

Definição 1.3.3 *Em $L_p[0,1]$, definimos o subespaço*

$$Rad_p = \overline{< r_1, r_2, ... >},$$

isto é, Rad_p é o subespaço de $L_p[0,1]$ definido pelo fecho do subespaço gerado pelas funções de Rademacher.

É importante perceber que a seqüência das funções de Rademacher $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder para Rad_p. Para isso, precisamos de alguma terminologia e resultados auxiliares.

Definição 1.3.4 *Uma seqüência $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach E é dita seqüência básica se ela for uma base de Schauder para $\overline{< e_1, e_2, ... >}$.*

Usando a terminologia da definição anterior, queremos, precisamente, garantir que $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência básica para Rad_p. Para isso, o seguinte resultado é fundamental (para uma demonstração, veja [1, Proposition 1.1.9]):

Teorema 1.3.5 (Critério de Grunblum) *Uma seqüência $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ de vetores não nulos em um espaço de Banach E é básica se, e somente se, existe uma constante positiva K tal que*

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a_k e_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| \tag{1.28}$$

para toda seqüência de escalares (a_k) e quaisquer inteiros m, n, com $m \leq n$.

O Princípio da Contração (veja [16, 12.2]) garante que, se $1 \leq p < \infty$, a seqüência $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfaz (1.28) e, portanto, $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência básica de Rad_p. Assim, todo vetor de Rad_p é expresso, de modo único, sob a forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k.$$

Uma conseqüência da Desigualdade de Khinchin é que, para $1 \leq p < \infty$, Rad_p é isomorfo a l_2, como veremos a seguir.

Teorema 1.3.6 *Para $1 \leq p < \infty$, Rad_p é isomorfo ao l_2.*

Demonstração. Seja $f : l_2 \longrightarrow Rad_p$ definida por $f\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_n a_n r_n$. Note que a Desigualdade de Khinchin garante que f está bem definida e também garante que se $\sum_n a_n r_n \in Rad_p$, então $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2$. Logo f é sobrejetiva. Por definição, temos que f é linear. Note que f é injetiva, pois

$$f\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\right) = f\left((b_n)_{n=1}^{\infty}\right) \Rightarrow \sum_n a_n r_n = \sum_n b_n r_n,$$

e como $\{r_j; j \in \mathbb{N}\}$ é uma base de Schauder de Rad_p, segue que $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Pela Desigualdade de Khinchin, existem constantes A_p e B_p tais que

$$A_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right\|_p \leq B_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

e concluimos que f e f^{-1}são contínuas. ■

Capítulo 2

Operadores lineares absolutamente $(p; q)$-somantes

2.1 Operadores absolutamente somantes

A teoria de operadores absolutamente somantes foi inspirada nos trabalhos de Alexandre Grothendieck na década de 50. Mas foi somente em 1967 que Albrecht Pietsch, trabalhando de forma independente com estes tipos de operadores, estabeleceu muitas de suas propriedades. A partir de então outros matemáticos voltaram-se a estudar esta teoria, contribuindo para seu rápido desenvolvimento. Dentre os vários trabalhos da década de 60 e 70 relacionados ao tema, podemos destacar o memorável trabalho de Joram Lindenstrauss e Aleksander Pełczyński [24] publicado em 1968, que contém muitos resultados (hoje clássicos) da teoria, e que, ainda hoje, inspiram novos trabalhos e ajudam a delinear a direção que futuras pesquisas devem seguir.

O resultado central da teoria de operadores absolutamente somantes é o Teorema de Grothendieck (que demonstraremos na próxima seção), que afirma que todo operador linear de l_1 em l_2 é absolutamente somante.

2.2 A Desigualdade e o Teorema de Grothendieck

2.2.1 A Desigualdade de Grothendieck

Teorema 2.2.1 (Desigualdade de Grothendieck) *Existe uma constante positiva K_G tal que, para todo espaço de Hilbert H, todo $n \in \mathbb{N}$, toda matriz $(a_{ij})_{n\times n}$ e quaisquer $x_1, ..., x_n$, $y_1, ..., y_n$ na bola unitária de H, vale a seguinte desigualdade:*

$$\left| \sum_{i,j} a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \right| \leq K_G \sup \left\{ \left| \sum_{i,j} a_{ij} s_i t_j \right| : |s_i|, |t_j| \leq 1 \right\}. \tag{2.1}$$

Demonstração. Primeiro provaremos o caso real. Para isso, assumiremos que x_i, y_i, com $i = 1, ..., n$, estão em um espaço de Hilbert de dimensão n. Como todos os espaços de Hilbert de mesma dimensão são isometricamente isomorfos, ficamos livres para escolher qualquer espaço de Hilbert de dimensão n. Tomemos $H = \langle r_1, ..., r_n \rangle$, subespaço do $L_2 [0,1]$, onde $r_1, ..., r_n$ são as n primeiras funções de Rademacher. Assim os vetores $x_1, ..., x_n$, $y_1, ..., y_n$ são da forma

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} r_j(t) \text{ e } y_i(t) = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} r_j(t) \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Para toda função x, defina

$$\overline{x}(t) = \begin{cases} \min\{x(t), 1\}, & \text{se } x(t) \geq 0 \\ \max\{x(t), -1\}, & \text{se } x(t) < 0. \end{cases}$$

Note que $\|\overline{x}\| \leq 1$. Definindo

$$\alpha = \sup\left\{\left|\sum_{i,j} a_{ij} s_i t_j\right| : |s_i|, |t_j| \leq 1\right\},$$

temos

$$\left|\sum_{i,j} a_{ij} \langle \overline{x}_i, \overline{y}_j \rangle\right| = \left|\sum_{i,j} a_{ij} \int_0^1 \overline{x}_i(t) \overline{y}_j(t)\, dt\right| \leq \int_0^1 \left|\sum_{i,j} a_{ij} \overline{x}_i(t) \overline{y}_j(t)\right| dt \leq \alpha. \tag{2.2}$$

Agora, se $x(t) \neq \overline{x}(t)$, temos

- Para $x(t) \geq 0$,

$\overline{x}(t) = 1 < x(t)$. Logo,

$$|x(t) - \overline{x}(t)| = |x(t) - 1| = x(t) - 1 = |x(t)| - 1.$$

- Para $x(t) < 0$,

$\overline{x}(t) = -1 > x(t)$. Logo,

$$|x(t) - \overline{x}(t)| = |x(t) + 1| = -(x(t) + 1) = -x(t) - 1 = |x(t)| - 1.$$

Então, concluímos que $|x(t) - \overline{x}(t)| = |x(t)| - 1$. Note também que, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, temos $\lambda - 1 \leq \lambda^2/4$. Portanto, temos

$$|x(t) - \overline{x}(t)| = |x(t)| - 1 \leq \frac{x(t)^2}{4} \tag{2.3}$$

para todo $t \in [0,1]$. Observe que (2.3) também vale quando $x(t) = \overline{x}(t)$. Assim, concluímos que (2.3) vale para toda função x e para todo $t \in [0,1]$. Agora, suponha que $x = \sum_{i=1}^{n} b_j r_j$

com $\|x\| \leq 1$. Então, usando a ortogonalidade das funções de Rademacher, temos

$$\begin{aligned}
\|x-\overline{x}\|_2^2 &= \int_0^1 |x(t)-\overline{x}(t)|^2\,dt \overset{(2.3)}{\leq} \frac{1}{16}\int_0^1 x(t)^4\,dt \qquad (2.4)\\
&= \frac{1}{16}\left[\int_0^1 \left(\sum_{i\leq n} b_i r_i(t)\right)\left(\sum_{j\leq n} b_j r_j(t)\right)\left(\sum_{l\leq n} b_l r_l(t)\right)\left(\sum_{k\leq n} b_k r_k(t)\right) dt\right]\\
&= \frac{1}{16}\left[\sum_{i,j,l,k\leq n} b_i b_j b_l b_k \int_0^1 r_i(t)\,r_j(t)\,r_l(t)\,r_k(t)\,dt\right]\\
&= \frac{1}{16}\left[\sum_{\substack{i=j\\ l=k}} b_i b_j b_l b_k + \sum_{\substack{i=l\\ j=k}} b_i b_j b_l b_k + \sum_{\substack{i=k\\ j=l}} b_i b_j b_l b_k - 2\sum_{i\leq m} b_i^4\right]\\
&\leq \frac{3}{16}\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^2 = \frac{3}{16}\|x\|_2^4 \leq \frac{3}{16}.
\end{aligned}$$

Portanto $\|x_i-\overline{x_i}\|_2, \|y_i-\overline{y_i}\|_2 \leq \sqrt{3}/4$ para cada i. Seja

$$\widetilde{\alpha} = \sup\left\{\left|\sum_{i,j} a_{ij}\langle z_i, w_j\rangle\right| : \|z_i\|, \|w_j\| \leq 1\right\}.$$

Então, usando (2.2) e lembrando que $\|\overline{x_i}\| \leq 1$ e $\|\overline{y_j}\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i,j} a_{ij}\langle x_i, y_j\rangle\right| &\leq \left|\sum_{i,j} a_{ij}\langle \overline{x}_i, \overline{y}_j\rangle\right| + \left|\sum_{i,j} a_{ij}\langle x_i-\overline{x}_i, \overline{y}_j\rangle\right| + \left|\sum_{i,j} a_{ij}\langle x_i, y_j-\overline{y}_j\rangle\right|\\
&\leq \alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}\left|\sum_{i,j} a_{ij}\langle \frac{x_i-\overline{x}_i}{\sqrt{3}/4}, \overline{y}_j\rangle\right| + \frac{\sqrt{3}}{4}\left|\sum_{i,j} a_{ij}\langle x_i, \frac{y_j-\overline{y}_j}{\sqrt{3}/4}\rangle\right|\\
&\leq \alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}\widetilde{\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{4}\widetilde{\alpha}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\left|\sum_{i,j} a_{ij}\langle x_i, y_j\rangle\right| \leq \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\widetilde{\alpha}$$

para quaisquer $x_1, ..., x_n$, $y_1, ..., y_n$ na bola unitrária de H. Portanto, tomando o sup, temos

$$\widetilde{\alpha} \leq \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\widetilde{\alpha},$$

e daí

$$\widetilde{\alpha} \leq \frac{2}{2-\sqrt{3}}\alpha,$$

provando (2.1) com $K_G = \frac{2}{2-\sqrt{3}}$. O caso complexo é conseqüência do caso real. De fato, consideremos $H = l_2^n(\mathbb{C})$ e $(a_{jk})_{j,k=1}^n$ uma matriz de complexos. Sejam $x_1, ..., x_n,\ y_1, ..., y_n$ vetores na bola unitária de H denotados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_k &= \left(x_{rk}^1 + i x_{rk}^2\right)_{r=1}^n \\ y_j &= \left(y_{rj}^1 + i y_{rj}^2\right)_{r=1}^n . \end{aligned}$$

Denotaremos $\left(x_{rk}^1\right)_{r=1}^n = x_k^1$, $\left(x_{rk}^2\right)_{r=1}^n = x_k^2$, $\left(y_{rj}^1\right)_{r=1}^n = y_j^1$ e $\left(y_{rj}^2\right)_{r=1}^n = y_j^2$. Note que $x_k^s, y_j^s \in B_{l_2^n(\mathbb{R})}$ para $s = 1, 2$ e $j, k \in \{1, ..., n\}$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \left|\sum_{j,k=1}^n a_{jk}\langle x_k, y_j\rangle\right| &= \left|\sum_{j,k=1}^n a_{jk}\left(\langle x_k^1, y_j^1\rangle - i\langle x_k^1, y_j^2\rangle + i\langle x_k^2, y_j^1\rangle + \langle x_k^2, y_j^2\rangle\right)\right| \\ &\le \left|\sum_{j,k=1}^n a_{jk}\langle x_k^1, y_j^1\rangle\right| + \left|\sum_{j,k=1}^n a_{jk}\langle x_k^1, y_j^2\rangle\right| + \left|\sum_{j,k=1}^n a_{jk}\langle x_k^2, y_j^1\rangle\right| + \left|\sum_{j,k=1}^n a_{jk}\langle x_k^2, y_j^2\rangle\right| . \end{aligned}$$

Tomando $a_{jk} = c_{jk} + i d_{jk}$, segue que

$$\begin{aligned} \left|\sum_{j,k=1}^n a_{jk}\langle x_k, y_j\rangle\right| &\le \left|\sum_{j,k=1}^n c_{jk}\langle x_k^1, y_j^1\rangle\right| + \left|\sum_{j,k=1}^n d_{jk}\langle x_k^1, y_j^1\rangle\right| + \cdots \\ &+ \left|\sum_{j,k=1}^n c_{jk}\langle x_k^2, y_j^2\rangle\right| + \left|\sum_{j,k=1}^n d_{jk}\langle x_k^2, y_j^2\rangle\right| \end{aligned}$$

e, usando a Desigualdade de Grothendieck para o caso real com $H = l_2^n(\mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned} \left|\sum_{j,k=1}^n a_{jk}\langle x_k, y_j\rangle\right| &\le 4K_G \sup_{\substack{|s_k|,|t_j|\le 1 \\ \text{em } \mathbb{R}}} \left|\sum_{j,k=1}^n c_{jk} s_k t_j\right| + 4K_G \sup_{\substack{|s_k|,|t_j|\le 1 \\ \text{em } \mathbb{R}}} \left|\sum_{j,k=1}^n d_{jk} s_k t_j\right| \\ &\le 4K_G \sup_{\substack{|s_k|,|t_j|\le 1 \\ \text{em } \mathbb{R}}} \left|\sum_{j,k=1}^n a_{jk} s_k t_j\right| + 4K_G \sup_{\substack{|s_k|,|t_j|\le 1 \\ \text{em } \mathbb{R}}} \left|\sum_{j,k=1}^n a_{jk} s_k t_j\right| \\ &\le 4K_G \sup_{\substack{|s_k|,|t_j|\le 1 \\ \text{em } \mathbb{C}}} \left|\sum_{j,k=1}^n a_{jk} s_k t_j\right| + 4K_G \sup_{\substack{|s_k|,|t_j|\le 1 \\ \text{em } \mathbb{C}}} \left|\sum_{j,k=1}^n a_{jk} s_k t_j\right| \\ &= 8K_G \sup_{\substack{|s_k|,|t_j|\le 1 \\ \text{em } \mathbb{C}}} \left|\sum_{j,k=1}^n a_{jk} s_k t_j\right| . \end{aligned}$$

■

Observação 2.2.2 *Deve ficar entendido que K_G denota a menor constante que satisfaz a Desigualdade de Grothendieck. Por motivos óbvios, K_G é chamada de constante de Grothendieck. A rigor, temos duas constantes de Grothendieck: uma para o caso real e outra para o caso complexo.*

Pelo que foi provado no Teorema 2.2.1, a constante de Grothendieck para o caso complexo é menor do que oito vezes a constante de Grothendieck para o caso real. A seguir, daremos uma estimativa melhor para a constante de Grothendieck no caso complexo. Precisamente, provaremos que a constante de Grothendieck para o caso complexo é menor ou igual ao dobro da constante de Grothendieck real. A essência dessa demonstração foi retirada de notas de aula do Prof. Jorge Mujica.

Seja H um espaço de Hilbert complexo. Então, existe Λ tal que H é isometricamente isomorfo ao espaço

$$l_2(\Lambda,\mathbb{C}) = \left\{ (z_\lambda) \in \mathbb{C}^\Lambda ; \|(z_\lambda)\| = \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} |z_\lambda|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

e, portanto, podemos supor $H = l_2(\Lambda,\mathbb{C})$.

Considere o espaço de Hilbert real

$$l_2\left(\Lambda,\mathbb{R}^2\right) = \left\{ (x_\lambda, y_\lambda) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^\Lambda ; \|(x_\lambda, y_\lambda)\| = \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} \left(x_\lambda^2 + y_\lambda^2\right) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Para cada $z_\lambda \in \mathbb{C}$, escrevemos $z_\lambda = x_\lambda + iy_\lambda$, com $x_\lambda, y_\lambda \in \mathbb{R}$. A aplicação

$$\begin{gathered} J : l_2(\Lambda,\mathbb{C}) \longrightarrow l_2\left(\Lambda,\mathbb{R}^2\right) \\ (z_\lambda) \mapsto J((z_\lambda)) = (x_\lambda, y_\lambda) \end{gathered}$$

é $\mathbb{R}$-linear, bijetiva e

$$\|J((z_\lambda))\| = \|(z_\lambda)\|.$$

Dados $(z_\lambda) = (x_\lambda + iy_\lambda) \in l_2(\Lambda,\mathbb{C})$ e $c = a + ib \in \mathbb{C}$, temos que

$$c(z_\lambda) = a(z_\lambda) + b(iz_\lambda)$$

e portanto

$$J(c(z_\lambda)) = a(x_\lambda, y_\lambda) + b(-y_\lambda, x_\lambda).$$

O seguinte lema será útil para a obtenção da estimativa da constante de Grothendieck no caso complexo:

Lema 2.2.3 *Se E é um espaço de Hilbert (real ou complexo) e $(c_{jk})_{j,k=1}^n$ é uma matriz em $\mathbb{K}$, então*

$$\sup\left\{ \left| \sum_{j,k=1}^n c_{jk} \langle z_j, w_k \rangle \right| ; z_j, w_k \in B_E \right\} = \sup\left\{ \sum_{k=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n c_{jk} z_j \right\| ; z_j \in B_E \right\}.$$

Demonstração. Defina

$$\left\|(c_{jk})_{j,k=1}^{n}\right\|_{E,n} = \sup\left\{\left|\sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}\left\langle z_j, w_k\right\rangle\right| ; z_j, w_k \in B_E\right\}.$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\left|\sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}\left\langle z_j, w_k\right\rangle\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\left\langle\sum_{j=1}^{n} c_{jk}z_j, w_k\right\rangle\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n} c_{jk}z_j\right\|$$

para quaisquer $z_j, w_k \in B_E$. Logo

$$\left\|(c_{jk})_{j,k=1}^{n}\right\|_{E,n} \leq \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n} c_{jk}z_j\right\| ; z_j \in B_E\right\}.$$

Para provar a outra desigualdade notemos que, pelo Teorema de Hahn-Banach e pelo Teorema de Representação de Riesz, para cada $k = 1, ..., n$, existe $w_k \in B_E$ tal que

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} c_{jk}z_j\right\| = \left\langle\sum_{j=1}^{n} c_{jk}z_j, w_k\right\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_{jk}\left\langle z_j, w_k\right\rangle.$$

Logo

$$\left|\sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}\left\langle z_j, w_k\right\rangle\right| \geq \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{jk}\left\langle z_j, w_k\right\rangle = \sum_{k=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n} c_{jk}z_j\right\|$$

e portanto

$$\left\|(c_{jk})_{j,k=1}^{n}\right\|_{E,n} \geq \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n} c_{jk}z_j\right\| ; z_j \in B_E\right\}.$$

■

A seguir, $c_{jk} = a_{jk} + ib_{jk}$ e usaremos também a notação usada na demonstração do lema anterior. Pelo lema, temos:

$$
\begin{aligned}
\left\|(c_{jk})_{j,k=1}^{n}\right\|_{H,n} &= \sup\left\{\left|\sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}\left\langle z_j, w_k\right\rangle\right|; z_j, w_k \in B_H\right\} \\
&\overset{\text{Lema}}{=} \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n} c_{jk}\left(z_{\lambda}^{(j)}\right)\right\|_{H}; \left\|\left(z_{\lambda}^{(j)}\right)\right\|_{H} \leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left\|J\left(\sum_{j=1}^{n} c_{jk}\left(z_{\lambda}^{(j)}\right)\right)\right\|_{l_2(\Lambda,\mathbb{R}^2)}; \left\|J\left(\left(z_{\lambda}^{(j)}\right)\right)\right\|_{l_2(\Lambda,\mathbb{R}^2)} \leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n} J\left(c_{jk}\left(z_{\lambda}^{(j)}\right)\right)\right\|_{l_2(\Lambda,\mathbb{R}^2)}; \left\|J\left(\left(z_{\lambda}^{(j)}\right)\right)\right\|_{l_2(\Lambda,\mathbb{R}^2)} \leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\begin{array}{c} \sum_{k=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n}\left(a_{jk}\left(x_{\lambda}^{(j)}, y_{\lambda}^{(j)}\right) + b_{jk}\left(-y_{\lambda}^{(j)}, x_{\lambda}^{(j)}\right)\right)\right\|_{l_2(\Lambda,\mathbb{R}^2)} \\ ; \left\|\left(x_{\lambda}^{(j)}, y_{\lambda}^{(j)}\right)\right\|_{l_2(\Lambda,\mathbb{R}^2)} \leq 1 \end{array}\right\} \\
&\leq \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\left(x_{\lambda}^{(j)}, y_{\lambda}^{(j)}\right)\right\|_{l_2(\Lambda,\mathbb{R}^2)}; \left\|\left(x_{\lambda}^{(j)}, y_{\lambda}^{(j)}\right)\right\|_{l_2(\Lambda,\mathbb{R}^2)} \leq 1\right\} \\
&+ \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n} b_{jk}\left(-y_{\lambda}^{(j)}, x_{\lambda}^{(j)}\right)\right\|_{l_2(\Lambda,\mathbb{R}^2)}; \left\|\left(-y_{\lambda}^{(j)}, x_{\lambda}^{(j)}\right)\right\|_{l_2(\Lambda,\mathbb{R}^2)} \leq 1\right\} \\
&\overset{\text{Lema}}{=} \sup\left\{\left|\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\left\langle \gamma_j, \eta_k\right\rangle\right|; \gamma_j, \eta_k \in B_{l_2(\Lambda,\mathbb{R}^2)}\right\} \\
&+ \sup\left\{\left|\sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}\left\langle \gamma_j, \eta_k\right\rangle\right|; \gamma_j, \eta_k \in B_{l_2(\Lambda,\mathbb{R}^2)}\right\}.
\end{aligned}
$$

Usando Desigualdade de Grothendieck para o caso real, segue que

$$\begin{aligned}
\left\|\left(c_{jk}\right)_{j,k=1}^{n}\right\|_{H,n} &\leq K_G \sup\left\{\left|\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} s_j t_k\right| ; s_j, t_k \in [-1,1]\right\} \\
&+ K_G \sup\left\{\left|\sum_{j,k=1}^{n} b_{jk} s_j t_k\right| ; s_j, t_k \in [-1,1]\right\} \\
&\overset{\textbf{(A9)}}{=} K_G \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{jk} s_j\right| ; s_j \in [-1,1]\right\} \\
&+ K_G \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} b_{jk} s_j\right| ; s_j \in [-1,1]\right\}.
\end{aligned}$$

Usando as identidades

$$\left\{\begin{array}{l} 2as = (a+ib)\,s + (a-ib)\,s \\ 2ibs = (a+ib)\,s - (a-ib)\,s, \end{array}\right.$$

segue que

$$
\begin{aligned}
\left\|(c_{jk})_{j,k=1}^{n}\right\|_{H,n} &\leq \frac{1}{2}K_G \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}(a_{jk}+ib_{jk})\,s_j\right| + \sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}(a_{jk}-ib_{jk})\,s_j\right|; s_j\in[-1,1]\right\}\\
&+\frac{1}{2}K_G \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}(a_{jk}+ib_{jk})\,s_j\right| + \sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}(a_{jk}-ib_{jk})\,s_j\right|; s_j\in[-1,1]\right\}\\
&= K_G \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}(a_{jk}+ib_{jk})\,s_j\right| + \sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}(a_{jk}-ib_{jk})\,s_j\right|; s_j\in[-1,1]\right\}\\
&\leq K_G \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}(a_{jk}+ib_{jk})\,s_j\right|; s_j\in[-1,1]\right\}\\
&+ K_G \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}(a_{jk}-ib_{jk})\,s_j\right|; s_j\in[-1,1]\right\}\\
&= K_G \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}(a_{jk}+ib_{jk})\,s_j\right|; s_j\in[-1,1]\right\}\\
&+ K_G \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}(a_{jk}+ib_{jk})\,s_j\right|; s_j\in[-1,1]\right\}\\
&= 2K_G \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}c_{jk}s_j\right|; s_j\in[-1,1]\right\}\\
&\leq 2K_G \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}c_{jk}s_j\right|; s_j\in B_{\mathbb{C}}\right\}\\
&\overset{\textbf{(A9)}}{=} 2K_G \sup\left\{\left|\sum_{j,k=1}^{n}c_{jk}s_jt_k\right|; s_j,t_k\in B_{\mathbb{C}}\right\}.
\end{aligned}
$$

Observação 2.2.4 *A estimativa anterior ainda não é boa. Atualmente, sabe-se que*

$$
\left\{\begin{array}{c} 1,571 \approx \frac{\pi}{2} \leq K_G^R \leq \frac{\pi}{2\sinh^{-1}1} \approx 1,782 \\ 1,338 \leq K_G^C \leq 1,405, \end{array}\right.
$$

onde K_G^R e K_G^C denotam as constantes de Grothendieck real e complexa, respectivamente. Para mais detalhes, veja [16, pág. 29].

2.2.2 O Teorema de Grothendieck

Definição 2.2.5 *Um operador linear contínuo $u : X \longrightarrow Y$ é absolutamente somante se u leva seqüências incondicionamente somáveis em seqüências absolutamente somáveis.*

Teorema 2.2.6 (Grothendieck) *Todo operador linear contínuo* $u : l_1 \longrightarrow l_2$ *é absolutamente somante.*

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, $\|u\| \leq 1$. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência incondicionamente somável em l_1. Logo, pelo Teorema 1.1.4, $\sum_n \varepsilon_n x_n$ converge em l_1 para toda seqüência $|\varepsilon_n| \leq 1$. Seja $v : l_\infty \longrightarrow l_1$ tal que $v(f) = (f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ (visto no Teorema de Orlicz-Pettis). Note que como $(x_n)_n$ é uma seqüência incondicionalmente somável, segue que $(f(x_n))_n$ é uma seqüência incondicionalmente somável de escalares. Portanto, $(f(x_n))_{n=1}^{\infty} \in l_1$ e v está bem definido. Note ainda que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n \right\|_1 &= \sup_{f \in B_{l_\infty}} \left| f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n \right) \right| = \sup_{f \in B_{l_\infty}} \left| f\left(\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n x_n \right) \right| \\
&= \sup_{f \in B_{l_\infty}} \left| \lim_{k\to\infty} f\left(\sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n x_n \right) \right| = \sup_{f \in B_{l_\infty}} \left| \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n f(x_n) \right) \right| \\
&= \sup_{f \in B_{l_\infty}} \lim_{k\to\infty} \left| \sum_{n=1}^{k} \varepsilon_n f(x_n) \right| \\
&\leq \sup_{f \in B_{l_\infty}} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |f(x_n)| = \sup_{f \in B_{l_\infty}} \sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| = \sup_{f \in B_{l_\infty}} \|v(f)\| = \|v\|.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Queremos mostrar que $\sum_n \|ux_n\|_2$ converge. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$. Escolha $n \geq m$ e $y_1, ..., y_m \in l_1^n \subset l_1$ tais que $\|x_i - y_i\| \leq \delta/2^i$ para $1 \leq i \leq m$. Se $n > m$, tome $y_{m+1} = \cdots = y_n = 0$. Para cada i, escreva $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$, onde e_j são os vetores unitários coordenados em l_1^n. Logo

$$\sum_{i=1}^{n} \|uy_i\|_2 = \sum_{i=1}^{n} \left\| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} ue_j \right\|_2 . \tag{2.6}$$

Por Hahn-Banach, existe $\varphi_i \in (l_2^n)'$ com $\|\varphi_i\| = 1$ tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} ue_j \right\|_2 = \varphi_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} ue_j \right).$$

Pelo Teorema de Riesz-Fréchet, existe um único $z_i \in l_2^n$, com $\|z_i\| = \|\varphi_i\| = 1$, tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} ue_j \right\|_2 = \varphi_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} ue_j \right) = \langle \sum_{j=1}^{n} a_{ij} ue_j, z_i \rangle. \tag{2.7}$$

De (2.6) e (2.7), temos

$$\sum_{i=1}^{n} \|uy_i\|_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \langle ue_j, z_i \rangle. \tag{2.8}$$

Dados $|\varepsilon_i| \leq 1$, $i = 1, ..., n$, temos

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i y_i\right\|_1 = \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j\right)\right\|_1 = \left\|\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \varepsilon_i\right) e_j\right\|_1 = \sum_{j=1}^{n} \left|\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \varepsilon_i\right| \tag{2.9}$$

$$\stackrel{(\mathbf{A9})}{=} \sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \varepsilon_i \varepsilon'_j \right| : \left|\varepsilon'_j\right| \leq 1 \right\}.$$

Logo

$$\sup \left\{ \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i y_i\right\|_1 ; |\varepsilon_i| \leq 1 \right\} = \sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \varepsilon_i \varepsilon'_j \right| : |\varepsilon_i| \leq 1, \left|\varepsilon'_j\right| \leq 1 \right\} \tag{2.10}$$

Note que

$$\|ux_i\|_2 - \|uy_i\|_2 \leq \|ux_i - uy_i\|_2 \leq \|u\| \, \|x_i - y_i\|_1 \leq \frac{\delta}{2^i}, \; i = 1, ..., m.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \|ux_i\|_2 &\leq \sum_{i=1}^{m} \|uy_i\|_2 + \delta \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|uy_i\|_2 + \delta \\
&\stackrel{(2.8)}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \langle ue_j, z_i \rangle + \delta.
\end{aligned}$$

Sendo

$$\widetilde{\alpha} = \sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \langle \beta_i, \gamma_j \rangle \right| : \|\beta_i\| , \|\gamma_j\| \leq 1 \right\},$$

e percebendo que $\|ue_i\| \leq \|u\| \, \|e_i\| = 1$, temos

$$\sum_{i=1}^{m} \|ux_i\|_2 \leq \widetilde{\alpha} + \delta \tag{2.11}$$

$$\leq K_G \sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \varepsilon_i \varepsilon'_j \right| : |\varepsilon_i| , \left|\varepsilon'_j\right| \leq 1 \right\} + \delta$$

$$\stackrel{(\mathbf{2.10})}{=} K_G \sup \left\{ \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i y_i\right\|_1 : |\varepsilon_i| \leq 1 \right\} + \delta.$$

Agora, vejamos o seguinte:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i y_i\right\|_1 &= \left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i y_i\right\|_1 = \left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\left(y_i - x_i\right) + \sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\right\|_1 \\ &\leq \sum_{i=1}^{m}\left\|y_i - x_i\right\|_1 + \left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\right\|_1 \leq \delta\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2^i} + \left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\right\|_1 \\ &\leq \delta + \left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\right\|_1,\end{aligned} \tag{2.12}$$

e portanto, de (2.11) e (2.12), temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\left\|ux_i\right\|_2 &\leq K_G \sup\left\{\delta + \left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\right\|_1 : \left|\varepsilon_i\right| \leq 1\right\} + \delta \\ &= K_G \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\right\|_1 : \left|\varepsilon_i\right| \leq 1\right\} + K_G\delta + \delta.\end{aligned}$$

Por (2.5), segue que

$$\sum_{i=1}^{m}\left\|ux_i\right\|_2 \leq K_G\left\|v\right\| + \left(K_G + 1\right)\delta.$$

Como $\delta > 0$ é arbitrário, obtemos

$$\sum_{i=1}^{m}\left\|ux_i\right\|_2 \leq K_G\left\|v\right\|.$$

Portanto, como $K_G\left\|v\right\|$ independe de m, segue que $\sum_{i=1}^{\infty}\left\|ux_i\right\|_2$ converge. ∎

2.3 Operadores absolutamente $(p;q)$-somantes

Definição 2.3.1 *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e X um espaço de Banach. Uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é fortemente p-somável se a seqüência de escalares correspondente $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ estiver em l_p.*

Denotamos por $l_p(X)$ o espaço vetorial de todas as seqüências fortemente p-somáveis em X. Em $l_p(X)$ definimos

$$\left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left\|x_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se $p = \infty$ definimos

$$l_\infty(X) := \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}; \sup_n\left\|x_n\right\| < \infty\right\}$$

$$\left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_\infty := \sup_n\left\|x_n\right\|.$$

Proposição 2.3.2 *Se $1 \leq p \leq \infty$, $\left(l_p(X), \|\cdot\|_p\right)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Faremos o caso $p < \infty$. O caso $p = \infty$ é análogo.

Seja $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência de Cauchy em $l_p(X)$; logo $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \ldots\right) \in l_p(X)$. Com isso, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, k' \geq N \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\|x_n^{(k)} - x_n^{(k')}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|x^{(k)} - x^{(k')}\right\|_p < \varepsilon.$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$k, k' \geq N \Rightarrow \left\|x_n^{(k)} - x_n^{(k')}\right\| < \varepsilon$$

e, portanto, $\left(x_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ são todas seqüências de Cauchy em X, e conseqüentemente convergentes. Digamos que $\left(x_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ convirja para x_n, e seja $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Vamos mostrar que $x \in l_p(X)$. Para cada m natural, temos

$$k, k' \geq N \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{m} \left\|x_n^{(k)} - x_n^{(k')}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Fazendo $k' \to \infty$, obtemos

$$k \geq N \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{m} \left\|x_n^{(k)} - x_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

Fazendo agora $m \to \infty$, temos

$$\left\|x^{(k)} - x\right\|_p < \varepsilon \tag{2.13}$$

para todo $k \geq N$. Logo

$$x^{(N)} - x = \left(x_n^{(N)} - x_n\right)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X).$$

Como $x^{(N)} \in l_p(X)$ (que é um espaço vetorial), segue que

$$x = x^{(N)} - \left(x^{(N)} - x\right) = \left(x_n^{(N)}\right)_{n=1}^{\infty} - \left(x_n^{(N)} - x_n\right)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X),$$

e de (2.13) temos $\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x$. Portanto $l_p(X)$ é de Banach. ■

Em $l_p(X)$ as seqüências $(x_1, x_2, , \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ serão identificadas com as seqüências finitas $(x_1, x_2, , \ldots, x_n)$. O conjunto formado por essas seqüências forma um subespaço denso em $l_p(X)$. De fato, dados $\varepsilon > 0$ e $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Agora é só escolher a seqüência finita $x' = (x_1, x_2, , \ldots, x_N)$, e daí

$$\left\|x - x'\right\|_p = \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Definição 2.3.3 *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e X um espaço de Banach. Uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é fracamente p-somável se a seqüência de escalares $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}$ estiver em l_p para todo $\varphi \in X'$.*

Denotamos por $l_{p,w}(X)$ o conjunto de todas as seqüências fracamente p-somáveis. Veremos, a seguir, que uma norma natural em $l_{p,w}(X)$ é dada por

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p,w} := \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.14}$$

Se $p = \infty$, definimos

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty,w} = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \|(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}\|_{\infty}.$$

Mais adiante mostraremos que $l_{\infty,w}(X) = l_{\infty}(X)$.

Note que não é imediato que o sup em (2.14) seja finito.

Proposição 2.3.4 *$\left(l_{p,w}(X), \|\cdot\|_{p,w}\right)$ é um espaço de Banach, para todo p, $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Primeiro mostraremos o resultado para $1 \leq p < \infty$. Antes de mais nada mostremos que essa norma está bem definida, e para isso usaremos o Teorema do Gráfico Fechado (TGF). Seja $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{p,w}(X)$ e associamos a x a função

$$u : X' \longrightarrow l_p$$
$$u(\varphi) = (\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}.$$

É claro que u está bem definida e é linear. Suponha que

$$\begin{cases} \varphi_k \to \varphi \in X' \\ u(\varphi_k) \to z_0 \in l_p \end{cases}$$

Vamos mostrar que $z_0 = u(\varphi)$. Como $u(\varphi_k) \to z_0$, temos

$$\lim_{k\to\infty} (\varphi_k(x_n))_{n=1}^{\infty} = z_0 = (z_j)_{j=1}^{\infty},$$

e portanto

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x_n) = z_n$$

para todo n natural. Como $\varphi_k \to \varphi$, temos

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x_n) = \varphi(x_n)$$

e conseqüentemente

$$z_n = \varphi(x_n)$$

para todo n. Logo $z_0 = u(\varphi)$ e o TGF garante que u é limitado. A limitação de u garante que

$$\sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

As propriedades de norma são facilmente verificadas. Agora, só nos resta provar a completude. Seja $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência de Cauchy em $l_{p,w}(X)$. Note que, para cada k, temos $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \dots\right) \in l_{p,w}(X)$. Como $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, k' \geq N \Rightarrow \left\| x^{(k)} - x^{(k')} \right\|_{p,w} < \varepsilon.$$

Com isso, dado $\varphi \in B_{X'}$, temos

$$k, k' \geq N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi\left(x_n^{(k)} - x_n^{(k')}\right) \right|^p < \varepsilon^p \tag{2.15}$$

e, como cada termo dessa série é dominado por ε^p, segue que (para todo n),

$$k, k' \geq N \Rightarrow \left\| x_n^{(k)} - x_n^{(k')} \right\| = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left| \varphi\left(x_n^{(k)} - x_n^{(k')}\right) \right| \leq \varepsilon.$$

Portanto, para cada n, $\left(x_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em X, e conseqüentemente convergente. Denotaremos por x_n o limite de $\left(x_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$, e seja $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Vamos mostrar que $x \in l_{p,w}(X)$. De fato, usando o mesmo artifício usado na demonstração da Proposição 2.3.2, fazendo $k' \to \infty$ em (2.15), obtemos

$$k \geq N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi\left(x_n^{(k)} - x_n\right) \right|^p \leq \varepsilon^p, \text{ para todo } \varphi \in B_{X'}.$$

Isso nos permite concluir que $x - x^{(N)} \in l_{p,w}(X)$. Logo,

$$x = \left(x - x^{(N)}\right) + x^{(N)} \in l_{p,w}(X).$$

Além disso,

$$k \geq N \Rightarrow \left\| x^{(k)} - x \right\|_{p,w} \leq \varepsilon,$$

ou seja, $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$. Portanto, $l_{p,w}(X)$ é espaço de Banach.

O caso $p = \infty$ é bem particular. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência limitada num espaço de Banach X. Temos

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup_n \|x_n\| &= \sup_n \sup_{\varphi \in B_{X'}} \|\varphi(x_n)\| \\
&= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sup_n \|\varphi(x_n)\| \\
&= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \|(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} \\
&= \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty,w}.
\end{aligned}$$

Em outras palavras, os espaços $l_\infty(X)$ e $l_{\infty,w}(X)$ são idênticos. ■

Denotaremos por $c_0(X)$ o subespaço de $l_\infty(X)$ formado pelas seqüências $(x_n)_{n=1}^\infty$ em X com

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=0.$$

O símbolo $c_{0,w}(X)$ denotará o subespaço de $l_\infty(X)$ formado pelas seqüências $(x_n)_{n=1}^\infty$ em X com

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)=0$$

para todo $\varphi\in B_{X'}$. Note que $c_0(X)$ e $c_{0,w}(X)$ são ambos fechados. Provaremos que $c_0(X)$ é fechado. Seja $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^\infty$ uma seqüência em $c_0(X)$ que converge para $x=(x_n)_{n=1}^\infty$. Logo, dado $\varepsilon>0$, existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$k\geq k_0\Rightarrow\sup_n\left\|x_n^{(k)}-x_n\right\|=\left\|x^{(k)}-x\right\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, para todo $k\geq k_0$ e todo $n\in\mathbb{N}$, temos

$$\left\|x_n^{(k)}-x_n\right\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

E, como $x^{(k)}=\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},x_3^{(k)},\ldots\right)\in c_0(X)$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\left\|x_n^{(k_0)}\right\|<\frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n\geq N$. Logo,

$$n\geq N\Rightarrow\|x_n\|=\left\|x_n-x_n^{(k_0)}+x_n^{(k_0)}\right\|\leq\left\|x_n-x_n^{(k_0)}\right\|+\left\|x_n^{(k_0)}\right\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Logo $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=0$ e, portanto, $x\in c_0(X)$. Com os mesmos argumentos mostra-se que $c_{0,w}(X)$ é fechado.

Se $u:X\to Y$ é um operador linear limitado entre espaços de Banach, a correspondência

$$(x_n)_{n=1}^\infty\to(ux_n)_{n=1}^\infty$$

sempre induz um operador linear limitado $\hat{u}^s:l_p(X)\to l_p(Y)$, como também um operador linear limitado $\hat{u}^w:l_{p,w}(X)\to l_{p,w}(Y)$. E, em ambos os casos, $\|\hat{u}^p\|=\|\hat{u}^w\|=\|u\|$. De fato, se $\hat{u}^s:l_p(X)\to l_p(Y)$, temos

$$\|\hat{u}^s\|=\sup_{\left\|(x_n)_{n=1}^\infty\right\|_p\leq1}\left(\sum_{n=1}^\infty\|ux_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\sup_{\left\|(x_n)_{n=1}^\infty\right\|_p\leq1}\|u\|\left(\sum_{n=1}^\infty\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\|u\|$$

e

$$\|u\|=\sup_{\|x\|\leq1}\|ux\|=\sup_{\left\|(y_n)_{n=1}^\infty=(x,0,0,\ldots)\right\|_p\leq1}\left\|\hat{u}^s\left((y_n)_{n=1}^\infty\right)\right\|_p\leq\|\hat{u}^s\|.$$

Logo, $\|\hat{u}^s\|=\|u\|$. Com raciocínio similar é fácil mostrar que $\|\hat{u}^w\|=\|u\|$.

Observação 2.3.5 $l_p(X)\subset l_{p,w}(X)$. *De fato, se* $(x_n)_{n=1}^\infty\in l_p(X)$, *então*

$$\begin{aligned}\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{p,w}&=\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{j=1}^\infty|\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leq\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{j=1}^\infty\|\varphi\|^p\|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{j=1}^\infty\|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p.\end{aligned}$$

Se $1 \leq p < \infty$, muitas vezes é útil trabalhar com o espaço

$$l_{p,u}(X) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{p,w}(X) \, ; \lim_{n\to\infty} \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{p,w} = 0 \right\}.$$

A proposição a seguir garante que $l_{p,u}(X)$ é espaço de Banach, se $1 \leq p < \infty$.

Proposição 2.3.6 *$l_{p,u}(X)$ é um subespaço fechado de $l_{p,w}(X)$.*

Demonstração. Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{p,u}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} + \lambda (y_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{p,w} = 0. \tag{2.16}$$

Com efeito,

$$0 \leq \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} + \lambda (y_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{p,w} \leq \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{p,w} + |\lambda| \left\| (y_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{p,w}$$

e, fazendo $n \to \infty$, temos (2.16).

Logo,

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} + \lambda (y_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{p,u}(X)$$

e portanto $l_{p,u}(X)$ é um subespaço de $l_{p,w}(X)$.

Seja $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência em $l_{p,u}(X)$. Então, para cada k, temos que $\lim_{n\to\infty} \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=n}^{\infty} \right\|_{p,w} = 0$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0^{(k)} \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0^{(k)} \Rightarrow \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=n}^{\infty} \right\|_{p,w} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.17}$$

Suponhamos que $x^{(k)} \to x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ em $l_{p,w}(X)$, ou seja, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \Rightarrow \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \varphi\left(x_j^{(k)} - x_j\right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| x_j^{(k)} - x_j \right\|_{p,w} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por maior razão, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$k \geq k_0 \Rightarrow \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \left| \varphi\left(x_j^{(k)} - x_j\right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=n}^{\infty} - (x_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{p,w} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.18}$$

Note que

$$\begin{aligned} \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{p,w} &= \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} - \left(x_j^{(k_0)}\right)_{j=n}^{\infty} + \left(x_j^{(k_0)}\right)_{j=n}^{\infty} \right\|_{p,w} \\ &\leq \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} - \left(x_j^{(k_0)}\right)_{j=n}^{\infty} \right\|_{p,w} + \left\| \left(x_j^{(k_0)}\right)_{j=n}^{\infty} \right\|_{p,w} \end{aligned} \tag{2.19}$$

e, por (2.17) e (2.18), segue que

$$n \geq n_0^{(k_0)} \Rightarrow \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{p,w} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja, $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{p,u}(X)$. Portanto $l_{p,u}(X)$ é fechado. ■

O próximo resultado mostra que as seqüências incondicionalmente somáveis em X são precisamente as seqüências pertencentes a $l_{1,u}(X)$. Por essa razão, alguns autores chamam as seqüências de $l_{p,u}(X)$ de incondicionalmente p-somáveis. Antes de enunciar o resultado, demonstraremos um lema técnico:

Lema 2.3.7 *Se $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de escalares tal que*

$$\left| \sum_{n \in M} \lambda_n \right| \leq 1$$

para todo conjunto finito $M \subset \mathbb{N}$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 4.$$

Demonstração. Para todo $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} |\lambda_n| &\leq \sum_{n=1}^{k} |\mathrm{Re}(\lambda_n)| + \sum_{n=1}^{k} |\mathrm{Im}(\lambda_n)| \\
&= \sum_{n \in M_{\mathrm{Re}}^{+}} \mathrm{Re}(\lambda_n) + \sum_{n \in M_{\mathrm{Re}}^{-}} (-\mathrm{Re}(\lambda_n)) + \sum_{n \in M_{\mathrm{Im}}^{+}} \mathrm{Im}(\lambda_n) + \sum_{n \in M_{\mathrm{Im}}^{-}} (-\mathrm{Im}(\lambda_n)),
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
M_{\mathrm{Re}}^{+} &= \{n \in \{1, \ldots, k\}; \mathrm{Re}(\lambda_n) > 0\}, \\
M_{\mathrm{Re}}^{-} &= \{n \in \{1, \ldots, k\}; \mathrm{Re}(\lambda_n) < 0\}, \\
M_{\mathrm{Im}}^{+} &= \{n \in \{1, \ldots, k\}; \mathrm{Im}(\lambda_n) > 0\} \text{ e} \\
M_{\mathrm{Im}}^{-} &= \{n \in \{1, \ldots, k\}; \mathrm{Im}(\lambda_n) < 0\}.
\end{aligned}$$

Como, por hipótese,

$$\left| \sum_{n \in M} \lambda_n \right| \leq 1$$

para qualquer M finito, escolhendo $M = M_{\mathrm{Re}}^{+}, M_{\mathrm{Re}}^{-}, M_{\mathrm{Im}}^{+}$ e M_{Im}^{-}, obtemos

$$\begin{cases} \left|\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Re}}^{+}} \mathrm{Re}\,(\lambda_n)\right| = \left|\mathrm{Re}\left(\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Re}}^{+}} \lambda_n\right)\right| \leq \left|\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Re}}^{+}} \lambda_n\right| \leq 1, \\ \left|\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Re}}^{-}} (-\mathrm{Re}\,(\lambda_n))\right| = \left|\mathrm{Re}\left(\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Re}}^{-}} \lambda_n\right)\right| \leq \left|\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Re}}^{+}} \lambda_n\right| \leq 1, \\ \left|\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Im}}^{+}} \mathrm{Im}\,(\lambda_n)\right| = \left|\mathrm{Im}\left(\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Im}}^{+}} \lambda_n\right)\right| \leq \left|\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Im}}^{+}} \lambda_n\right| \leq 1, \\ \left|\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Im}}^{-}} (-\mathrm{Im}\,(\lambda_n))\right| = \left|\mathrm{Im}\left(\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Im}}^{-}} \lambda_n\right)\right| \leq \left|\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Im}}^{-}} \lambda_n\right| \leq 1. \end{cases}$$

Logo, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 4.$$

■

Proposição 2.3.8 *Seja X um espaço de Banach. Então uma seqüência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em X é incondicionalmente somável se, e somente se, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{1,u}(X)$.*

Demonstração. Suponha que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma seqüência incondicionalmente somável em X. Então, pelo Teorema 1.1.2, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|\sum_{j\in M} x_j\right\| < \varepsilon \text{ para todo conjunto finito } M \subset \{n_\varepsilon, n_\varepsilon + 1, ...\}$$

e, portanto, para todo $M \subset \{n_\varepsilon, n_\varepsilon + 1, ...\}$ e $\varphi \in B_{X'}$, temos

$$\left|\sum_{j\in M} \varphi(x_j)\right| \leq \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left|\sum_{j\in M} \varphi(x_j)\right| \overset{\text{Hahn-Banach}}{=} \left\|\sum_{j\in M} x_j\right\| < \varepsilon.$$

Pelo Lema 2.3.7 segue que

$$\sum_{j=n_\varepsilon}^{\infty} |\varphi(x_j)| < 4\varepsilon,$$

e daí

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow \left\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{1,w} \leq \left\|(x_j)_{j=n_\varepsilon}^{\infty}\right\|_{1,w} = \sup_{\varphi\in B_{X'}} \sum_{j=n_\varepsilon}^{\infty} |\varphi(x_j)| \leq 4\varepsilon.$$

Portanto $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{1,u}(X)$.

Suponhamos agora que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{1,u}(X)$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{1,w} = \sup_{\varphi\in B_{X'}} \sum_{j=n}^{\infty} |\varphi(x_j)| < \varepsilon.$$

Então para todo conjunto finito $M \subset \{n_\varepsilon, n_\varepsilon + 1, ...\}$ temos que

$$\left\| \sum_{j \in M} x_j \right\| \overset{\text{Hahn-Banach}}{=} \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left| \sum_{j \in M} \varphi(x_j) \right| \leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j \in M} |\varphi(x_j)| \leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j=n_\varepsilon}^{\infty} |\varphi(x_j)| < \varepsilon.$$

Pelo Teorema 1.1.2 segue que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável. ∎

Definição 2.3.9 *Sejam* $1 \leq p, q < \infty$ *e* $u : X \longrightarrow Y$ *um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Dizemos que* u *é absolutamente* $(p; q)$*-somante (ou* $(p; q)$*-somante) se existe um operador induzido*

$$\hat{u} : l_{q,w}(X) \to l_p(Y) : (x_n)_{n=1}^{\infty} \to (ux_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Denotamos por $\prod_{p,q}(X; Y)$ o conjunto formado por todos os operadores $(p; q)$-somantes de X em Y. Quando $p = q$, escrevemos $\prod_p(X; Y)$ no lugar de $\prod_{p,q}(X; Y)$.

O próximo resultado traz várias caracterizações para operadores absolutamente $(p; q)$-somantes:

Proposição 2.3.10 *Seja* $u \in \mathcal{L}(X; Y)$. *São equivalentes:*

(i) u *é* $(p; q)$*-somante;*

(ii) Existe $K > 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.20}$$

para quaisquer $x_1, ..., x_n$ *em* X *e* n *natural;*

(iii) Existe $K > 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{q,w}(X)$.

(iv) Existe $K > 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{q,u}(X)$.

(v) $(u(x_k))_{k=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ *sempre que* $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{q,u}(X)$.

Denotamos por $\pi_{p,q}(u)$ *o ínfimo dos* K *tais que a desigualdade (2.20) continua válida. Além disso, temos* $\pi_{p,q}(u) = \|\hat{u}\|$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$. Suponha que u seja $(p;q)$-somante. Vamos mostrar que $\hat{u}$ tem gráfico fechado. De fato, suponha que $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ convirja para $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $l_{q,w}(X)$ e que $\hat{u}\left(x^{(k)}\right)$ convirja para $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ em $l_p(Y)$. Como $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ converge para $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, dado $\varepsilon > 0$, existe N natural tal que

$$k \geq N \Rightarrow \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi\left(x_n^{(k)} - x_n\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left\| x^{(k)} - x \right\|_{q,w} < \varepsilon.$$

Com isso obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi\left(x_n^{(k)} - x_n\right) \right|^q < \varepsilon^q \text{ para todo } \varphi \in B_{X'}. \tag{2.21}$$

Como cada termo da série (2.21) é dominado por ε^q, segue que

$$k \geq N \Rightarrow \left\| x_n^{(k)} - x_n \right\| = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left| \varphi\left(x_n^{(k)} - x_n\right) \right| < \varepsilon$$

para todo n. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\left(x_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ converge para x_n em X. Como u é contínuo, segue que

$$\lim_{k \to \infty} u x_n^{(k)} = u x_n \tag{2.22}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $\left(\hat{u}\left(x^{(k)}\right)\right)_{k=1}^{\infty}$ converge para $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ em $l_p(Y)$, existe N' tal que

$$k \geq N' \Rightarrow \left\| \widehat{u} x^{(k)} - y \right\|_p < \varepsilon,$$

e portanto

$$k \geq N' \Rightarrow \left\| \left(u x_n^{(k)}\right)_{n=1}^{\infty} - (y_n)_{n=1}^{\infty} \right\|_p < \varepsilon,$$

ou ainda,

$$k \geq N' \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\| u x_n^{(k)} - y_n \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Conseqüentemente

$$k \geq N' \Rightarrow \left\| u x_n^{(k)} - y_n \right\| < \varepsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

e portanto

$$\lim_{k \to \infty} u x_n^{(k)} = y_n \tag{2.23}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, de (2.22) e (2.23) temos $u x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí

$$\widehat{u} x = (u x_n)_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty} = y.$$

Como $\hat{u}$ é linear, pelo Teorema do Gráfico Fechado segue que $\hat{u}$ é contínuo. Logo, para qualquer seqüência finita $(x_j)_{j=1}^{n}$ em X, temos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \| u(x_k) \|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| (u(x_k))_{k=1}^{n} \right\|_p = \left\| \hat{u}\left((x_k)_{k=1}^{n}\right) \right\|_p \tag{2.24}$$

$$\leq \|\hat{u}\| \left\| (x_k)_{k=1}^{n} \right\|_{q,w} = \|\hat{u}\| \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Note que de (2.24) temos que

$$\pi_{p,q}(u) \leq \|\hat{u}\|.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponha que para quaisquer $x_1, ..., x_n$ em X e $n \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{q,w}(X)$. Então

$$\begin{aligned} \|(u(x_k))_{k=1}^{\infty}\|_p &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.25)\\ &\leq \sup_n \left[K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] = K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{q}} = K \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,w}. \end{aligned}$$

$(iii) \Rightarrow (i)$. Segue claramente de (iii) que $(u(x_n))_{n=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ sempre que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{q,w}(X)$.
Note que

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\| &= \sup_{\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,w} \leq 1} \|\hat{u}((x_n)_{n=1}^{\infty})\|_p = \sup_{\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,w} \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|u(x_n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.26)\\ &\leq \sup_{\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,w} \leq 1} K \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,w} = K. \end{aligned}$$

Logo

$$\|\hat{u}\| \leq \pi_{p,q}(u). \qquad (2.27)$$

De (2.24) e (2.27) segue que $\pi_{p,q}(u) = \|\hat{u}\|$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ é óbvio, pois $l_{q,u}(X) \subset l_{q,w}(X)$.
$(iv) \Rightarrow (v)$ é óbvio.
$(v) \Rightarrow (ii)$ Se $(u(x_k))_{k=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{q,u}(X)$, então a aplicação

$$\begin{aligned} \widetilde{u} : l_{q,u}(X) &\longrightarrow l_p(Y) \\ (x_k)_{k=1}^{\infty} &\mapsto \widetilde{u}((x_k)_{k=1}^{\infty}) = (u(x_k))_{k=1}^{\infty} \end{aligned}$$

está bem definida. Procedendo de maneira análoga à demonstração de $(i) \Rightarrow (ii)$ chegaremos que $\tilde{u}$ é contínuo.

Agora notemos que se $x_1, ..., x_n \in X$, então

$$(x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) \in l_{q,u}(X)$$

e portanto

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|(u(x_k))_{k=1}^{n}\right\|_p = \left\|\widetilde{u}(x_k)_{k=1}^{n}\right\|_p$$

$$\leq \|\widetilde{u}\| \left\|(x_k)_{k=1}^{n}\right\|_{q,w} = \|\widetilde{u}\| \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

como queríamos. ■

Observação 2.3.11 *Se $p < q$, então somente o operador nulo pode ser $(p;q)$-somante. De fato, é claro que podemos supor $X \neq \{0\}$. Como $p < q$, sempre podemos encontrar $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ em $l_q - l_p$. Então, para $0 \neq x \in X$, $(\lambda_k x)_{k=1}^{\infty} \in l_{q,w}(X)$. Suponhamos que exista $u \neq 0$ absolutamente $(p;q)$-somante. Logo, existe $K > 0$ tal que*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(\lambda_k x)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi(\lambda_k x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

para todo n natural. Conseqüentemente,

$$\|u(x)\| \left(\sum_{k=1}^{k}|\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi\in B_{X'}} |\varphi(x)| \left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

isto é,

$$\|u(x)\| \left(\sum_{k=1}^{k}|\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K\|x\| \left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Tomando $\sup_{\|x\|\leq 1}$, obtemos

$$\|u\| \left(\sum_{k=1}^{k}|\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

donde concluímos que $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p$ (absurdo).

Corolário 2.3.12 *Seja $u \in \mathcal{L}(X,Y)$. Então $u \in \prod_{p,1}(X,Y)$ se, e somente se, $(u(x_k))_{k=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável. Em particular, u é absolutamente somante se, e somente se, u é $(1;1)$-somante.*

Observação 2.3.13 *Note que, como $\pi_{p,q}(u) = \|\widehat{u}\|$ e $\left\|\widehat{u}\left((x_k)_{k=1}^{\infty}\right)\right\|_p \leq \|\widehat{u}\| \left\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_{q,w}$, temos*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(u) \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

e, portanto, o ínfimo $\pi_{p,q}(u)$ é assumido.

A seguir, usando o Corolário 2.3.12 apresentamos uma outra demonstração para o Teorema de Grothendieck:

Teorema 2.3.14 (Grothendieck) *$\mathcal{L}(l_1, l_2) = \prod_1 (l_1, l_2)$ e $\pi_1(T) \leq K_G \|T\|$ para cada $T \in \mathcal{L}(l_1, l_2)$.*

Demonstração. Sejam $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ a base de Schauder canônica de l_1 e $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ a seqüência de projeções canônicas, isto é

$$\begin{aligned} T_n : l_1 &\longrightarrow l_1 \\ x = \sum_{i=1}^{\infty} a_j e_j &\mapsto T_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_j e_j. \end{aligned}$$

Claramente $\|T_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{1,w}(l_1)$ com

$$\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_{1,w} = \sup_{\varphi \in B_{l_1'}} \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)| \leq 1.$$

Como cada T_n é linear, contínua e $\|T_n\| \leq 1$, segue que $(T_n x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{1,w}(l_1)$ e

$$\|(T_n x_k)_{k=1}^{\infty}\|_{1,w} = \sup_{\varphi \in B_{l_1'}} \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(T_n x_k)| \leq 1.$$

Podemos escrever

$$x_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} e_j \text{ e } T_n x_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} e_j,$$

para cada n, k.

Afirmação: Para quaisquer inteiros positivos $m \leq n$ e $(s_j)_{j=1}^{n}, (t_k)_{k=1}^{m} \subset B_{\mathbb{K}}$, temos

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{jk} s_j t_k \right| \leq 1.$$

De fato, seja $\varphi_s \in B_{l_1'}$ definido por

$$\begin{aligned} \varphi_s(e_j) &= s_j \text{ se } j \leq n \\ \varphi_s(e_j) &= 0 \text{ se } j > n. \end{aligned}$$

Como $\|\varphi_s\| \leq 1$ e $\|T_n\| \leq 1$, segue que

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{jk} s_j t_k \right| \leq \sum_{k=1}^{m} \left(|t_k| \left| \sum_{j=1}^{n} a_{jk} s_j \right| \right) \leq \sum_{k=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \varphi_s(e_j) \right| = \sum_{k=1}^{m} |\varphi_s(T_n x_k)| \leq 1. \tag{2.28}$$

Sejam $T \in \mathcal{L}(l_1, l_2)$ e $m, n \in \mathbb{N}$, com $n \geq m$. Para cada k, $1 \leq k \leq m$, pelo Teorema de Hahn-Banach e pelo Teorema da Representação de Riesz, existe $y_k \in l_2$, com $\|y_k\|_2 \leq 1$, tal que

$$\|TT_n x_k\|_2 = \langle TT_n x_k, y_k \rangle.$$

Se $m < n$, escolhemos $y_{m+1} = \cdots = y_n = 0$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, podemos obter

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} \|TT_n x_k\|_2 &= \left| \sum_{k=1}^{m} \langle TT_n x_k, y_k \rangle \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \langle Te_j, y_k \rangle \right| \\
&\leq \max \left\{ \left(\|Te_j\|_2 + \varepsilon \right); j = 1, ..., n \right\} \left| \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \langle \frac{Te_j}{\left(\|Te_j\|_2 + \varepsilon \right)}, y_k \rangle \right| \\
&\leq (\|T\| + \varepsilon) \left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \langle \frac{Te_j}{\left(\|Te_j\|_2 + \varepsilon \right)}, y_k \rangle \right|.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Grothendieck temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} \|TT_n x_k\|_2 &\leq K_G (\|T\| + \varepsilon) \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} s_j t_k \right| : |s_j|, |t_k| \leq 1 \right\} \\
&\overset{(2.28)}{\leq} K_G (\|T\| + \varepsilon)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

para todo n, m, com $n \geq m$. Note que, para cada k, temos

$$\lim_{n \to \infty} T_n x_k = x_k.$$

Fazendo $n \to \infty$ em (2.29), segue que

$$\sum_{k=1}^{m} \|T x_k\|_2 \leq K_G (\|T\| + \varepsilon)$$

para cada m e $\varepsilon > 0$. Portanto, fazendo $m \to \infty$ e $\varepsilon \to 0$, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|T x_k\|_2 \leq K_G \|T\|,$$

isto é, $(Tx_k)_{k=1}^{\infty} \in l_1(l_2)$. Logo T é $(1;1)$-somante e $\pi_1(T) \leq K_G \|T\|$. ■

A seguir, veremos que $\pi_{p,q}(.)$ é uma norma.

Proposição 2.3.15 $\left(\prod_{p,q}(X, Y), \pi_{p,q}(\cdot) \right)$ *é um espaço vetorial normado.*

Demonstração. Sejam $u, v \in \prod_{p,q}(X, Y)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Vamos mostrar que $u + \lambda v$ satisfaz (2.20). Pela Proposição 2.3.10, temos

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(u) \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i)|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\|v(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(v) \sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{i=1}^{m}|\varphi(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

para qualquer escolha de $x_1, ..., x_m$ em X. A Desigualdade de Minkowski nos dá

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{m}\|(u+\lambda v)(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{i=1}^{m}(\|u(x_i)\|+\|\lambda v(x_i)\|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{m}\|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + |\lambda|\left(\sum_{i=1}^{m}\|v(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (\pi_{p,q}(u)+|\lambda|\,\pi_{p,q}(v)) \sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{i=1}^{m}|\varphi(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Logo $u+\lambda v \in \prod_{p,q}(X,Y)$.

Sejam $u, v \in \prod_{p,q}(X,Y)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\pi_{p,q}(u) \geq 0$$

e

$$\pi_{p,q}(u) = 0 \Leftrightarrow \|\hat{u}\| = 0 \Leftrightarrow \hat{u} = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Além disso,

$$\pi_{p,q}(\lambda u) = \left\|\widehat{\lambda u}\right\| = |\lambda|\,\|\hat{u}\| = |\lambda|\,\pi_{p,q}(u)$$

De (2.30), podemos perceber que vale a desigualdade triangular, e daí segue que $\pi_{p,q}$ é uma norma. ■

Observação 2.3.16 *Note que se $u \in \prod_{p,q}(X,Y)$, temos*

$$\|u\| \leq \pi_{p,q}(u).$$

De fato, tomando $n = 1$ em (2.20), temos

$$\|u\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\|u(x)\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1}\pi_{p,q}(u) \sup_{\varphi\in B_{X'}}|\varphi(x)| = \pi_{p,q}(u) \sup_{\|x\|\leq 1}\|x\| = \pi_{p,q}(u).$$

Lema 2.3.17 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e p' o seu conjugado. Se X é um espaço de Banach, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{p,w}(X)$ e $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{p'}$, então $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ converge.*

Demonstração. De fato, se $n > m$, temos

$$\begin{aligned}\|S_n - S_m\| &= \left\|\sum_{i=m+1}^{n} a_i x_i\right\| = \sup_{\varphi\in B_{X'}}\left|\varphi\left(\sum_{i=m+1}^{n} a_i x_i\right)\right| \\ &= \sup_{\varphi\in B_{X'}}\left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i \varphi(x_i)\right| \\ &\leq \left(\sum_{i=m+1}^{n}|a_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{i=m+1}^{n}|\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

e portanto $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em X. Logo $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ converge. ■

Se $1 \leq p < \infty$, pela caracterização do dual de l_p sabemos que para todo $\psi \in (l_p)'$, existe um único $a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{p'}$ com $\|a\| = \|\psi\|$ tal que

$$\psi(y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$$

para todo $y \in l_p$. Sejam X um espaço de Banach, $\varphi \in X'$ e $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{p,w}(X)$. Pelo Teorema de Hahn-Banach segue que

$$\|(\varphi(x_i))_{i=1}^{\infty}\|_p = \sup_{a \in B_{l_{p'}}} \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi(x_i) \right|.$$

Como $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{p,w}(X)$, temos, pelo Lema 2.3.17, que a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ é convergente. Portanto,

$$\begin{aligned} \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{p,w} &= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \|(\varphi(x_i))_{i=1}^{\infty}\|_p \\ &= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sup_{a \in B_{l_{p'}}} \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi(x_i) \right| \\ &= \sup_{a \in B_{l_{p'}}} \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left| \varphi\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right) \right| = \sup_{a \in B_{l_{p'}}} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\|. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Assim, dada uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{p,w}(X)$, podemos definir um operador linear

$$\begin{aligned} u : l_{p'} &\longrightarrow X \\ (a_i)_{i=1}^{\infty} &\longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\|u\| = \sup_{a \in B_{l_{p'}}} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\| \overset{(2.31)}{=} \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{p,w},$$

e concluímos que u é contínuo.

A partir dos resultados que acabamos de ver, temos a seguinte caracterização de $l_{p,w}(X)$, que se mostra surpreendentemente útil em algumas situações.

Proposição 2.3.18 *Seja X um espaço de Banach. A correspondência $u \longmapsto (ue_n)_{n=1}^{\infty}$ produz um isomorfismo isométrico de $\mathcal{L}(l_{p'}; X)$ em $l_{p,w}(X)$ quando $1 < p < \infty$. Para $p = 1$, o isomorfismo isométrico é de $\mathcal{L}(c_0; X)$ em $l_{1,w}(X)$.*

Demonstração. Caso $1 < p < \infty$. Seja

$$T : \mathcal{L}(l_{p'}; X) \longrightarrow l_{p,w}(X)$$

dado por

$$Tu = (ue_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Note que $(e_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{p,w}\left(l_{p'}\right)$. Com efeito, temos

$$\left\|(e_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_{p,w} = \sup_{\psi \in B_{\left(l_{p'}\right)'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\psi(e_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{(\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 1.$$

Segue facilmente que T está bem definido. De fato, se $\varphi \in X'$ temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(ue_n)|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi \circ u(e_n)|^p < \infty,$$

pois $\varphi \circ u \in \left(l_{p'}\right)'$ e $(e_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{p,w}\left(l_{p'}\right)$.

É claro que T é linear. Vejamos que T é isometria sobre a imagem:

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_{p,w} = \left\|(ue_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_{p,w} &= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(ue_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left\|(\varphi(ue_n))_{n=1}^{\infty}\right\|_p \\
&\overset{\text{Hahn-Banach}}{=} \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sup_{(y_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_{p'}}} \left|\sum_{n=1}^{\infty} y_n \varphi(ue_n)\right| = (*).
\end{aligned}$$

Como $(ue_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{p,w}(X)$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_{p'}}$, pelo Lema 2.3.17 segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n u(e_n)$$

converge. Logo

$$\begin{aligned}
(*) &= \sup_{(y_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_{p'}}} \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left|\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n u(e_n)\right)\right| \\
&= \sup_{(y_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_{p'}}} \left\|u\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n\right)\right\| \\
&= \sup_{(y_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_{p'}}} \left\|u\left((y_n)_{n=1}^{\infty}\right)\right\| = \|u\|.
\end{aligned}$$

Agora mostraremos que T é sobrejetiva. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{p,w}(X)$. Tome $u \in \mathcal{L}\left(l_{p'}; X\right)$ tal que

$$u\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$ue_n = x_n.$$

Portanto, $Tu = (ue_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. O caso $p = 1$ é análogo. ■

Definição 2.3.19 *Um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach, tal que, para quaisquer espaços de Banach X e Y, as componentes $\mathcal{I}(X;Y) = \mathcal{L}(X;Y) \cap \mathcal{I}$ satisfazem:*

(i) $\mathcal{I}(X;Y)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(X;Y)$ que contém os operadores de posto finito.

(ii) A propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(X;Y)$, $v \in \mathcal{I}(Y,G)$ e $t \in \mathcal{L}(G,H)$, então a composição tvu está em $\mathcal{I}(X;H)$.

Definição 2.3.20 *Um ideal normado de operadores $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal de operadores $\mathcal{I}$ munido da função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \longrightarrow [0,\infty)$ tal que:*

(i) $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ restrita a $\mathcal{I}(X;Y)$ é uma norma para quaisquer espaços de Banach X e Y;

(ii) $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$, com $id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $id_{\mathbb{K}}(x) = x$;

(iii) Se $u \in \mathcal{L}(X;Y)$, $v \in \mathcal{I}(Y;G)$, e $t \in \mathcal{L}(G;H)$, então $\|tvu\|_{\mathcal{I}} \leq \|t\| \|v\|_{\mathcal{I}} \|u\|$.

Um ideal normado é um ideal de Banach (ou ideal completo) se, para todos espaços de Banach X e Y, as componentes $(\mathcal{I}(X;Y), \|.\|_{\mathcal{I}})$ forem completas.

Teorema 2.3.21 *Se $1 \leq q \leq p < \infty$, então $\left(\prod_{p,q}(X;Y), \pi_{p,q}(\cdot)\right)$ é um ideal normado de operadores lineares.*

Demonstração. Já vimos que $\prod_{p,q}(X;Y)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(X;Y)$. Vamos mostrar que $\prod_{p,q}(X;Y)$ contém os operadores de posto finito. Seja $u : X \longrightarrow Y$ dado por $u = \varphi(\cdot)\, y$, com $0 \neq \varphi \in X'$ e $y \in Y$.

Considere $x_1, ..., x_m$ em X e $m \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{m} \|u(x_n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{n=1}^{m} \|y\varphi(x_n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{m} \|y\|^p \frac{\|\varphi\|^p}{\|\varphi\|^p} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|y\| \|\varphi\| \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{|\varphi(x_n)|^p}{\|\varphi\|^p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|y\| \|\varphi\| \sup_{\psi \in B_{X'}} \left(\sum_{n=1}^{m} |\psi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|y\| \|\varphi\| \sup_{\psi \in B_{X'}} \left(\sum_{n=1}^{m} |\psi(x_n)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Portanto, u é (p,q)-somante. Temos ainda que $\|y\| \|\varphi\| = \|u\| \leq \pi_{p,q}(u)$ e, de (2.32), $\pi_{p,q}(u) \leq \|y\| \|\varphi\|$, logo $\|y\| \|\varphi\| = \pi_{p,q}(u)$.

Se $v : X \longrightarrow Y$ é um operador de posto finito, temos

$$v = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(\cdot)\, y_j \text{ com } \varphi_j \in X' \text{ e } y_j \in Y, j = 1, ..., m.$$

Como $\varphi_j(\cdot)\, y_j \in \prod_{p,q}(X;Y)$ para cada $j = 1, ..., m$, e como $\prod_{p,q}(X;Y)$ é um espaço vetorial, temos que $v \in \prod_{p,q}(X;Y)$.

Agora sejam $w \in \mathcal{L}(X_0;X)$, $v \in \prod_{p,q}(X,Y)$ e $u \in \mathcal{L}(Y;Y_0)$. Considere os operadores

$$\begin{gathered}\hat{w}^w : l_{q,w}(X_0) \longrightarrow l_{q,w}(X) \\ \hat{v} : l_{q,w}(X) \longrightarrow l_p(Y) \\ \hat{u}^s : l_p(Y) \longrightarrow l_p(Y_0).\end{gathered}$$

Sabemos que $\|\hat{w}^w\| = \|w\|, \|\hat{v}\| = \pi_{p,q}(v)$ e $\|\hat{u}^s\| = \|u\|$. Assim, compondo estes operadores obtemos o operador

$$\hat{u}^s\hat{v}\hat{w}^w : l_{q,w}(X_0) \longrightarrow l_p(Y_0).$$

Então, se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{q,w}(X_0)$ temos

$$\begin{aligned}\hat{u}^s\hat{v}\hat{w}^w\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right) &= \hat{u}^s\hat{v}\left((wx_n)_{n=1}^{\infty}\right) \\ &= \hat{u}^s\left((vwx_n)_{n=1}^{\infty}\right) \\ &= (uvwx_n)_{n=1}^{\infty}.\end{aligned}$$

Logo, vemos que $\widehat{uvw}$ está bem definido e portanto $uvw \in \prod_{p,q}(X_0, Y_0)$, com

$$\pi_{p,q}(uvw) = \|\widehat{uvw}\| \leq \|\hat{u}^s\| \|\hat{v}\| \|\hat{w}^w\| = \|u\| \pi_{p,q}(v) \|w\|.$$

Note ainda que, para todo x em $\mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}\|x\| &= \|(x,0,0,...)\|_p = \|(id_{\mathbb{K}}x, id_{\mathbb{K}}0, id_{\mathbb{K}}0, ...)\|_p \\ &\leq \pi_{p,q}(id_{\mathbb{K}}) \|(x,0,0,...)\|_{q,w} = \pi_{p,q}(id_{\mathbb{K}}) \|x\|,\end{aligned} \tag{2.33}$$

e daí segue que $\pi_{p,q}(id_{\mathbb{K}}) \geq 1$.

Por outro lado, como $q \leq p$, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |id_{\mathbb{K}}(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |id_{\mathbb{K}}(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{\varphi \in B_{\mathbb{K}'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall (x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{p,w}(\mathbb{K}).\end{aligned} \tag{2.34}$$

Logo,

$$1 \overset{(2.33)}{\leq} \pi_{p,q}(id_{\mathbb{K}}) \overset{(2.34)}{\leq} 1.$$

■

Proposição 2.3.22 *Se $1 \leq q \leq p < \infty$, então $\left(\prod_{p,q}, \pi_{p,q}(\cdot)\right)$ é um ideal de Banach.*

Demonstração. Seja $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de Cauchy em $\left(\prod_{p,q}(X;Y), \pi_{p,q}(\cdot)\right)$. Como $\|\cdot\| \leq \pi_{p,q}(\cdot)$, segue que $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{L}(X;Y)$ e, portanto, converge para algum $u \in \mathcal{L}(X;Y)$. Defina

$$\hat{u} : l_{q,w}(X) \to l_{p,w}(Y) : (x_k)_{k=1}^{\infty} \to (ux_k)_{k=1}^{\infty}.$$

Note que $\hat{u}$ é um operador linear limitado. De fato, como $q \leq p$, temos

$$\|\hat{u}((x_k)_{k=1}^{\infty})\|_{p,w} = \|(ux_k)_{k=1}^{\infty}\|_{p,w} \leq \|u\| \|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_{p,w} \leq \|u\| \|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_{q,w}.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, seja

$$\hat{u}_n : l_{q,w}(X) \to l_p(Y) : (x_k)_{k=1}^{\infty} \to (u_nx_k)_{k=1}^{\infty}.$$

Como $\|\hat{u}_n\| = \pi_{p,q}(u_n)$, temos que $(\hat{u}_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}(l_{q,w}(X); l_p(Y))$ e, como $l_p(Y)$ é completo, segue que $\mathcal{L}(l_{q,w}(X); l_p(Y))$ é um espaço de Banach. Logo, $(\hat{u}_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para algum $w \in \mathcal{L}(l_{q,w}(X); l_p(Y))$.

Assim, dados $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{q,w}(X)$ e $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow \|\hat{u}_n((x_k)_{k=1}^{\infty}) - w((x_k)_{k=1}^{\infty})\|_p < \varepsilon.$$

Seja

$$(y_k)_{k=1}^{\infty} = w((x_k)_{k=1}^{\infty}) \in l_p(Y).$$

Logo,

$$n \geq N \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u_n x_k - y_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(u_n x_k)_{k=1}^{\infty} - (y_k)_{k=1}^{\infty}\|_p < \varepsilon.$$

Portanto, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$n \geq N \Rightarrow \|u_n x_k - y_k\| < \varepsilon, \tag{2.35}$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} u_n x_k = y_k, \tag{2.36}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $u_n \to u$ em $\mathcal{L}(X;Y)$ segue que

$$\lim_{n\to\infty} u_n x_k = u x_k \tag{2.37}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, de (2.36) e (2.37) temos

$$(u x_k)_{k=1}^{\infty} = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p(Y)$$

e conseqüentemente

$$\hat{u}((x_k)_{k=1}^{\infty}) = (u x_k)_{k=1}^{\infty} = (y_k)_{k=1}^{\infty} = w((x_k)_{k=1}^{\infty}) \text{ para todo } (x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{q,w}(X).$$

Logo, $\hat{u} = w \in \mathcal{L}(l_{q,w}(X); l_p(Y))$ e u é $(p;q)$-somante. ■

Teorema 2.3.23 (Teorema de Inclusão) *Sejam X e Y espaços de Banach. Suponha que $1 \leq q_j \leq p_j < \infty$ $(j = 1, 2)$ satisfazem*

$$\begin{cases} q_1 \leq q_2 \\ p_1 \leq p_2 \\ \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{q_2} - \frac{1}{p_2} \end{cases} \tag{2.38}$$

Então

$$\prod\nolimits_{p_1,q_1}(X;Y) \subset \prod\nolimits_{p_2,q_2}(X;Y)$$

e, para cada $u \in \prod_{p_1,q_1}(X;Y)$, temos $\pi_{p_2,q_2}(u) \leq \pi_{p_1,q_1}(u)$.

Demonstração. Se $q_1 = q_2 = q$, então $\prod_{p_1,q}(X;Y) \subset \prod_{p_2,q}(X;Y)$. Isso é claro, pois nesse caso $l_{p_1}(Y) \subset l_{p_2}(Y)$.

Se $q_1 < q_2$, então $p_1 < p_2$. De fato, quando $q_1 < q_2$, temos

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \geq \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} > 0.$$

Assim, podemos definir $1 < q, p < \infty$ por

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \text{ e } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}. \tag{2.39}$$

Sejam $u \in \prod_{p_1,q_1}(X;Y)$ e $x_1, ..., x_n$ em X, com $n \in \mathbb{N}$. Então, para

$$\lambda_k = \|ux_k\|^{p_2/p} \, (1 \leq k \leq n),$$

temos

$$\begin{aligned}\|u(\lambda_k x_k)\|^{p_1} &= \left\|u\left(\|ux_k\|^{p_2/p} x_k\right)\right\|^{p_1} \\ &= \left(\|ux_k\| \, \|ux_k\|^{p_2/p}\right)^{p_1} = \|ux_k\|^{(p_2 p_1/p)+p_1} = \|ux_k\|^{p_2}.\end{aligned}$$

Como u é $(p_1;q_1)$-somante, então

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} = \left(\sum_{k=1}^{n} \|u(\lambda_k x_k)\|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \pi_{p_1,q_1}(u) \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{q_1} |\varphi(x_k)|^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

Note que

$$\frac{1}{\frac{q}{q_1}} + \frac{1}{\frac{q_2}{q_1}} = 1.$$

Pela Desigualdade de Hölder para os conjugados $\frac{q}{q_1}$ e $\frac{q_2}{q_1}$, segue que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} &\leq \pi_{p_1,q_1}(u) \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} \\ &= \pi_{p_1,q_1}(u) \left\|(\lambda_k)_{k=1}^{n}\right\|_q \left\|(x_k)_{k=1}^{n}\right\|_{q_2,w}.\end{aligned}$$

Como $p \leq q$, segue que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} &\leq \pi_{p_1,q_1}(u) \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left\|(x_k)_{k=1}^{n}\right\|_{q_2,w} \\ &= \pi_{p_1,q_1}(u) \left(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p}} \left\|(x_k)_{k=1}^{n}\right\|_{q_2,w}.\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p}$, segue que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \pi_{p_1,q_1}(u) \left\|(x_k)_{k=1}^{n}\right\|_{q_2,w}.$$

Logo, $u \in \prod_{p_2,q_2}(X;Y)$ e $\pi_{p_2,q_2}(u) \leq \pi_{p_1,q_1}(u)$. ■

2.4 Resultados de coincidência para operadores (p, q)-somantes

Como vimos, o Teorema de Grothendieck garante que todo operador linear contínuo de l_1 em l_2 é absolutamente somante. Resultados desse tipo são chamados de resultados de coincidência.

Nesta seção, como motivação para as próximas seções, exibiremos, sem demonstração, alguns resultados clássicos e resultados recentes de coincidência. No próximo capítulo, resultados de coincidência serão abordados com mais profundidade para o caso de polinômios absolutamente somantes.

Definição 2.4.1 *Um espaço de Banach X tem cotipo q se existir uma constante $C > 0$ tal que, para qualquer escolha de um número finito de vetores $x_1, \ldots, x_n$ em X,*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\, x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.40}$$

Quando $q = \infty$ substituímos $\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ por $\max_{j \leq n} \|x_j\|$.

O ínfimo das constantes C tais que (2.40) vale é denotado por $C_q(X)$. De agora em diante denotaremos $\inf\{q; Y \text{ tem cotipo } q\}$ por $\cot Y$.

Um resultado importante devido a Talagrand (veja [16]) mostra a forte influência do conceito de cotipo na teoria de operadores absolutamente somantes.:

Teorema 2.4.2 *Se X é um espaço de Banach de cotipo q então a $id : X \longrightarrow X$ é $(q, 1)$-somante. A recíproca é verdadeira, exceto para $q = 2$.*

O resultado a seguir é devido a Dubinski, Pełczyński e Rosenthal [17]:

Teorema 2.4.3 *Seja Y um espaço de Banach com cotipo 2 e K um espaço de Hausforff compacto. Então*

$$\prod\nolimits_2 (C(K); Y) = \mathcal{L}(C(K); Y).$$

O caso em que Y tem cotipo $q > 2$ é devido a Maurey:

Teorema 2.4.4 *Seja Y um espaço de Banach com cotipo q, com $2 < q < \infty$ e K um espaço de Hausforff compacto. Então*

$$\prod\nolimits_{q,2} (C(K); Y) = \mathcal{L}(C(K); Y).$$

Também chamamos de resultados de coincidência a situações do tipo $\prod_p (X; Y) = \prod_q (X; Y)$ para certos p, q, X e Y. Nessa linha podemos mencionar o seguinte resultado devido a Maurey:

Teorema 2.4.5 *Sejam X e Y espaços de Banach.*

(a) Se X tem cotipo 2, então

$$\prod\nolimits_2 (X; Y) = \prod\nolimits_1 (X; Y).$$

(b) Se X tem cotipo $2 < q < \infty$, então

$$\prod_r (X;Y) = \prod_1 (X;Y)$$

para todo $1 < r < q^*$.

(c) Se X e Y têm cotipo 2, então

$$\prod_r (X;Y) = \prod_1 (X;Y)$$

para todo $1 < r < \infty$.

Recentemente, a seguinte caracterização de resultados de coincidência, para o caso em que Y não tem cotipo finito, foi obtida por G. Botelho e D. Pellegrino [11]:

Teorema 2.4.6 *Seja Y um espaço de Banach sem cotipo finito e X um espaço de Banach de dimensão infinita. Então*
(a) $\Pi_{q,p}(X;Y) \neq \mathcal{L}(X;Y)$ se

$$1 \leq q < \cot X \text{ ou } p \geq (\cot X)^*$$

ou

$$1 < p < (\cot X)^* \text{ e } q < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{(\cot X)^*}\right)^{-1}.$$

(b) $\Pi_{q,p}(X;Y) = \mathcal{L}(X;Y)$ se

$$p = 1 \text{ e } q > \cot X$$

ou

$$1 < p < (\cot X)^* \text{ e } q > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{(\cot X)^*}\right)^{-1}.$$

Os únicos casos não abrangidos pelo teorema anterior são
(i) $p = 1$ e $q = \cot X$,
(ii) $1 < p < (\cot X)^*$ e $q = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{(\cot X)^*}\right)^{-1}$.
Para espaços X que assumem o cotipo $\cot X$, a solução é completa:

Teorema 2.4.7 *Seja Y um espaço de Banach sem cotipo finito e X um espaço de Banach de dimensão infinita que assume o cotipo $\cot X$. Então $\Pi_{q;p}(X;Y) = \mathcal{L}(X;Y)$ se, e somente se,*

$$p = 1 \text{ e } q \geq \cot X$$

ou

$$1 < p < (\cot X)^* \text{ e } q \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{(\cot X)^*}\right)^{-1}.$$

Capítulo 3

Polinômios absolutamente (p, q)-somantes

3.1 Polinômios homogêneos e a definição de polinômio absolutamente somante

A partir desta seção, o objeto principal de nosso estudo serão polinômios homogêneos absolutamente somantes entre espaços de Banach. O conceito de polinômios entre espaços de Banach está fortemente relacionado ao conceito de aplicações multilineares entre espaços de Banach.

Definição 3.1.1 *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $X_1, X_2, ..., X_m$ e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação*

$$A : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$$

é m-linear se A for linear em cada variável. Mais precisamente, A é m-linear se para todos $x_1 \in X_1, ..., x_m \in X_m$ e $i = 1, ..., m$, os operadores

$$A(x_1, ..., x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, ..., x_m) : X_i \longrightarrow Y$$
$$A(x_1, ..., x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, ..., x_m)(y) = A(x_1, ..., x_{i-1}, y, x_{i+1}, ..., x_m)$$

forem lineares.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ denotamos o conjunto de todas as aplicações m-lineares de $X_1 \times \cdots \times X_m$ em Y por $L(X_1, ..., X_m; Y)$. O conjunto de todas as aplicações m-lineares contínuas de $X_1 \times \cdots \times X_m$ em Y é denotado por $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m, Y)$.

Definição 3.1.2 *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. A aplicação $P : X \longrightarrow Y$ é um polinômio m-homogêneo se existe $A \in L(^m X; Y)$ tal que $P(x) = A(x, ..., x)$ para todo $x \in X$. Dizemos que P é o polinômio m-homogêneo associado a A.*

O espaço de Banach formado por todos os polinômios m-homogêneos contínuos de X em Y com a norma

$$\|P\| := \sup_{\|x\|=1} \|P(x)\|$$

é denotado por
$$\mathcal{P}\left({}^{m}X;Y\right) \ \ (\text{ou } \mathcal{P}\left({}^{m}X\right) \ \text{ se } Y=\mathbb{K}).$$
Para mais detalhes sobre polinômios e aplicações multilineares entre espaços de Banach, indicamos [6, 30].

A teoria de polinômios absolutamente somantes se confunde com a teoria multilinear. Exceto por algumas raras questões que não serão abordadas neste texto, todo resultado da teoria multilinear tem sua versão para polinômios e vice-versa. Neste texto, por conveniência, trataremos apenas da teoria polinomial.

Definição 3.1.3 *Um polinômio m-homogêneo $P : X \longrightarrow Y$ é absolutamente (p,q)-somante (ou (p,q)-somante) se $(P(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{q,w}(X)$. O espaço de todos os polinômios m-homogêneos absolutamente (p,q)-somantes de X em Y é denotado por*
$$\mathcal{P}_{as(p,q)}\left({}^{m}X;Y\right) \ \ \left(ou\ \mathcal{P}_{as(p,q)}\left({}^{m}X\right) \ \ se\ Y=\mathbb{K}\right).$$

Quando $m=1$ temos o conceito original de operadores absolutamente somantes e nesse caso usamos a notação da teoria linear.

Assim como no caso linear, o caso polinomial dispõe de uma caracterização satisfatória através de desigualdades (veja [26]):

Proposição 3.1.4 *$P \in \mathcal{P}_{as(p,q)}\left({}^{m}X;Y\right)$ se, e somente se, existir uma constante $L>0$ tal que*
$$\left(\sum_{j=1}^{k}\left\|P(x_j)\right\|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq L\left\|(x_j)_{j=1}^{k}\right\|_{q,w}^{m} \ \ \forall k\in\mathbb{N} \ e\ x_j\in X,\ j=1,...,k.$$

O ínfimo de todos os $L>0$ para os quais a desigualdade sempre ocorre é uma norma para o caso $p\geq 1$ (uma p-norma para o caso $p<1$) no espaço dos polinômios m-homogêneos absolutamente (p,q)-somantes. Em todos os casos, temos um espaço topológico completo e esta norma (p-norma) será representada por $\|\cdot\|_{as(p,q)}$.

3.2 Resultados de coincidência para polinômios absolutamente somantes

A definição de polinômios absolutamente somantes permite vários resultados de coincidência. Historicamente, o primeiro resultado nessa direção é o chamado Teorema de Defant-Voigt (veja [26]):

Teorema 3.2.1 (Teorema de Defant-Voigt) *Se $m\geq 1$ e X é um espaço de Banach, então*
$$\mathcal{P}_{as(1,1)}\left({}^{m}X\right)=\mathcal{P}\left({}^{m}X\right).$$

Em 1997, no artigo [8] de G. Botelho a relação entre cotipo e polinômios absolutamente somantes começou a ser estudada e alguns resultados de coincidência envolvendo a noção de cotipo foram provados (esses resultados serão mencionados na última seção deste texto).

Recentemente, em sua dissertação de mestrado [36], David Pérez-García provou o seguinte resultado de coincidência, publicado em [37]:

Teorema 3.2.2 *Se $m \geq 2$, então*

$$\mathcal{P}_{as(1,2)}\left({}^{m}c_0\right) = \mathcal{P}\left({}^{m}c_0\right).$$

O caso $m = 2$ do teorema anterior havia sido obtido por Botelho em [8]. Resultados de coincidência relacionados ao teorema acima podem ser encontrados em [10].

Tendo em vista que o conceito de polinômios absolutamente somantes permite o aparecimento de vários resultados de coincidência, a busca de resultados de não-coincidência se torna natural e às vezes tecnicamente mais difícil. Esse tema (limitação de resultados de coincidência para polinômios) será abordado a seguir.

3.3 Limitação dos resultados de coincidência

Relembremos a definição de base de Schauder de um espaço de Banach:

Definição 3.3.1 *Seja X um espaço de Banach. Uma seqüência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder de X se cada $x \in X$ puder ser representado de maneira única como*

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j, \quad a_j \in \mathbb{K}. \tag{3.1}$$

Uma base de Schauder é dita incondicional se a convergência em (3.1) for incondicional para todo $x \in X$.

Se X é um espaço de Banach de dimensão infinita com uma base de Schauder incondicional normalizada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, definimos

$$\mu_{X,(x_n)} = \inf\left\{ t; (a_j)_{j=1}^{\infty} \in l_t \text{ sempre que } x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in X \right\}.$$

Para $X = c_0, l_1$ ou l_2, podemos escrever μ_X sem perigo de ambiguidades, pois toda base incondicional é equivalente à base canônica ([25, Prop. 2.b.9] e [19, Exercício 6.33]). Para $X = l_p, 1 < p < \infty, p \neq 2$, quando escervermos μ_X estaremos considerando a base canônica.

Para estudar a limitação de resultados de coincidência para o espaço dos polinômios m-homogêneos absolutamente (p,q)-somantes, a seguinte questão será investigada: Se X tem base de Schauder incondicional $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $\mathcal{P}_{as(p,q)}\left({}^{m}X;Y\right) = \mathcal{P}\left({}^{m}X;Y\right)$, como é o comportamento de $\mu_{X,(x_n)}$?

A definição seguinte pode ser encontrada em [16, pág 286].

Definição 3.3.2 *Sejam $0 < \delta < 1$ e $p \geq 2$. Um espaço de Banach Y fatora finitamente (ff) a inclusão formal $l_p \longrightarrow l_\infty$ para algum δ se, para todo n, existirem $y_1, \ldots, y_n$ em Y tais que*

$$(1-\delta)\left\|a\right\|_\infty \leq \left\| \sum_{k \leq n} a_k y_k \right\| \leq \left\|a\right\|_p \ \textit{para todo } a = (a_k)_{k=1}^{n} \in l_p^n.$$

Note que, para $a = (0, ..., 0, a_k, 0, ..., 0)$ temos, $(1-\delta)\left|a_k\right| \leq \left\|a_k y_k\right\| \leq \left|a_k\right|$ e então $1 - \delta \leq \left\|y_k\right\| \leq 1$ para todo k.

Os seguintes resultados foram obtidos por D. Pellegrino em [33] e [35] e fornecem alguns avanços na investigação de resultados de coincidência para polinômios absolutamente somantes. A técnica de demonstração baseia-se na demonstração de um resultado devido a Lindenstrauss e Pełczyński (veja [24]) que garante que se X tem base de Schauder incondicional, $\dim Y = \infty$ e $\prod_1 (X;Y) = \mathcal{L}(X;Y)$, então X é isomorfo a l_1 e Y é isomorfo a um espaço de Hilbert.

Teorema 3.3.3 *([33, Theorem 5]) Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita e suponha que X tenha uma base de Schauder incondicional e normalizada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Se Y fatora finitamente a inclusão formal $l_p \longrightarrow l_\infty$ para algum δ e $\mathcal{P}_{as(q,1)}(^m X;Y) = \mathcal{P}(^m X;Y)$, então*

(a) $\mu_{X,(x_n)} \leq \frac{mpq}{p-q}$ se $q < p$;

(b) $\mu_{X,(x_n)} \leq mq$ se $q \leq \frac{p}{2}$.

Teorema 3.3.4 *([35, Theorem 5]) Seja X um espaço de Banach de dimensão infinta com uma base de Schauder incondicional e normalizada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Se $\mathcal{P}_{as(q,1)}(^m X) = \mathcal{P}(^m X)$, então*

(a) $\mu_{X,(x_n)} \leq \frac{mq}{1-q}$ se $q < 1$;

(b) $\mu_{X,(x_n)} \leq mq$ se $q \leq \frac{1}{2}$.

Os teoremas acima foram recentemente generalizados por G. Botelho e D. Pellegrino em [9]. No presente capítulo vamos expor, de forma detalhada, os resultados de [9].

3.3.1 Um teorema de limitação para a validade de resultados de coincidência

O principal resultado do presente capítulo é o Teorema de Limitação (Teorema 3.3.6) que, como veremos, terá várias importantes conseqüências. O resultado fundamental que permite a demonstração do Teorema de Limitação é o seguinte lema, bastante técnico:

Lema 3.3.5 *Suponha que Y satisfaça a seguinte condição:*

Existem $C_1, C_2 > 0$ e $p \geq 1$ tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existem $y_1, \ldots, y_n$ em Y com $\|y_j\| \geq C_1$ para todo j e

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j y_j \right\| \leq C_2 \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right)^{1/p}$$

para todo $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.

Neste caso, se X tem uma base de Schauder incondicional normalizada $(x_r)_{r=1}^{\infty}$, $q < p$ e $\mathcal{P}_{as(q,1)}(^m X;Y) = \mathcal{P}(^m X;Y)$, então

$$\mu_{X,(x_n)} \leq mq.$$

Demonstração. Procederemos por indução. Primeiro vejamos o seguinte:

Se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
\left\|(z_j)_{j=1}^n\right\|_{1,w} &= \sup_{\varphi\in B_{X'}}\sum_{j=1}^n|\varphi(z_j)| \\
&= \sup_{\varphi\in B_{X'}}\sup_{\varepsilon_j=\pm1}\left|\sum_{j=1}^n\varepsilon_j\varphi(z_j)\right| \\
&= \sup_{\varepsilon_j=\pm1}\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left|\varphi\left(\sum_{j=1}^n\varepsilon_j z_j\right)\right| \\
&= \sup_{\varepsilon_j=\pm1}\left\|\sum_{j=1}^n\varepsilon_j z_j\right\| \\
&= \max_{\varepsilon_j=\pm1}\left\|\sum_{j=1}^n\varepsilon_j z_j\right\|.
\end{aligned}$$

Se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned}
\left\|(z_j)_{j=1}^n\right\|_{1,w} &= \sup_{\varphi\in B_{X'}}\sum_{j=1}^n|\varphi(z_j)| \qquad (3.2)\\
&\leq \sup_{\varphi\in B_{X'}}\left\{\sum_{j=1}^n|\mathrm{Re}(\varphi(z_j))|+\sum_{j=1}^n|\mathrm{Im}(\varphi(z_j))|\right\} \\
&\leq \sup_{\varphi\in B_{X'}}\sup_{\varepsilon_j=\pm1}\left\{\left|\sum_{j=1}^n\varepsilon_j\,\mathrm{Re}(\varphi(z_j))\right|\right\}+\sup_{\varphi\in B_{X'}}\sup_{\varepsilon_j=\pm1}\left\{\left|\sum_{j=1}^n\varepsilon_j\,\mathrm{Im}(\varphi(z_j))\right|\right\} \\
&\leq 2\sup_{\varphi\in B_{X'}}\max_{\varepsilon_j=\pm1}\left|\sum_{j=1}^n\varepsilon_j\varphi(z_j)\right| \\
&= 2\max_{\varepsilon_j=\pm1}\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left|\varphi\left(\sum_{j=1}^n\varepsilon_j z_j\right)\right| \\
&= 2\max_{\varepsilon_j=\pm1}\left\|\sum_{j=1}^n\varepsilon_j z_j\right\|.
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{P}_{as(q,1)}\left({}^mX;Y\right)=\mathcal{P}\left({}^mX;Y\right)$, segue que $id:\mathcal{P}_{as(q,1)}\left({}^mX;Y\right)\longrightarrow\mathcal{P}\left({}^mX;Y\right)$ é um operador linear, limitado e bijetivo. Logo, usando o Teorema da Aplicação Aberta segue que id^{-1} é limitado. Conseqüentemente, existe $K>0$ tal que

$$\|P\|_{as(q,1)}\leq K\|P\|$$

para todo polinômio m-homogêneo contínuo de X em Y.

Seja n um número natural fixado e $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ tal que $\sum_{j=1}^n |\mu_j|^s = 1$, onde $s = \frac{p}{q}$. Defina $P : X \longrightarrow Y$ por

$$Px = \sum_{j=1}^{n} |\mu_j|^{1/q} a_j^m y_j, \text{ se } x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j.$$

Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base incondicional, existe $\rho > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j a_j x_j \right\| \leq \rho \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right\| = \rho \left\| x \right\|, \text{ para todo } \varepsilon_j = \pm 1. \tag{3.3}$$

Logo,

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j a_j x_j \right\| \leq \rho \left\| x \right\|, \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ e para todo } \varepsilon_j = \pm 1. \tag{3.4}$$

De fato, basta tomar

$$\begin{cases} \eta_j = \varepsilon_j, \text{ se } j = 1, ..., k \\ \eta_j = -\varepsilon_j, \text{ se } j = k+1, ... \end{cases}$$

e daí temos

$$\begin{aligned} 2\left\| \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j a_j x_j \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j a_j x_j + \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j a_j x_j \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j a_j x_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j a_j x_j \right\| \\ &\overset{(3.3)}{\leq} 2\rho \left\| x \right\|, \end{aligned}$$

como queríamos.

De (3.4) temos que

$$\begin{aligned} |2a_j| &= \left\| \sum_{l=1}^{j} a_l x_l + \sum_{l=1}^{j-1} (-a_l x_l) + a_j x_j \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{l=1}^{j} a_l x_l \right\| + \left\| \sum_{l=1}^{j-1} (-a_l x_l) + a_j x_j \right\| \\ &\leq \rho \left\| x \right\| + \rho \left\| x \right\| \end{aligned} \tag{3.5}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e conseqüentemente

$$|a_j| \leq \rho \left\| x \right\|$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Então

$$\|Px\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} |\mu_j|^{1/q} a_j^m y_j\right\| \leq C_2 \left(\sum_{j=1}^{n} \left||\mu_j|^{1/q} a_j^m\right|^p\right)^{1/p} \tag{3.6}$$
$$= C_2 \left(\sum_{j=1}^{n} |\mu_j|^{p/q} \left|a_j^m\right|^p\right)^{1/p}$$
$$\leq C_2 \rho^m \|x\|^m \left(\sum_{j=1}^{n} |\mu_j|^s\right)^{1/p} = C_2 \rho^m \|x\|^m$$

e como conseqüência temos

$$\|P\| \leq C_2 \rho^m \text{ e}$$
$$\|P\|_{as(q,1)} \leq K C_2 \rho^m.$$

Assim, obtemos a estimativa

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \left|a_j^m |\mu_j|^{1/q} C_1\right|^q\right)^{1/q} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \left\|a_j^m |\mu_j|^{1/q} y_j\right\|^q\right)^{1/q} = \left(\sum_{j=1}^{n} \|P a_j x_j\|^q\right)^{1/q} \tag{3.7}$$
$$\leq \|P\|_{as(q,1)} \left\|(a_j x_j)_{j=1}^n\right\|_{1,w}^m$$
$$\overset{(3.2)}{\leq} \|P\|_{as(q,1)} 2^m \max_{\varepsilon_j = \pm 1} \left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j x_j\right\|\right\}^m$$
$$\leq \|P\|_{as(q,1)} 2^m \rho^m \|x\|^m$$
$$\leq K C_2 2^m \rho^{2m} \|x\|^m.$$

Note que o lado direito da desigualdade acima é garantido sempre que $\sum_{j=1}^n |\mu_j|^s = 1$. Assim, como $\frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{s}{s-1}} = 1$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^{\frac{s}{s-1} mq}\right)^{1/\left(\frac{s}{s-1}\right)} = \sup_{\varphi \in B_{\left(l^n_{\frac{s}{s-1}}\right)'}} \left|\varphi\left(\left(|a_j|^{mq}\right)_{j=1}^n\right)\right|$$

e, pelo Teorema da Representação de Riesz,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^{\frac{s}{s-1} mq}\right)^{1/\left(\frac{s}{s-1}\right)} = \sup_{(\mu_j)_{j=1}^n \in B_{l_s^n}} \left|\sum_{j=1}^{n} \mu_j |a_j|^{mq}\right|$$
$$= \sup \left\{\left|\sum_{j=1}^{n} \mu_j |a_j|^{mq}\right| ; \sum_{j=1}^{n} |\mu_j|^s = 1\right\}$$
$$\leq \sup \left\{\sum_{j=1}^{n} |\mu_j| |a_j|^{mq} ; \sum_{j=1}^{n} |\mu_j|^s = 1\right\}.$$

Por (3.7) temos

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^{\frac{s}{s-1}mq}\right)^{1/\left(\frac{s}{s-1}\right)} \leq \left(C_1^{-1}KC_2 2^m\rho^{2m}\|x\|^m\right)^q,$$

e portanto

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^{\frac{s}{s-1}mq}\right)^{1/\left(\frac{s}{s-1}\right)mq} \leq \left(C_1^{-1}KC_2 2^m\rho^{2m}\|x\|^m\right)^{1/m}. \tag{3.8}$$

Como $\frac{s}{s-1}mq = \frac{mpq}{p-q}$ e n é arbitrário, segue que

$$\mu_{X,(x_n)} \leq \frac{mpq}{p-q}.$$

Agora, se $q \leq p/2$, defina, para um n fixado, $S : X \longrightarrow Y$ por

$$Sx = \sum_{j=1}^{n} a_j^m y_j \text{ se } x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j. \tag{3.9}$$

Note que, para $q \leq p/2$, temos $mp \geq \frac{s}{s-1}mq$. Usando (3.8) obtemos

$$\begin{aligned}
\|Sx\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j^m y_j\right\| &\leq C_2\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_j^m\right|^p\right)^{1/p} \\
&= C_2\left[\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^{mp}\right)^{1/mp}\right]^m \\
&\leq C_2\left[\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^{\frac{s}{s-1}mq}\right)^{1/\frac{s}{s-1}mq}\right]^m \\
&\leq C_1^{-1}KC_2^2 2^m\rho^{2m}\|x\|^m.
\end{aligned}$$

Concluímos que $\|S\| \leq C_1^{-1}KC_2^2 2^m\rho^{2m}$ e

$$\|S\|_{as(q,1)} \leq C_1^{-1}K^2C_2^2 2^m\rho^{2m}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\left|a_j^m C_1\right|^q \leq \sum_{j=1}^{n}\left\|a_j^m y_j\right\|^q &= \sum_{j=1}^{n}\|Sa_jx_j\|^q \\
&\leq \|S\|_{as(q,1)}^q\left\|(a_jx_j)_{j=1}^n\right\|_{1,w}^{mq} \\
&\leq \|S\|_{as(q,1)}^q\, 2^{mq}\max_{\varepsilon_j=\pm1}\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j a_j x_j\right\|\right\}^{mq} \\
&\leq \left(C_1^{-1}K^2C_2^2 2^m\rho^{2m}\right)^q 2^{mq}\rho^{mq}\|x\|^{mq} \\
&= \left(C_1^{-1}K^2C_2^2 4^m\rho^{3m}\right)^q\|x\|^{mq}.
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, como n é arbitrário, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^{mq} \leq \left(C_1^{-2} K^2 C_2^2 4^m \rho^{3m}\right)^q \|x\|^{mq}$$

sempre que $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in X$ e, portanto,

$$\mu_{X,(x_n)} \leq mq$$

se $q \leq p/2$.

Agora introduzimos as hipóteses de indução:

(i) $\mu_{X,(x_n)} \leq \frac{mpq}{jp-jq}$ e $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{mpq}{jp-jq}}\right)^{1/\frac{mpq}{jp-jq}} \leq A_j \|x\|$, se $\frac{jp}{j+1} < q < p$,

(ii) $\mu_{X,(x_n)} \leq mq$ e $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{mq}\right)^{1/mq} \leq B_j \|x\|$, se $q \leq \frac{jp}{j+1}$,

com

- $A_1 = \left(C_1^{-1} C_2 K 2^m \rho^{2m}\right)^{1/m}$,
- $B_1 = \left(C_1^{-2} C_2^2 K^2 4^m \rho^{3m}\right)^{1/m}$,
- $A_j = \left(C_1^{-1} C_2 K 2^m \rho^m A_{j-1}^m\right)^{1/m}$ para $j \geq 2$,
- $B_j = \left(C_1^{-2} C_2^2 K^2 4^m \rho^{2m} A_{j-1}^m\right)^{1/m}$ para $j \geq 2$.

Note que o caso $j = 1$ já foi feito. Suponhamos que (i) e (ii) sejam verdadeiras para j e provaremos que também são verdadeiras para $j+1$. Para provar (i) para $j+1$, suponha

$$\frac{(j+1)\,p}{j+2} < q < p.$$

Fixe n e considere $\{\mu_j\}_{j=1}^{n}$ tal que $\sum_{j=1}^{n} |\mu_j|^{s_j} = 1$, onde

$$s_j = \frac{p}{(j+1)\,q - jp}.$$

Defina $P_j : X \longrightarrow Y$ por

$$P_j x = \sum_{k=1}^{n} |\mu_k|^{1/q} a_k^m y_k, \text{ se } x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Tomando

$$l_j = \frac{pq}{jp - jq} \text{ e } t_j = \frac{pq}{(j+1)\,q - jp},$$

temos

$$\frac{1}{t_j} + \frac{1}{l_j} = \frac{1}{p} \text{ e } m l_j = \frac{mpq}{jp - jq}.$$

Logo, por uma variação da Desigualdade de Hölder usual **(A11)**, temos

$$\begin{aligned}
\|P_j x\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n} |\mu_k|^{1/q} a_k^m y_k \right\| \leq C_2 \left(\sum_{k=1}^{n} \left| |\mu_k|^{1/q} a_k^m \right|^p \right)^{1/p} \\
&\leq C_2 \left(\sum_{k=1}^{n} \left| |\mu_k|^{1/q} \right|^{t_j} \right)^{1/t_j} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k^m|^{l_j} \right)^{1/l_j} \\
&= C_2 \left(\sum_{k=1}^{n} |\mu_k|^{s_j} \right)^{1/t_j} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{ml_j} \right)^{1/ml_j} \right]^m \\
&\leq C_2 A_j^m \|x\|^m .
\end{aligned}$$

Usando a notação $L = C_2 A_j^m$, obtemos $\|P_j\| \leq L$ e

$$\|P_j\|_{as(q,1)} \leq KL.$$

Segue, portanto, que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} \left| a_k^m |\mu_k|^{1/q} C_1 \right|^q \right)^{1/q} &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} \left\| a_k^m |\mu_k|^{1/q} y_k \right\|^q \right)^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^{n} \|P_j a_k x_k\|^q \right)^{1/q} \\
&\leq \|P_j\|_{as(q,1)} \left\| (a_k x_k)_{k=1}^n \right\|_{1,w}^m \\
&\overset{(3.2)}{\leq} \|P_j\|_{as(q,1)} 2^m \max_{\varepsilon_k = \pm 1} \left\{ \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k x_k \right\| \right\}^m \\
&\leq \|P_j\|_{as(q,1)} 2^m \rho^m \|x\|^m \\
&\leq KL 2^m \rho^m \|x\|^m . \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{s_j} + \frac{1}{\frac{s_j}{s_j - 1}} = 1$, temos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{s_j}{s_j-1} mq} \right)^{1/\left(\frac{s_j}{s_j-1}\right)} = \sup \left\{ \left| \varphi\left((|a_k|^{mq})_{k=1}^n \right) \right| ; \varphi \in \left(l^n_{\frac{s_j}{s_j-1}} \right)' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1 \right\}.$$

Como $\left(l^n_{\frac{s_j}{s_j-1}} \right)'$ é isometricamente isomorfo a $l^n_{s_j}$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{s_j}{s_j-1} mq} \right)^{1/\left(\frac{s_j}{s_j-1}\right)} &= \sup_{(\mu_k)_{k=1}^n \in B_{l^n_{s_j}}} \left| \sum_{k=1}^{n} \mu_k |a_k|^{mq} \right| \\
&= \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} \mu_k |a_k|^{mq} \right| ; \sum_{k=1}^{n} |\mu_k|^{s_j} = 1 \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\mu_k| |a_k|^{mq} ; \sum_{k=1}^{n} |\mu_k|^{s_j} = 1 \right\} . \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Note que (3.10) é válida sempre que $\sum_{k=1}^{n} |\mu_k|^s = 1$. Assim, de (3.10) e (3.11) segue que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{s_j}{s_j-1}mq}\right)^{1/\left(\frac{s_j}{s_j-1}\right)} \leq \left(C_1^{-1}KL2^m\rho^m \|x\|^m\right)^q,$$

e então

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{s_j}{s_j-1}mq}\right)^{1/\left(\frac{s_j}{s_j-1}\right)mq} \leq \left(C_1^{-1}KL2^m\rho^m \|x\|^m\right)^{1/m}.$$

Como $\frac{s_j}{s_j-1}mq = \frac{mpq}{(j+1)p-(j+1)q}$ e n é arbitrário, obtemos

$$\mu_{X,(x_n)} \leq \frac{mpq}{(j+1)\,p-(j+1)\,q}$$

e

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{\frac{mpq}{(j+1)p-(j+1)q}}\right)^{1/\frac{mpq}{(j+1)p-(j+1)q}} \leq \left(C_1^{-1}C_2K2^m\rho^m A_j^m\right)^{1/m} \|x\| = A_{j+1}\|x\|.$$

Logo, (i) é válido para $j+1$. Para provar (ii) para $j+1$, suponha $q \leq \frac{(j+1)p}{j+2}$. Considere, para n fixado, o operador S como definido em (3.9). Como

$$mp \geq \frac{mpq}{(j+1)\,p-(j+1)\,q} = \frac{s_j}{s_j-1}mq,$$

temos que

$$\begin{aligned}
\|Sx\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k^m y_k\right\| &\leq C_2\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k^m|^p\right)^{1/p}\\
&= C_2\left[\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{mp}\right)^{1/mp}\right]^m\\
&\leq C_2\left[\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{s_j}{s_j-1}mq}\right)^{1/\frac{s_j}{s_j-1}mq}\right]^m\\
&\leq C_2C_1^{-1}KL2^m\rho^m\|x\|^m.
\end{aligned}$$

Assim, $\|S\| \leq C_2C_1^{-1}KL2^m\rho^m$ e $\|S\|_{as(q,1)} \leq C_2C_1^{-1}K^2L2^m\rho^m$. Logo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |a_k^m C_1|^q \leq \sum_{k=1}^{n} \|a_k^m y_k\|^q = \sum_{k=1}^{n} \|Sa_kx_k\|^q
&\leq \|S\|_{as(q,1)}^q \|(a_kx_k)_{k=1}^n\|_{1,w}^{mq}\\
&\leq \|S\|_{as(q,1)}^q\, 2^{mq} \max_{\varepsilon_k=\pm1}\left\{\left\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k a_k x_k\right\|\right\}^{mq}\\
&\leq \left(C_1^{-1}C_2K^2L2^m\rho^m\right)^q 2^{mq}\rho^{mq}\|x\|^{mq}\\
&= \left(C_1^{-1}C_2K^2L4^m\rho^{2m}\right)^q \|x\|^{mq}.
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, como n é arbitrário, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^{mq} \leq \left(C_1^{-2} C_2^2 K^2 4^m \rho^{2m} A_j^m\right)^q \|x\|^{mq}$$

sempre que $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in X$ e portanto provamos (ii) para $j+1$. A indução está feita.

Finalmente, como $\lim_{j\to\infty} \frac{jp}{j+1} = p$, temos que se $q < p$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$q \leq \frac{j_0 p}{j_0 + 1} < p,$$

e portanto

$$\mu_{X,(x_n)} \leq mq.$$

■

Teorema 3.3.6 (Teorema de Limitação) *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita com uma base incondicional normalizada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $\mathcal{P}_{as(q,1)}\left({}^m X; Y\right) = \mathcal{P}\left({}^m X; Y\right)$. Então*

$$\mu_{X,(x_n)} \leq mq,$$

se

(i) $q < 1$ *e* $\dim Y < \infty$;

(ii) $q < \cot Y$ *e* $\dim Y = \infty$.

Demonstração. (i) Como espaços de Banach de mesma dimensão finita são isomorfos, é suficiente tratarmos o caso $Y = \mathbb{K}^n$. Além disso, temos apenas a necessidade de tratar o caso $n = 1$. De fato, se $\mathcal{P}_{as(q,1)}\left({}^m X; \mathbb{K}^n\right) = \mathcal{P}\left({}^m X; \mathbb{K}^n\right)$, temos $\mathcal{P}_{as(q,1)}\left({}^m X; \mathbb{K}\right) = \mathcal{P}\left({}^m X; \mathbb{K}\right)$. De fato, dado $P \in \mathcal{P}\left({}^m X; \mathbb{K}\right)$, considere $Q : X \longrightarrow \mathbb{K}^n$ dado por $Qx = (Px, 0, ..., 0)$; com isso, temos $Q \in \mathcal{P}\left({}^m X; \mathbb{K}^n\right) = \mathcal{P}_{as(q,1)}\left({}^m X; \mathbb{K}^n\right)$. Logo, dados $k \in \mathbb{N}$ e $x_j \in X$, $j = 1, ..., k$, obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |P(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^{k} \|Q(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq L \left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{1,w}^m$$

com L independente de k. Portanto, $P \in \mathcal{P}_{as(q,1)}\left({}^m X; \mathbb{K}\right)$. E para o caso $n = 1$ é suficiente aplicar o Lema 3.3.5 com $p = C_1 = C_2 = y_1 = \cdots = y_n = 1$.

(ii) A demonstração será dividida em dois casos:

Se $q < 2$, de [16, Theorem 14.2] sabemos que Y fatora finitamente a inclusão $l_2 \longrightarrow l_\infty$. Então, é suficiente escolher $p = 2$ no Lema 3.3.5.

Se $2 \leq q < \cot Y$, como Y fatora finitamente a inclusão $l_{\cot Y} \longrightarrow l_\infty$ (veja [16, página 304]), basta aplicar o Lema 3.3.5 para $p = \cot Y$. ■

3.3.2 Conseqüências do Teorema de Limitação

Como veremos nesta seção, o Teorema de Limitação pode ser bastante explorado e tem vários resultados interessantes como aplicações relativamente imediatas. O primeiro corolário, enunciado propositalmente para o caso especial $m = 1$, mostra que mesmo no contexto linear o Teorema de Limitação traz informações interessantes e não-triviais.

Corolário 3.3.7 *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita com uma base incondicional normalizada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e Y um espaço de Banach de dimensão infinita. Se $q < \cot Y$ e $\mu_{X,(x_n)} > q$, então $\prod_{q,1}(X;Y) \neq \mathcal{L}(X;Y)$.*

Demonstração. Considere $m = 1$ no Teorema 3.3.6. Note que a hipótese $\mu_{X,(x_n)} > q$ nega a tese do Teorema 3.3.6. E, neste caso, só nos resta concluir que não pode ocorrer a coincidência $\prod_{q,1}(X;Y) = \mathcal{L}(X;Y)$. ■

Corolário 3.3.8 *Se Y é um espaço de Banach de dimensão infinita e $\prod_{q,1}(c_0;Y) = \mathcal{L}(c_0;Y)$, então $q \geq \cot Y$.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que $\mu_{c_0} = \infty$. De fato, sempre que $\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j \in c_0$, teremos $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in l_\infty$. Agora, vejamos que não podemos substituir l_∞ por l_t com $t < \infty$. Para isso, basta considerar $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(1/n^{\frac{1}{t}}\right)_{n=1}^{\infty}$ e notar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{t}}} e_n \in c_0,$$

mas $\left(1/n^{\frac{1}{t}}\right)_{n=1}^{\infty} \notin l_t$. Logo, $\mu_{c_0} \geq t$.

Com isso, como $\prod_{q,1}(c_0;Y) = \mathcal{L}(c_0;Y)$ e $\mu_{c_0} > q$, segue, do Corolário 3.3.7, que $q \geq \cot Y$. ■

O resultado a seguir é devido a Botelho [8]. Como esse resultado será usado por diversas vezes neste texto, apresentamos uma demonstração.

Teorema 3.3.9 *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $q > 0$ e X, Y espaços de Banach.*

(i) Se X tem cotipo nq, então todo polinômio n-homogêneo contínuo de X em Y é $(q;1)$-somante.

(ii) Se Y tem cotipo q, então todo polinômio n-homogêneo contínuo de X em Y é $(q,1)$-somante.

Demonstração. (i) Pelo Teorema 2.4.2, id_X é $(nq,1)$-somante. Dados $x_1,...,x_k \in X$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{k}\|P(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^{k}\|P(id_X(x_j))\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|P\|\left(\sum_{j=1}^{k}\|id_X(x_j)\|^{nq}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|P\|\left[\left(\sum_{j=1}^{k}\|id_X(x_j)\|^{nq}\right)^{\frac{1}{nq}}\right]^n \\
&\leq \|P\|\,\|id_X\|_{as(nq,1)}^n \left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{1,w}^n .
\end{aligned}$$

(ii) Como Y tem cotipo q, sabemos que id_Y é $(q,1)$-somante. Logo

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{k}\|P(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \|id_Y\|_{as(q,1)}\left\|(P(x_j))_{j=1}^k\right\|_{1,w} \\
&= \|id_Y\|_{as(q,1)}\sup_{\|\varphi\|\leq 1}\sum_{j=1}^{k}|\varphi(P(x_j))| \\
&= \|id_Y\|_{as(q,1)}\sup_{\|\varphi\|\leq 1}\sum_{j=1}^{k}|(\varphi\circ P)(x_j)| \\
&\overset{\text{Teorema de Defant-Voigt}}{\leq} \|id_Y\|_{as(q,1)}\sup_{\|\varphi\|\leq 1}\|\varphi\circ P\|_{as(1,1)}\left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{1,w}^n \\
&\overset{\text{Teorema da Aplic. Aberta}}{\leq} \|id_Y\|_{as(q,1)}\sup_{\|\varphi\|\leq 1}C\,\|\varphi\circ P\|\left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{1,w}^n \\
&\leq C\,\|id_Y\|_{as(q,1)}\,\|P\|\left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{1,w}^n ,
\end{aligned}$$

para algum $C > 0$ (que existe pelo Teorema da Aplicação Aberta). ■

Corolário 3.3.10 *Se Y tem cotipo q, então*

$$\inf\left\{q; \prod_{q,1}(c_0;Y) = \mathcal{L}(c_0;Y)\right\} = \cot Y.$$

Demonstração. Do Corolário 3.3.8, segue que

$$\inf\left\{q; \prod_{q,1}(c_0;Y) = \mathcal{L}(c_0;Y)\right\} \geq \cot Y. \tag{3.12}$$

Do Teorema 3.3.9, sabemos que se Y tem cotipo q, então

$$\prod_{q,1}(c_0;Y)=\mathcal{L}(c_0;Y).$$

Logo,

$$\inf\left\{q;\prod_{q,1}(c_0;Y)=\mathcal{L}(c_0;Y)\right\}\leq \cot Y. \tag{3.13}$$

e, de (3.12) e (3.13) o resultado segue. ■

Corolário 3.3.11 *Se X tem uma base de Schauder incondicional normalizada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $\mu_{X,(x_n)} > \cot Y$, então*

$$\inf\left\{q;\prod_{q,1}(X;Y)=\mathcal{L}(X;Y)\right\}=\cot Y.$$

Demonstração. Do Teorema 3.3.9 segue que

$$\inf\left\{q;\prod_{q,1}(X;Y)=\mathcal{L}(X;Y)\right\}\leq \cot Y.$$

Suponhamos que a desigualdade acima fosse estrita:

$$\inf\left\{q;\prod_{q,1}(X;Y)=\mathcal{L}(X;Y)\right\}< \cot Y.$$

Então, existiria $q' < \cot Y$ com $\prod_{q',1}(X;Y)=\mathcal{L}(X;Y)$. Como $\mu_{X,(x_n)} > \cot Y > q'$, pelo Corolário 3.3.7, seguiria que $\prod_{q',1}(X;Y)\neq\mathcal{L}(X;Y)$ (contradição). ■

Observação 3.3.12 *Notemos que o Teorema 3.3.6 é ótimo sob vários aspectos:*

- Em (i) não podemos esperar que o resultado seja válido para $q \geq 1$. De fato, pelo Teorema de Defant-Voigt, $\mathcal{P}_{as(1,1)}\left({}^2l_3\right)=\mathcal{P}\left({}^2l_3\right)$ (veja [26, Proposition 2.12]) e $\mu_{l_3}=3>2=mq$.
- Em (ii) não podemos esperar que o resultado seja válido para $q\geq \cot Y$. De fato, como l_2 tem cotipo 2, temos $\prod_{2,1}(c_0;l_2)=\mathcal{L}(c_0;l_2)$ e $\mu_{c_0}=\infty>2=mq$.
- A estimativa mq também é ótima. De fato, para $q\geq\frac{2}{m}$ temos, pelo Teorema 3.3.9, que $\mathcal{P}_{as(q,1)}\left({}^m l_{mq};Y\right)=\mathcal{P}\left({}^m l_{mq};Y\right)$ para todo Y. Mas $\mu_{l_{mq}}=mq$, mostrando que a estimativa não pode ser melhorada.

Uma outra conseqüência do Teorema 3.3.6 é um resultado mostrando todos os possíveis resultados de coincidência para polinômios $(q,1)$-somantes nos espaços l_r $(r\geq 2)$:

Corolário 3.3.13 *Seja $m \in \mathbb{N}$.*

(i) *Se $r \geq 1, \dim Y = \infty$ e Y tem cotipo* $\cot Y$, *temos*

$$\mathcal{P}_{as(q,1)}\left({}^m l_r; Y\right) = \mathcal{P}\left({}^m l_r; Y\right) \Rightarrow q \geq \min\left\{\frac{r}{m}, \cot Y\right\}.$$

(ii) *Se $r \geq 2, \dim Y = \infty$ e Y tem cotipo* $\cot Y$, *temos*

$$\mathcal{P}_{as(q,1)}\left({}^m l_r; Y\right) = \mathcal{P}\left({}^m l_r; Y\right) \Leftrightarrow q \geq \min\left\{\frac{r}{m}, \cot Y\right\}.$$

(iii) *Para $r \geq 2$, temos*

$$\mathcal{P}_{as(q,1)}\left({}^m l_r\right) = \mathcal{P}\left({}^m l_r\right) \Leftrightarrow q \geq \min\left\{\frac{r}{m}, 1\right\}.$$

Demonstração. (i) Suponha

$$q < \min\left\{\frac{r}{m}, \cot Y\right\}. \tag{3.14}$$

Como $q < \cot Y$, l_r tem base incondicional e

$$\mathcal{P}_{as(q,1)}\left({}^m l_r; Y\right) = \mathcal{P}\left({}^m l_r; Y\right),$$

temos, pelo Teorema 3.3.6, que $r = \mu_{l_r} \leq mq$, e isso contradiz (3.14).

(ii) Vamos provar a direção $(\Leftarrow)$ supondo

$$q \geq \min\left\{\frac{r}{m}, \cot Y\right\}.$$

Então, $q \geq \frac{r}{m}$ ou $q \geq \cot Y$.

Se $q \geq \frac{r}{m}$, como l_r tem cotipo r, segue que l_r tem cotipo mq e o Teorema 3.3.9 assegura que

$$\mathcal{P}_{as(q,1)}\left({}^m l_r; Y\right) = \mathcal{P}\left({}^m l_r; Y\right).$$

Se $q \geq \cot Y$, como Y tem cotipo $\cot Y$, temos, pelo Teorema 3.3.9,

$$\mathcal{P}_{as(\cot Y,1)}\left({}^m l_r; Y\right) = \mathcal{P}\left({}^m l_r; Y\right)$$

e segue que

$$\mathcal{P}\left({}^m l_r; Y\right) = \mathcal{P}_{as(\cot Y,1)}\left({}^m l_r; Y\right) \subset \mathcal{P}_{as(q,1)}\left({}^m l_r; Y\right) \subset \mathcal{P}\left({}^m l_r; Y\right).$$

Logo, $\mathcal{P}_{as(q,1)}\left({}^m l_r; Y\right) = \mathcal{P}\left({}^m l_r; Y\right)$.

A demonstração de $(\Rightarrow)$ é conseqüência imediata de (i).

(iii) Vamos demonstrar $(\Leftarrow)$, supondo

$$q \geq \min\left\{\frac{r}{m}, 1\right\}.$$

Então $q \geq 1$ ou $q \geq \frac{r}{m}$.

Se $q \geq 1$, pelo teorema de Defant-Voigt, temos que

$$\mathcal{P}_{as(q,1)}\left({}^m l_r\right) = \mathcal{P}\left({}^m l_r\right).$$

Se $q \geq \frac{r}{m}$, como l_r tem cotipo r, segue que l_r tem cotipo mq e o Teorema 3.3.9 garante que

$$\mathcal{P}_{as(q,1)}\left({}^m l_r\right) = \mathcal{P}\left({}^m l_r\right).$$

Para demonstrar ($\Rightarrow$), suponha

$$\mathcal{P}_{as(q,1)}\left({}^m l_r\right) = \mathcal{P}\left({}^m l_r\right).$$

Se fosse $q < \min\left\{\frac{r}{m}, 1\right\}$, teríamos $\mu_{l_r} = r > mq$, mas isso contradiz (i) do Teorema 3.3.6. Logo, segue que $q \geq \min\left\{\frac{r}{m}, 1\right\}$. ■

Por fim, vejamos como o Corolário 3.3.13 traz contribuições para a teoria linear de operadores absolutamente somantes:

Observação 3.3.14 *Um resultado devido (independentemente) a G. Bennet [4] e B. Carl [13] (veja também [16, página 209]) garante que se* $1 \leq r \leq s \leq \infty$ *e* $s \geq 2$, *então a inclusão* $l_r \longrightarrow l_s$ *é* $(r,1)$*-somante e que este resultado não pode ser melhorado. Desta maneira, temos a não-coincidência*

$$\prod\nolimits_{q,1}(l_r; l_s) \neq \prod(l_r; l_s)$$

nos casos em que $1 \leq q < r$ *e* $s \geq 2$, *com* $r \leq s$.

Nos seguintes casos:

(i) $1 < r < 2$ *ou*

(ii) $r, s \geq 2$ *e* $q < r = \min\{r, s\}$,

o Corolário 3.3.13 (com $m = 1$*) estende a não-coincidência no sentido de que* l_s *pode ser substituído por um espaço de Banach de dimensão infinita* Y *que assume o cotipo* $s = \cot Y$.

Capítulo 4

Anexos (Resultados auxiliares)

Definição 4.0.15 *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $n \times n$. O traço de A, denotado por $tr\,(A)$, é definido como sendo a soma dos elementos da diagonal principal, ou seja,*

$$tr\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Definição 4.0.16 *Sejam F um espaço vetorial de dimensão finita n, α uma base para F e $\omega : F \to F$ um operador linear. O traço de ω, $tr\,(\omega)$, é definido como sendo o traço da matriz associada a base α. Veremos, em (A4), que essa definição é coerente.*

A1. Se A é uma matriz de ordem $n \times n$, então $\det(id + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon trA + c\,(\varepsilon)$ onde $\varepsilon \in \mathbb{K}$ e $|c\,(\varepsilon)| = O\left(|\varepsilon|^2\right)$, isto é,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|c\,(\varepsilon)|}{\varepsilon} = 0.$$

A prova será feita por indução sobre n. Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Para $n = 2$:

$$\begin{aligned} \det(id + \varepsilon A) &= \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} \\ \varepsilon a_{21} & 1 + \varepsilon a_{22} \end{vmatrix} = (1 + \varepsilon a_{11})(1 + \varepsilon a_{22}) - \varepsilon^2 a_{21} a_{12} \\ &= 1 + \varepsilon (a_{11} + a_{22}) + \varepsilon^2 (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) \\ &= 1 + \varepsilon trA + c_1(\varepsilon), \end{aligned}$$

com $|c_1(\varepsilon)| = O\left(|\varepsilon|^2\right)$.

Suponha agora que $\det(id + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon trA + c_{n-1}(\varepsilon)$ vale para $n-1$, com $|c_{n-1}(\varepsilon)| = O\left(|\varepsilon|^2\right)$, e provaremos que vale para n.

$$\begin{aligned}
\det(id + \varepsilon A) &= \begin{vmatrix} 1+\varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} & \varepsilon a_{13} & \cdots & \varepsilon a_{1n} \\ \varepsilon a_{21} & 1+\varepsilon a_{22} & \varepsilon a_{23} & \cdots & \varepsilon a_{2n} \\ \varepsilon a_{31} & \varepsilon a_{32} & 1+\varepsilon a_{33} & \cdots & \varepsilon a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon a_{n1} & \varepsilon a_{n2} & \varepsilon a_{n3} & \cdots & 1+\varepsilon a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (1+\varepsilon a_{11}) \begin{vmatrix} 1+\varepsilon a_{22} & \varepsilon a_{23} & \cdots & \varepsilon a_{2n} \\ \varepsilon a_{32} & 1+\varepsilon a_{33} & \cdots & \varepsilon a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon a_{n2} & \varepsilon a_{n3} & \cdots & 1+\varepsilon a_{nn} \end{vmatrix} + c''(\varepsilon),
\end{aligned}$$

com $|c''(\varepsilon)| = O\left(|\varepsilon|^2\right)$. Logo, usando a hipótese de indução, segue que

$$\begin{aligned}
\det(id + \varepsilon A) &= (1+\varepsilon a_{11})\left[1 + \varepsilon(a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}) + c_{n-1}(\varepsilon)\right] + c''(\varepsilon) \\
&= 1 + \varepsilon(a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}) + c_n(\varepsilon) \\
&= 1 + \varepsilon trA + c_n(\varepsilon),
\end{aligned}$$

com $|c_n(\varepsilon)| = O\left(|\varepsilon|^2\right)$.

A2. Se $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^n$ num subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão m, então $tr(P) = m$.

De fato, se $id : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é a função identidade, ela é representada pela matriz identidade $n \times n$.

$$[id] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ e } tr(id) = n.$$

Como P é a projeção, P pode ser representada (numa base adequada) por uma matriz similar à matriz identidade contendo $n-m$ linhas nulas. Sendo assim, $trP = n - (n-m) = m$.

A3. Se A e B são duas matrizes de ordem $n \times n$, então $tr(AB) = tr(BA)$.

De fato, sejam $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$ duas matrizes de ordem $n \times n$. Logo

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix},$$

onde $c_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$. Conseqüentemente, $tr\,(AB) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{kk} = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n} a_{kl} b_{lk}$

Do mesmo modo

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix},$$

onde $d_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{n} b_{il} a_{jl}$, logo $tr\,(BA) = \sum\limits_{l=1}^{n} d_{ll} = \sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} b_{lk} a_{kl}$. Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} c_{kk} = \sum_{l=1}^{n} d_{ll}, \text{ isto é, } tr\,(AB) = tr\,(BA)\,.$$

A4. Se F é um espaço vetorial de dimensão finita n e $\omega : F \to F$ é um operador linear, o traço de ω, $tr\,(\omega)$, não depende da base escolhida para F.

Sejam α e α' bases para F. Considere A e A' as matrizes de ω com respeito a α e α', respectivamente. Então, existe uma matriz B tal que $A' = B^{-1}AB$. Logo

$$tr\left(A'\right) = tr\left(B^{-1}AB\right) \overset{(\mathbf{A3})}{=} tr\left(ABB^{-1}\right) = tr\,(A)\,.$$

A5. Um elemento $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_\infty$ será chamado de função simples se o conjunto $\{x_j; j \in \mathbb{N}\}$ for finito. O conjunto das funções simples forma um subconjunto denso de l_∞ na norma.

Se $f \in l_\infty$, então f pode ser vista como $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$. É claro que $f\,(\mathbb{N})$ é limitado e, com isso, $\overline{f\,(\mathbb{N})}$ é limitado e fechado em $\mathbb{K}$. Conseqüentemente, $\overline{f\,(\mathbb{N})}$ é compacto. Dado $\varepsilon > 0$, temos

$$\overline{f\,(\mathbb{N})} \subset \bigcup_{a \in \overline{f(\mathbb{N})}} B\,(a, \varepsilon)\,.$$

Da compacidade de $\overline{f(\mathbb{N})}$, existem $a^{(1)}, a^{(2)}, ..., a^{(n)} \in \overline{f(\mathbb{N})}$ tais que

$$\overline{f(\mathbb{N})} \subset B\left(a^{(1)}, \varepsilon\right) \cup B\left(a^{(2)}, \varepsilon\right) \cup \cdots \cup B\left(a^{(n)}, \varepsilon\right).$$

Note que

$$\left\{ \begin{array}{c} f(1) \in B\left(a^{(j_1)}, \varepsilon\right) \\ f(2) \in B\left(a^{(j_2)}, \varepsilon\right) \\ \vdots \end{array} \right. ,$$

com $a^{(j_k)} \in \left\{a^{(1)}, a^{(2)}, ..., a^{(n)}\right\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Defina

$$\overline{f} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} \text{ tal que } \left\{ \begin{array}{c} \overline{f}(1) = a^{(j_1)} \\ \overline{f}(2) = a^{(j_2)} \\ \vdots \end{array} \right. .$$

É claro que $\overline{f}$ é uma função simples. Além disso, $\left\|f - \overline{f}\right\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \left|f(n) - \overline{f}(n)\right| \leq \varepsilon$.

Note também que toda funcão simples é combinação linear de funções características. Com efeito, se f é uma funcão simples, existem $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\left\{ \begin{array}{c} f^{-1}(b_1) = M_1 \\ f^{-1}(b_2) = M_2 \\ \vdots \\ f^{-1}(b_n) = M_n \end{array} \right. ,$$

onde $M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n = \mathbb{N}$ e os M_j são dois a dois disjuntos. Logo $f = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j 1_{M_j}$.

A6. Seja $K \subset l_1$. Se K é relativamente compacto, então K é limitado e, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{a=(a_n)_{n=1}^\infty \in K} \left(\sum_{n \geq n_\varepsilon} |a_n| \right) \leq \varepsilon.$$

Suponha que K seja relativamente compacto. Dado $\varepsilon > 0$, $K \subset \overline{K} \subset \bigcup\limits_{b \in \overline{K}} B\left(b, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Como $\overline{K}$ é compacto, $K \subset \overline{K} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} B\left(b^{(j)}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ e segue que K é limitado.

Se $a = (a_n)_{n=1}^\infty \in K$, então, para algum $j_0 \in \{1, ..., m\}$, temos $b^{(j_0)} = \left(b_n^{(j_0)}\right)_{n=1}^\infty \in \overline{K}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n - b_n^{(j_0)}\right| = \left\|a - b^{(j_0)}\right\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $b^{(j)} = \left(b_n^{(j)}\right)_{n=1}^\infty \in l_1$ para todo $j \in \{1, ..., m\}$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n \geq n_\varepsilon} \left|b_n^{(j)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $j \in \{1, ..., m\}$.

Se $n \geq n_\varepsilon$ temos

$$\sum_{n \geq n_\varepsilon} |a_n| = \sum_{n \geq n_\varepsilon} \left| a_n - b_n^{(j_0)} + b_n^{(j_0)} \right| \leq \sum_{n \geq n_\varepsilon} \left| a_n - b_n^{(j_0)} \right| + \sum_{n \geq n_\varepsilon} \left| b_n^{(j_0)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Conseqüentemente

$$\sup_{a=(a_n)_{n=1}^{\infty} \in K} \left(\sum_{n \geq n_\varepsilon} |a_n| \right) \leq \varepsilon.$$

A7. Sejam X um espaço vetorial normado e $K \subset X$. Se K é convexo, então o fecho de K na topologia da norma é igual ao fecho de K na topologia fraca.

É claro que $\overline{K}^{\|\cdot\|} \subset \overline{K}^{w}$. Como K é convexo, se houver $x_0 \in \overline{K}^{w} \backslash \overline{K}^{\|\cdot\|}$, então, pelo teorema de Hahn-Banach, existirão $f \in X^{'}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sup f\left(\overline{K}^{\|\cdot\|}\right) < \alpha < f(x_0). \tag{4.1}$$

Entretanto, como $x_0 \in \overline{K}^{w}$, existe uma rede (x_d) em K tal que

$$x_0 = w - \lim_d x_d.$$

Logo

$$f(x_0) = f\left(w - \lim_d x_d\right) = \lim_d f(x_d),$$

e isso contradiz (4.1).

A8. Seja E um espaço de Banach. Se E é separável, então $B_{E'}$ é metrizável na topologia fraca estrela.

Seja $Y = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso em E. Escolha $X = \{x_n \in Y : x_n \in B_E\}$. Defina

$$d : B_{E'} \times B_{E'} \longrightarrow [0, +\infty)$$

por

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f(x_n) - g(x_n)|.$$

Não é difícil ver que d está bem definida. Vejamos que d é uma métrica. Se $f, g \in B_{E'}$, temos:

i) $d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f(x_n) - g(x_n)| = 0$ se, e somente se, $f = g$

De fato, se

$$d(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left|f(x_n)-g(x_n)\right|=0,$$

então

$$\left|f(x_n)-g(x_n)\right|=0 \text{ para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Logo

$$f(x_n)=g(x_n) \ \text{ para todo } n\in\mathbb{N}$$

e, como X é denso em B_E, temos

$$f(x)=g(x) \ \text{ para todo } x\in B_E.$$

Daí segue que $f=g$.

ii)

$$d(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left|f(x_n)-g(x_n)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left|g(x_n)-f(x_n)\right|=d(g,f)$$

iii) Se $h\in B_{E'}$, temos

$$\begin{aligned}d(f,g)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left|f(x_n)-g(x_n)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left|f(x_n)-h(x_n)+h(x_n)-g(x_n)\right|\\&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left|f(x_n)-h(x_n)\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left|h(x_n)-g(x_n)\right|\\&=d(f,h)+d(h,g).\end{aligned}$$

Agora, vejamos que $B_{E'}$, com a topologia fraca estrela, é um espaço topológico isomorfo a $B_{E'}$ com a métrica d.

Sejam $f_0\in B_{E'}$ e $V_{(f_0,z_1,\dots,z_m,\varepsilon)}=\left\{f\in B_{E'}:\left|f(z_i)-f_0(z_i)\right|<\varepsilon,\ i=1,\dots,m\right\}$ uma vizinhança de f_0 na topologia fraca estrela. Podemos assumir $\|z_i\|=1$ para todo $1\leq i\leq m$.

Afirmamos que existe $r>0$ tal que $U=\left\{f\in B_{E'}:d(f,f_0)<r\right\}\subset V_{(f_0,z_1,\dots,z_m,\varepsilon)}$. Com efeito, como X é denso em B_E, para cada $i=1,\dots,m$ existe x_{n_i} tal que

$$\|x_{n_i}-z_i\|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Fixe $r>0$ tal que $r\leq\min\left\{\frac{\varepsilon}{2^{n_i+1}}\right\}$, logo

$$r\cdot 2^{n_i}<\frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } i=1,\dots,m.$$

Se $d(f,f_0)<r$, temos que

$$\frac{1}{2^{n_i}}\left|f(x_{n_i})-f_0(x_{n_i})\right|<r, \text{ para todo } 1\leq i\leq m.$$

Logo, para todo $i = 1, ..., m$, temos

$$\begin{aligned} |f(z_i) - f_0(z_i)| &= |f(z_i - x_{n_i}) - f_0(z_i - x_{n_i}) + f(x_{n_i}) - f_0(x_{n_i})| \\ &\leq \|f - f_0\| \|z_i - x_{n_i}\| + |f(x_{n_i}) - f_0(x_{n_i})| \\ &< (\|f\| + \|f_0\|) \frac{\varepsilon}{4} + r \cdot 2^{n_i} \\ &< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

e, portanto,

$$U = \left\{ f \in B_{E'} : d(f, f_0) < r \right\} \subset V_{(f_0, z_1, ..., z_m, \varepsilon)}.$$

Agora, seja $W = \left\{ f \in B_{E'} : d(f, f_0) < r_0 \right\}$ uma vizinhança de f_0 na topologia da métrica d. Considere

$$W_{(f_0, x_1, ..., x_m, \varepsilon)} = \left\{ f \in B_{E'} : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, \, i = 1, ..., m \right\}$$

uma vizinhança de f_0, onde $\varepsilon < \frac{r_0}{2}$ e m é suficientemente grande tal que

$$2 \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{r_0}{2}.$$

Logo, se $f \in W_{(f_0, x_1, ..., x_m, \varepsilon)}$, temos

$$\begin{aligned} d(f, f_0) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} |f(x_i) - f_0(x_i)| + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |f(x_i) - f_0(x_i)| \\ &< \varepsilon \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} + \|f - f_0\| \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \|x_i\| \\ &< \varepsilon + (\|f\| + \|f_0\|) \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \|x_i\| \\ &\leq \varepsilon + 2 \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\ &< \frac{r_0}{2} + \frac{r_0}{2} = r_0. \end{aligned}$$

Portanto, $W_{(f_0, x_1, ..., x_m, \varepsilon)} \subset W = \left\{ f \in B_{E'} : d(f, f_0) < r_0 \right\}$ e daí segue que $B_{E'}$ é metrizável na topologia fraca estrela.

A9. Seja $B = (b_{ij})$ uma matriz de ordem $n \times n$. Então

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \right| \overset{(1)}{=} \max \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \varepsilon_j \right| ; |\varepsilon_j| = 1 \right\} \overset{(2)}{=} \max \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \varepsilon_j \right| ; |\varepsilon_j| \leq 1 \right\}.$$

Vamos mostrar (1). A demonstração de (2) é simples. Note que

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\right| = \sum_{j=1}^{n}|b_{1j}+b_{2j}+\cdots+b_{nj}| = |b_{11}+b_{21}+\cdots+b_{n1}|+\cdots+|b_{1n}+b_{2n}+\cdots+b_{nn}|.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\max\left\{\left|\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\varepsilon_j\right| ; |\varepsilon_j| = 1\right\} \\
&= \max\{|(b_{11}+b_{21}+\cdots+b_{n1})\,\varepsilon_1+\cdots+(b_{1n}+b_{2n}+\cdots+b_{nn})\,\varepsilon_n| : |\varepsilon_j|=1\} \\
&\le |b_{11}+b_{21}+\cdots+b_{n1}|+\cdots+|b_{1n}+b_{2n}+\cdots+b_{nn}|.
\end{aligned}$$

Agora, para cada $1 \le k \le n$, segue que $b_{1k}+b_{2k}+\cdots+b_{nk} = |b_{1k}+b_{2k}+\cdots+b_{nk}|\,e^{i\theta_k}$ com $\theta_k \in [0, 2\pi)$. Escolhendo $\varepsilon_k = e^{-i\theta_k}$ temos a igualdade

$$\max\left\{\left|\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\varepsilon_j\right| ; |\varepsilon_j| = 1\right\} = |b_{11}+b_{21}+\cdots+b_{n1}|+\cdots+|b_{1n}+b_{2n}+\cdots+b_{nn}|.$$

A10. Seja $(a_{mn})_{m,n}$ uma seqüência de escalares positivos.

a) Se $\sup_m \sup_n a_{mn} = \infty$, então $\sup_n \sup_m a_{mn} = \infty$.

De fato, considere $b_m = \sup_n a_{mn}$. Então, dado $K > 0$, existe m_0 tal que

$$\sup_n a_{m_0 n} = b_{m_0} > K.$$

Logo, existe n_0 tal que $a_{m_0 n_0} > K$ e então $\sup_n \sup_m a_{mn} = \infty$.

b) Se $\sup_m \sup_n a_{mn} = L < \infty$, então $\sup_n \sup_m a_{mn} = L$.
Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existe m_0 tal que

$$\sup_n a_{m_0 n} = b_{m_0} > L - \varepsilon.$$

Logo, existe n_0 tal que $a_{m_0 n_0} > L - \varepsilon$ e, portanto

$$M = \sup_n \sup_m a_{mn} \ge \sup_n a_{m_0 n} \ge a_{m_0 n_0} > L - \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, segue que $M \ge L$ (note que, em princípio, M pode ser infinito). Se fosse $M = \infty$, pelo item (a), teríamos $L = \infty$ (absurdo). Logo $M < \infty$. Agora, sabendo que $M < \infty$ e usando a mesma idéia que foi usada para mostrar que $M \ge L$, podemos concluir que $L \ge M$ e segue o resultado.

A11. (Variação da Desigualdade de Hölder) Sejam $n \in \mathbb{N}$, $p, q, s > 0$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s}$. Então

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

para quaisquer escalares x_j, y_j e $j = 1, \ldots, n$.

Já sabemos que, para $n \in \mathbb{N}$, $r, r' > 1$ tais que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, temos

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^{\frac{1}{r}}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^{\frac{1}{r'}}\right)^{\frac{1}{r'}} \text{ (Desigualdade de Hölder).}$$

Agora é só substituirmos $r, r', |x_j|$ e $|y_j|$ por $\frac{p}{s}, \frac{q}{s}, |x_j|^s$ e $|y_j|^s$, respectivamente, obtendo

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j|^s \leq \left(\sum_{j=1}^{n} (|x_j|^s)^{\frac{p}{s}}\right)^{\frac{s}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} (|y_j|^s)^{\frac{q}{s}}\right)^{\frac{s}{q}},$$

ou melhor,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Referências Bibliográficas

[1] F. Albiac e N. Kalton, Topics in Banach Space Theory, Springer Verlag 2006.

[2] R. Alencar e M. Matos. *Some classes of multilinear mappings between Banach spaces*, Publ. Dep. Analisis Mat. Univ. Complut. Madrid **12** (1989).

[3] H. Bauer, Probability Theory and Elements of Measure Theory, Academic Press, 1981.

[4] G. Bennet, Inclusion mappings between l_p spaces, J. Funct. Anal. **12** (1973), 420-427.

[5] G. Bennet, Schur multipliers, Duke Math. Journal **44** (1977), 603-639.

[6] A. T. L. Bernardino, Ideais de Aplicações Multilineares e Polinômios entre Espaços de Banach, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.

[7] F. Bombal, D. Pérez-García e I. Villanueva, Multilinear extensions of a Grothendieck's theorem, Q. J. Math. **55** (2004), 441-450.

[8] G. Botelho, Cotype and absolutely summing multilinear mappings and homogeneous polynomials. Proceedings of the Royal Irish Academy, **97A** (1997), 145-153.

[9] G. Botelho e D. Pellegrino, Absolutely summing polynomials on Banach spaces with unconditional basis. J. of Math. Anal. Appl., **321** (2006), 50-58.

[10] G. Botelho e D. Pellegrino, Scalar-valued dominated polynomials on Banach spaces. Proc. Am. Math. Soc., **134** (2006), 1743-1751.

[11] G. Botelho e D. Pellegrino, Absolutely summing operators into spaces of no fnite cotype, a aparecer em Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.

[12] E. Çaliskan e D.M. Pellegrino, On the multilinear generalizations of the concept of absolutely summing operators, R. Mount. J. Math. **37** (2007), 1137-1154.

[13] B. Carl, Absolut $(p, 1)$-summierende identische operatoren von l_u nach l_v, Math. Nachr. **63** (1974), 353-360.

[14] A. Defant e K. Floret, Tensor Norms and Operator Ideals, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1993.

[15] V. Dimant, Strongly p-summing multilinear operators, J. Math. Anal. Appl. **278** (2003) 182-193.

[16] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely summing operators, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 43, 1995.

[17] E. Dubinsky, A. Pełczyński e H. P. Rosenthal, On Banach spaces X for which $\Pi_2(L_\infty, X) = B(L_\infty, X)$, Studia Math. **44** (1972), 617-648.

[18] A. Dvoretzky and C. A. Rogers, Absolute and unconditional convergence in normed spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **36** (1950), 192 -197.

[19] M. Fabian, P. Habala, P. Hajék, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant e V. Zizler, Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry, CBS Books in Mathematics, Springer Verlag, 2001.

[20] D. J. H. Garling, Diagonal mappings between sequence spaces, Studia Math. **51** (1974), 129- 138.

[21] A. Grothendieck, Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, Bol. Soc. Mat. São Paulo **8** (1956), 1-79.

[22] S. Kwapień, On a theorem of L. Schwarz and its applications to absolutely summing operators, Studia Math. **38** (1970), 193-201.

[23] E. Lages, Curso de Análise, Vol. 1, Projeto Euclides.

[24] J. Lindenstrauss e A. Pełczyński, Absolutely summing operators in L_p spaces and their applications, Studia Math. **29** (1968), 276-326.

[25] J. Lindenstrauss e L. Tzafiri, Classical Banach Spaces I and II, Springer Verlag, 1977.

[26] M. C. Matos, Absolutely summing holomorphic mappings, Anais da Academia Brasileira de Ciências **68** (1996), 1-13.

[27] M. C. Matos. Nonlinear absolutely summing mappings between Banach spaces, Math. Nachr. **258** (2003), 71-89.

[28] M. C. Matos. Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings, Collect. Math. **54** (2003) 111-136.

[29] B. Mitjagin e A. Pełczyński, Nuclear operators and approximative dimension, Proc. of ICM, Moscow, 1966, 366-372.

[30] J. Mujica, Complex analysis in Banach spaces, North Holland, 1986.

[31] C. Oliveira, Introdução a Análise Funcional, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

[32] D. Pellegrino, Aplicações entre espaços de Banach relacionadas à convergência de séries, Tese de Doutorado, UNICAMP, 2002.

[33] D. Pellegrino, Cotype and absolutely summing homogeneous polynomials in L_p spaces. Studia Math., **157**(2) (2003), 121-131.

[34] D. M. Pellegrino, Almost summing mappings, Arch. Math. (Basel), **82** (2004), 68-80.

[35] D. Pellegrino, On scalar-valued nonlinear absolutely summing mappings. Ann. Pol. Math., **83** (2004), 281-288.

[36] D. Pérez-García, Operadores multilineales absolutamente sumantes, Dissertação de Mestrado, Universidad Complutense de Madrid, 2003.

[37] D. Pérez-García, The Trace Class is a Q-algebra. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **31** (2006), 287-295.

[38] A. Pietsch, Absolut p–summierende Abbildungen in normieten Räumen, Studia Math. **27** (1967), 333- 353.

[39] A. Pietsch, Operator Ideals, North–Holland, 1980.

[40] A. Pietsch, Ideals of multilinear functionals, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in theoretical Physics, 185-199, Teubner-Texte, Leipzig, 1983.