Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Equações Diferenciais Parciais Não Lineares Sobre a Fronteira de um Domínio Limitado do $\mathbb{R}^n$

Célia Maria Rufino Franco

2007

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Equações Diferenciais Parciais Não Lineares Sobre a Fronteira de um Domínio Limitado do $\mathbb{R}^n$

por

Célia Maria Rufino Franco

sob orientação do

Prof. Dr. Marivaldo Pereira Matos

Junho de 2007

João Pessoa-PB

Equações Diferenciais Parciais Não Lineares sobre a Fronteira de um Domínio Limitado do $\mathbb{R}^n$

por

Célia Maria Rufino Franco

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Marivaldo Pereira Matos - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Osmundo Alves de Lima - UEPB

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna - UFPB

Prof. Dr. Nelson Nery de O. Castro - UFPB (suplente)

Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

.

À Zilma, minha mãe,

exemplo de bondade e amor.

Agradecimentos.

A DEUS, por seu infinito amor.

Ao meu orientador, Prof. Dr. MARIVALDO PEREIRA MATOS, por sua dedicação na realização deste trabalho, pela experiência adquirida com seus ensinamentos, pela compreensão e pela confiança depositada em mim.

Ao Prof. Dr. OSMUNDO ALVES DE LIMA, por sua imensa dedicação e contribuição em minha vida acadêmica.

Ao Prof. Dr. FÁGNER DIAS ARARUNA, pelos conhecimentos repassados com dedicação e pela sua contribuição neste trabalho.

Ao Prof. Dr. NELSON NERY DE OLIVEIRA CASTRO, pela disponibilidade em ajudar, transmitindo seus conhecimentos.

A todos os professores e funcionários da Pós- Graduação do DM-UFPB que de certa forma contribuiram para a conclusão deste trabalho. A todos meus sinceros agradecimentos.

A minha mãe, ZILMA. O amor, que de vosso coração emana, deu-me o suporte, edificou-me a coragem, levou-me ao sucesso. Minha profunda gratidão por muitas alegrias que vosso amor me presenteou. Ao meu pai, COSME (in memoriam), que deixou em mim a semente da vida. A minha irmã, ZILDIVÂNIA, pelo carinho e pelo constante incentivo.

A todos os meus familiares, pelo apoio e incentivo.

Aos colegas da Pós- Graduação, pela ótima convivência que tivemos, especialmente, as minhas amigas KALINA e MARIA. Que o tempo e a distância não possam interromper o companheirismo.

Aos professores do DM-UEPB, especialmente, Prof. Dr. ALDO BEZERRA MACIEL, Prof. Ms. ALDO TRAJANO LOURÊDO, Prof. Dr. WANDENBERG LOPES e Prof. Ms. MARIA ISABELLE BORGES, pelo constante incentivo.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos equações diferenciais parciais de evolução sobre a fronteira lateral Σ de um cilindro $Q = \Omega \times \,]0, T[\,$, sendo Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Formulamos o Problema Parabólico e o Problema Hiperbólico e investigamos a existência e unicidade de solução para esses problemas, utilizando o Método de Faedo-Gelerkin.

Palavras-Chave:

Equação de Evolução, Espaços de Sobolev, Faedo-Galerkin, Solução Fraca, Imersão de Sobolev.

Abstract

In this work, we study partial differential equations of evolution on the lateral border Σ of a cylinder $Q = \Omega \times]0, T[$, where Ω is an open bounded subset of $\mathbb{R}^n$. We also formulate the Parabolic Problem and the Hyperbolic Problem and investigate the existence and uniqueness of solution for those problems, using the Method of Faedo-Gelerkin

Key-Words:

Evolution Equation, Sobolev Spaces, Faedo-Galerkin, Weak Solution, Sobolev Imbbeding.

Sumário

Notações e Simbologias

- Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$.
- Γ é uma variedade de dimensão $\mathbb{R}^{n-1}$ que representa a fronteira de Ω.
- $Q = \Omega \times]0, T[$.
- $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$.
- C, quando não especificada, é uma constante arbitrária.
- q.s. - quase sempre
- $\hookrightarrow$ designa a imersão contínua
- $\overset{c}{\hookrightarrow}$ designa a imersão compacta
- $|\cdot|$ designa a norma Euclidiana
- $|\cdot|_{L^p}$ designa a norma no espaço L^p
- $\|\cdot\|_H$ designa a norma no espaço de Hilbert H
- $(\cdot, \cdot)_\Gamma$ designa o produto escalar do $L^2(\Gamma)$
- $\dfrac{\partial}{\partial \eta}$ designa a derivada na direção da normal exterior à fronteira Γ
- $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ designa o operador laplaciano

.

Introdução

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ e seja η o vetor unitário normal exterior a Γ. Consideremos o cilindro $Q = \Omega \times \left]0, T\right[$ com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times \left]0, T\right[$, onde $T > 0$ é um número real.

Em Lions [1], o autor motiva o estudo de equações diferenciais parciais de evolução em variedades, mais precisamente os problemas

$$\left| \begin{array}{l} \Delta w = 0 \text{ em } Q \\ w' + \dfrac{\partial w}{\partial \eta} + |w|^{\rho}\, w = f \quad \text{sobre } \ \Sigma \\ w(x,0) = w_0(x),\ x \in \Gamma \end{array} \right. \tag{1}$$

$$\left| \begin{array}{l} \Delta w = 0 \text{ em } Q \\ w'' + \dfrac{\partial w}{\partial \eta} + |w|^{\rho}\, w = f \quad \text{sobre } \ \Sigma \\ w(x,0) = w_0(x), \quad w'(x,0) = w_1(x), \quad x \in \Gamma \end{array} \right. \tag{2}$$

onde w' e w'' significam a derivada primeira e segunda, respectivamente, de w com respeito ao tempo, $\dfrac{\partial w}{\partial \eta}$ a derivada normal de w e $\rho > 0$, f sobre Σ são dados.

Uma generalização do Problema (2) foi tratada em [7] por Araruna, Antunes e Medeiros, onde os autores trabalham com uma não linearidade mais geral. Outros autores estudaram problemas semelhantes a estes, que podem ser encontrados em [8].

O plano de apresentação desta dissertação é o seguinte:

No Capítulo 1, apresentamos as notações, terminologias e resultados preliminares essenciais ao desenvolvimento dos Capítulos 2 e 3.

Nos Capítulos 2 e 3, formulamos os problemas (1) e (2), respectivamente, sobre a variedade Γ, utilizando um novo operador A, apresentado nos preliminares. Em cada caso, estabelecemos a existência e unicidade de solução fraca. No Problema 2, contudo, a unicidade está condicionada a $\rho \leq \dfrac{1}{n-2}$, se $n \geq 3$. Sem esta restrição não conhecemos na literatura resultado algum sobre a unicidade.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos as notações e resultados fundamentais utilizados no desenvolvimento do trabalho, introduzindo os conceitos de Distribuição e Espaços de Sobolev, com base nos quais define-se uma solução fraca de uma equação diferencial parcial. Destacamos, também, resultados básicos de Análise Funcional sem, contudo, nos dedicarmos as demonstrações, apenas indicaremos as referências bibliográficas onde as mesmas poderão ser encontradas.

1.1 Noções Sobre Distribuições Escalares

1.1.1 Espaço das Funções Testes e Derivada Distribucional

Antes de definirmos o espaço das funções testes, serão feitas algumas considerações sobre as notações.

Por um *multi-índice* entendemos uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ de números inteiros não negativos e designamos por $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ a ordem do multi-índice α. Sendo $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$, o operador derivação é denotado por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, temos $D^0 u = u$, isto é, o operador derivação neste caso é a identidade.

Em particular, sendo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}$, onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$. Neste caso, temos as seguintes possibilidades:

$$\alpha = (1,1),\ \alpha = (2,0) \text{ e } \alpha = (0,2), \text{ com } |\alpha| = 2,$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ e } \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Seja $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua. O suporte de u, denotado por supp(u), é definido como sendo o fecho, em Ω, do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω em que u não se anula. Simbolicamente tem-se:

$$\operatorname{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega\,;\ u(x) \neq 0\}} \text{ em } \Omega.$$

Como conseqüência da definição, vemos que o supp(u) é o menor fechado fora do qual u se anula e deduzimos as seguintes relações:

1. $\operatorname{supp}(u+v) \subset \operatorname{supp}(u) \cup \operatorname{supp}(v)$
2. $\operatorname{supp}(uv) \subset \operatorname{supp}(u) \cap \operatorname{supp}(v)$
3. $\operatorname{supp}(\lambda u) = \operatorname{supp}(u)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$

Embora o suporte de uma função contínua seja um fechado de Ω, existem funções cujo suporte não é um compacto. De fato: seja $u : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $u(x) = 1$, $\forall\, x \in (0,1)$. Notemos que supp$(u) = (0,1)$, que não é um conjunto compacto da reta.

Tendo em vista nosso interesse na classe das funções cujo suporte seja um conjunto compacto de Ω, iniciamos representando por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que têm suporte compacto contido em Ω. O seguinte exemplo clássico mostra que o conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ é não-vazio.

Exemplo 1.1 *Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, denotemos por $B_r(x_0)$ a bola aberta de centro x_0 e raio r, isto é, $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| < r\}$. Se $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ é tal que $B_r(x_0) \subset \Omega$ definamos $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ por:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\|x-x_0\|^2 - r^2}\right), & se\ \ \|x - x_0\| < r \\ 0, \ se\ \ \|x - x_0\| \geq r. \end{cases}.$$

Para mostrarmos que $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, *consideramos a função* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, \ t > 0 \\ 0, \ t \leq 0 \end{cases} .$$

e observamos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *e se* $\theta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *é definida por* $\theta(x) = r^2 - \|x - x_0\|^2$, *então* $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ *e* $\varphi = f \circ \theta \in C^\infty(\mathbb{R})$. *Desde que* $\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{B_r(x_0)}$, *o qual é compacto, segue que* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Das propriedades do supp estabeleciadas anteriormente, vê-se facilmente que $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial e $\operatorname{supp}(D^\alpha u) \subset \operatorname{supp}(u)$, $\forall \ \alpha \in \mathbb{N}^n$, quando u for suficientemente derivável.

É possível introduzir uma topologia em $C_0^\infty(\Omega)$, denominada *topologia limite indutivo*, que faz deste espaço um espaço topológico denotado por $\mathfrak{D}(\Omega)$ e cujos objetos serão denominados *funções testes*.

Convergência em $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Dizemos que uma seqüência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções testes converge para $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, quando:

(i) Existe um subconjunto compacto K de Ω tal que

$$\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K, \forall \ n \ \text{ e } \ \operatorname{supp}(\varphi) \subset K.$$

(ii) $D^\alpha \varphi_n \longrightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente sobre K, para todo multi-índice α.

Por *distribuição escalar* sobre Ω entendemos uma forma linear e contínua sobre $\mathfrak{D}(\Omega)$, isto é, uma forma $T : \mathfrak{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$T(\alpha\varphi + \psi) = \alpha T(\varphi) + T(\psi), \forall \ \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \varphi, \ \psi \ \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

e T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathfrak{D}(\Omega)$ então $(T(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$. O valor da distribuição T em φ será representado por $\langle T, \varphi \rangle$ e por $\mathfrak{D}'(\Omega)$ estaremos representando a coleção de todas as formas lineares contínuas $T : \mathfrak{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Dadas T e S em $\mathfrak{D}'(\Omega)$ definimos:

(i) $\langle T + S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle S, \varphi \rangle$, $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$

(ii) $\langle \alpha T, \varphi \rangle = \alpha \langle T, \varphi \rangle$, $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Munido destas operações, $\mathfrak{D}'(\Omega)$ torna-se um espaço vetorial denominado *espaço das distribuições escalares* sobre Ω.

Convergência em $\mathfrak{D}'(\Omega)$:

Uma seqüência de distribuições escalares $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para a distribuição escalar T, em $\mathfrak{D}'(\Omega)$, quando:

$$\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ em } \mathbb{R}, \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Com esta noção de convergência, $\mathfrak{D}'(\Omega)$ passa a ser um espaço vetorial topológico.

Definição 1.1 *Dizemos que $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω, e anotamos $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, quando u é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$.*

As funções localmente integráveis serão utilizadas, inicialmente, para *gerar* distribuições escalares, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 1.2 *Dada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, definimos $T_u : \mathfrak{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ da seguinte maneira:*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \ \ \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Então, T_u é uma distribuição escalar sobre Ω. De fato, a linearidade de T_u segue da linearidade da integral e para comprovarmos sua continuidade, consideremos $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções testes sobre Ω que converge para uma função teste φ em $\mathfrak{D}(\Omega)$. Temos:

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \varphi_n \rangle - \langle T_u, \varphi \rangle| = |\langle T_u, \varphi_n - \varphi \rangle| &\leq \int_\Omega |u(x)| \, |(\varphi_n - \varphi)(x)| \, dx \\ &\leq \max_{x \in K} |(\varphi_n - \varphi)(x)| \int_K |u(x)| \, dx \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

onde K é um compacto de Ω que contém $\operatorname{supp}(\varphi_n - \varphi)$, $\forall n$.

A distribuição T_u, definida no exemplo 1.2, é dita *gerada* pela função localmente integrável u.

Lema 1.1 ***(Du Bois Raymond)*** *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \; \forall \; \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração: Ver [11]. ■

Do Lema de Du Bois Raymond segue que cada função numérica u, localmente integrável em Ω, determina de maneira unívoca uma distribuição T_u, no seguinte sentido: se u, v forem localmente integráveis em Ω, então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ q.s. em Ω. De fato,

$$\begin{aligned} T_u = T_v &\iff \langle T_u, \varphi\rangle = \langle T_v, \varphi\rangle \,, \; \forall \; \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \\ &\iff \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega v(x)\varphi(x)dx \\ &\iff \int_\Omega (u - v)(x)\varphi(x)dx = 0, \; \forall \; \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \\ &\iff u - v = 0 \text{ q.s. em } \Omega. \end{aligned}$$

Por esta razão, identificamos a função u com a distribuição T_u por ela definida e podemos concluir que o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$, das funções localmente integráveis, se identifica com uma parte do espaço das distribuições $\mathfrak{D}'(\Omega)$. Simbolicamente,

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{T_u; \; u \in L^1_{loc}(\Omega)\right\} \subset \mathfrak{D}'(\Omega).$$

No exemplo dado a seguir, construiremos uma distribuição que não é gerada por uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$. Isto mostra que de fato $L^1_{loc}(\Omega)$ é uma parte própria de $\mathfrak{D}'(\Omega)$.

Exemplo 1.3 *Fixado $x_0 \in \Omega$, definimos δ_{x_0} em $\mathfrak{D}(\Omega)$ do seguinte modo:*

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle = \varphi(x_0), \; \forall \; \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Então $\delta_{x_0} : \mathfrak{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma distribuição sobre Ω, denominada distribuição de Dirac ou medida de Dirac. No entanto, mostra-se que não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\delta_{x_0} = T_u$, isto *é, δ_{x_0} não é uma distribuição gerada por uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$. De fato, suponhamos que exista $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx,\ \forall\ \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Em particular, se $\psi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ é definida por

$$\psi(x) = \varphi(x)\left\| x - x_0 \right\|^2$$

teremos:

$$0 = \psi(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \psi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\left\| x - x_0 \right\|^2 dx,\ \forall\ \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Pelo Lema 1.1, tem-se que $u(x)\left\| x - x_0 \right\|^2 = 0$ q.s. em Ω e portanto $u(x) = 0$ q.s em Ω. Logo, $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = 0,\ \forall\ \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, isto é, $\varphi(x_0) = 0,\ \forall\ \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, o que é um absurdo.

A noção de derivada fraca de uma função foi proposta inicialmente por Sobolev, motivado pela fórmula de integração por partes do cálculo.

Dada uma função u continuamente derivável em $\mathbb{R}$, no sentido de Newton-Leibniz, então para cada $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ temos:

$$\int_\mathbb{R} u(x)\varphi'(x)dx = -\int_\mathbb{R} u'(x)\varphi(x)dx, \tag{1.1}$$

porque φ se anula fora de um compacto da reta.

Motivados pela fórmula (1.1), Sobolev-Schwartz definiram a derivada de uma distribuição.

Inicialmente, vejamos como Sobolev definiu a derivada de uma função localmente integrável em $\mathbb{R}$. Dizemos que a distribuição $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ possui derivada fraca quando existir uma distribuição $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que:

$$\int_\mathbb{R} u(x)\varphi'(x)dx = -\int_\mathbb{R} v(x)\varphi(x)dx,\ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}). \tag{1.2}$$

A função v denomina-se *derivada fraca* de u.

Para uma distribuição qualquer de $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$, Schwartz formulou o seguinte conceito: dado $T \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$, define-se a *derivada distribucional* de T como sendo a forma linear $\dfrac{dT}{dx} : \mathfrak{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\left\langle \frac{dT}{dx}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle, \ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}). \tag{1.3}$$

No caso em que T e $\dfrac{dT}{dx}$ são definidas por funções localmente integráveis u e v, respectivamente, então (1.2) e (1.3) coincidem. Agora, se $u \in C^1(\mathbb{R})$ então (1.2) e (1.3) identificam-se a (1.1), isto é, a derivada no sentido clássico identifica-se à derivada no sentido das distribuições.

Sejam $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice. A derivada distribucional de ordem α de T é a distribuição $D^\alpha T$ definida por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \, , \ \forall \ \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega). \tag{1.4}$$

Antes de apresentarmos os espaços de Sobolev, ressaltamos dois fatos interessantes:

(i) A aplicação

$$\begin{aligned} D^\alpha : \mathfrak{D}'(\Omega) &\longrightarrow \mathfrak{D}'(\Omega) \\ T \quad &\longmapsto D^\alpha T \end{aligned}$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathfrak{D}'(\Omega)$, isto é:

$$T_n \longrightarrow T \text{ em } \mathfrak{D}'(\Omega) \Longrightarrow D^\alpha T_n \longrightarrow D^\alpha T \text{ em } \mathfrak{D}'(\Omega). \tag{1.5}$$

(ii) A derivada de uma distribuição localmente integrável pode não ser localmente integrável. Isto motivará o conceito para Espaços de Sobolev.

Exemplo 1.4 *Seja u a função de Heaviside definida em $\mathbb{R}$ do seguinte modo:*

$$u(x) = \begin{cases} 1, & se \ x \geq 0 \\ 0, & se \ x < 0 \end{cases} .$$

Esta função é localmente integrável em $\mathbb{R}$, no entanto sua derivada não o é. De fato:

$$\langle u', \varphi \rangle = - \langle u, \varphi' \rangle = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

para toda função $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$. Portanto, $u' = \delta_0 \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

A função de Heaviside embora derivável no sentido de Sobolev, a derivada u' não é derivável no mesmo sentido, pois $u' = \delta_0$ não é localmente integrável. Entretanto, segue-se da definição (1.4) que cada distribuição $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições.

1.2 Espaços de Sobolev

1.2.1 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Dado Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, denotamos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis à Lebesgue $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $x \longmapsto |u(x)|^p$ é integrável, em Ω, no sentido de Lebesgue. A norma de $u \in L^p(\Omega)$ é dada por:

$$|u|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

No caso $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(\Omega)$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis à Lebesgue e essencialmente limitadas em Ω, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq C, \text{ q.s. em } \Omega.$$

Cada constante C é denominada *majorante essencial* de $|u|$ e a norma de $u \in L^\infty(\Omega)$ é definida por:

$$|u|_{L^\infty(\Omega)} = \inf_{x \in \Omega} \{C;\ |u(x)| \leq C, \text{ q.s. em } \Omega\} = \operatorname*{supess}_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Sendo $|u|_{L^\infty(\Omega)}$ um dos majorantes essenciais de $|u|$, segue da definição que

$$|u(x)| \leq |u|_{L^\infty(\Omega)}, \text{ q.s. em } \Omega.$$

O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, munido de sua respectiva norma, torna-se espaço de Banach. No caso em que $p = 2$ o espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, cuja norma e produto interno serão denotados e definidos, respectivamente, por

$$|u|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Na teoria dos espaços L^p ressaltamos três desigualdades básicas: a Desigualdade de Young (DY), a Desigualdade de Hölder (DH) e a Desigualdade de Minkowski (DM)

• (DY) Desigualdade de Young: Seja $1 < p < \infty$ e q o expoente conjugado de p, isto é, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se a, $b \in \mathbb{R}$ são não negativos, então:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

• (DH) Desigualdade de Hölder: Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e q o expoente conjugado de p. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ então:

$$uv \in L^1(\Omega) \quad \text{e} \quad |uv|_{L^1(\Omega)} \leq |u|_{L^p(\Omega)} |v|_{L^q(\Omega)}.$$

• (DM) Desigualdade de Minkowski: Se u, $v \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, então:

$$|u + v|_{L^p(\Omega)} \leq |u|_{L^p(\Omega)} + |v|_{L^p(\Omega)}.$$

Definição 1.2 *Sejam V e H dois espaços com $V \subset H$. Diremos que V está imerso continuamente em H quando a aplicação inclusão $i : V \longrightarrow H$ for contínua.*

Com a definição acima, estabelecemos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas:

$$\mathfrak{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathfrak{D}'(\Omega),\ 1 \leq p < \infty.$$

Proposição 1.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma aberto, $1 \leq p \leq \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $L^p(\Omega)$ com $u_n \longrightarrow u$ em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subseqüência de (u_n), que ainda denotaremos por $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que:*

(i) $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ q.s. em Ω;

(ii) Existe $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq h(x)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, q.s. em Ω.

Demonstração: Ver [3] . ■

1.2.2 Os Espaços $W^{m,p}(\Omega)$

Desde que $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega)$, para todo $1 \leq p \leq \infty$, segue que toda função $u \in L^p(\Omega)$ pode ser identificada com a distribuição por ela definida. Assim, u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, que são também distribuições escalares sobre Ω. No entanto, $D^\alpha u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Isto motiva o conceito de um novo espaço de Banach, que será denominado *Espaço de Sobolev* e definido a seguir. Representamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções u de $L^p(\Omega)$ para as quais as derivadas distribucionais $D^\alpha u$ estão em $L^p(\Omega)$, com $|\alpha| \leq m$. A norma de cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ é definida por:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_{L^\infty(\Omega)}, \text{ se } p = \infty$$

O espaço normado $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach denominado *Espaço de Sobolev*. No caso em que $p = 2$ o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, separável continuamente imerso em $L^2(\Omega)$, e denotado por $H^m(\Omega)$. Em símbolos, temos:

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega);\ D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \forall\ \alpha,\ \ |\alpha| \leq m \right\}$$

com norma e produto interno dados, respectivamente, por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u\,(x)|^2\, dx \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad ((u,v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u\,(x)\, D^\alpha v\,(x)\, dx.$$

Para uma melhor compreensão, ilustraremos alguns casos particulares do espaço $H^m(\Omega)$.

- Em dimensão $n = 1$:

  $$H^1(a,b) = \left\{ u \in L^2(a,b);\ u' \in L^2(a,b) \right\}$$

  com norma e produto escalar

  $$\|u\|^2 = \int_a^b |u\,(x)|^2\, dx + \int_a^b |u'\,(x)|^2\, dx \text{ e } ((u,v)) = \int_a^b u\,(x)\, v\,(x)\, dx + \int_a^b u'\,(x)\, v'\,(x)\, dx.$$

- Em dimensão $n \geq 2$:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ i = 1, ..., n \right\}$$

com norma e produto escalar

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |u\,(x)|^2\, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}\,(x) \right|^2 dx.$$

$$((u, v)) = \int_\Omega u\,(x)\, v\,(x)\, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\,(x)\, \frac{\partial v}{\partial x_i}\,(x)\, dx$$

O espaço $W^{m,p}\,(\Omega)$ é reflexivo, se $1 < p < \infty$, e separável quando $1 \leq p < \infty$.

1.2.3 Os Espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,q}(\Omega)$

Enbora o espaço das funções testes $\mathfrak{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, em geral ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Por esta razão, define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathfrak{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é:

$$\overline{\mathfrak{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Quando $p = 2$, o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H_0^m(\Omega)$.

Se $1 \leq p < \infty$ e q é o expoente conjugado de p, representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$ e por $H^{-m}(\Omega)$ o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

O espaço $H_0^m(\Omega)$ pode ser caracterizado por meio do *Operador de Traço*. De fato, inicialmente observamos que se Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira bem regular, então

$$\mathfrak{D}(\overline{\Omega}) = \{\varphi|_{\overline{\Omega}};\ \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)\}$$

é denso em $H^m(\Omega)$ e, dessa forma, dado $\varphi \in H^m(\Omega)$ existe uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ em $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ tal que $\varphi_\nu \longrightarrow \varphi$ na norma de $H^m(\Omega)$ e anotamos:

$$\varphi|_\Gamma = \lim_{\nu \to \infty} \varphi_\nu|_\Gamma\,,$$

onde o limite é considerado na norma de $H^m(\Omega)$. Para generalizar este conceito de *restrição* à fronteira consideramos o operador traço:

$$\gamma : H^m(\Omega) \longrightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma), \tag{1.6}$$

definido por $\gamma(\varphi) = (\gamma_0\varphi, \gamma_1\varphi, ..., \gamma_{m-1}\varphi)$, sendo

$$\gamma_j\varphi = \lim_{\nu\longrightarrow\infty} \left.\frac{\partial^j \varphi_\nu}{\partial\eta^j}\right|_\Gamma, \ \ j = 0, 1, ..., m-1$$

e $\dfrac{\partial^j \varphi_\nu}{\partial\eta^j}$ é a j-ésima derivada normal de φ_ν na direção da normal exterior η. Anotamos $\gamma_0\varphi = \varphi|_\Gamma$, $\gamma_1\varphi = \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right|_\Gamma$, $\gamma_2\varphi = \left.\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\right|_\Gamma$, etc.

A aplicação γ, dada em (1.6), denomina-se *aplicação traço de ordem m*. Esta aplicação é linear, contínua, sobrejetiva e temos:

$$\ker(\gamma) = H_0^m(\Omega).$$

Vejamos, agora, alguns casos particulares da aplicação traço que utilizamos neste trabalho.

- Caso $m = 1$.

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma), \text{ onde } \gamma_0\varphi = \varphi|_\Gamma$$

é linear, contínua e sobrejetiva. Temos, $H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega); \varphi|_\Gamma = 0\}$ e γ_0 admite uma inversa à direita linear e contínua $\gamma_0^{-1} : H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^1(\Omega)$. Assim, existe $C > 0$ tal que

$$\left\|\gamma_0^{-1}\xi\right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\|\xi\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \ \ \forall \ \ \xi \in H^{1/2}(\Gamma).$$

- Caso $m = 2$.

$$\gamma : H^2(\Omega) \longrightarrow H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma),$$

onde $\gamma\varphi = (\gamma_0\varphi, \gamma_1\varphi) = (\left.\varphi\right|_\Gamma, \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right|_\Gamma)$ e temos:

$$H_0^2(\Omega) = \left\{\varphi \in H^2(\Omega); \varphi|_\Gamma = 0, \ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right|_\Gamma = 0\right\}.$$

Teorema 1.1 ***(Imersão de Sobolev)*** *Se* $s > 0$ *e* $1 < p < n$*, então: (a)* $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$*, se* $n > sp$ *e* $p \leq r \leq np/(n - sp)$ *(b)* $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$*, se* $n = sp$ *e* $p \leq r < \infty$

Demonstração: Ver [4] . ■

Corolário 1.1 *Se* $mp < n$ *e* $p \leq q \leq \dfrac{np}{n - mp}$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Demonstração: Ver [4] . ■

Teorema 1.2 *Se* $s_1 > s_2$ *então* $H^{s_1}(\Omega)$ *está imerso compactamete em* $H^{s_2}(\Omega)$*. Em particular,* $H^{1/2}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Demonstração: Ver [8] . ■

Observação 1.1 *Em* [8] *e* [13] *os autores estabelecem resultados de imersões no caso de Espaços de Sobolev de ordem fracionária e, também, para Espaços de Traços do tipo* $H^s(\Gamma)$*, usando teoria de interpolação.*

1.3 Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais

Seja X um espaço de Banach, cuja norma será representada por $\|.\|$ e no intervalo $(0, T) \subset \mathbb{R}$, $T > 0$, consideremos a medida de Lebesgue dt. Denominamos *função simples* toda função $\varphi : (0, T) \to X$ que assume apenas um número finito de valores não nulos, onde cada valor não nulo é assumido num conjunto mensurável de medida finita. Toda função simples possui uma representação canônica da forma

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{E_i}(t).\varphi_i,$$

onde $\varphi_i \in X$ e $E_i \subset (0, T)$ é mensurável, com $m(E_i) < \infty$, $i = 1, ..., k$. Os vetores φ_i são distintos e os conjuntos E_i são dois a dois disjuntos. Aqui χ_{E_i} representa a função craracterística do conjunto E_i e estes são dados por

$$E_i = \{t \in (0, T);\ \varphi(t) = \varphi_i\}.$$

Definimos a integral de φ como sendo o vetor de X dado por

$$\int_0^T \varphi(t)dt = \sum_{i=1}^{k} m\left(E_i\right).\varphi_i.$$

Teorema 1.3 *Seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de funções simples tais que*

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_0^T \left\|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)\right\| dt = 0. \tag{1.7}$$

Existe uma única função vetorial $u : (0,T) \to X$ tal que $\|u(t)\|$ e $\|\varphi_n(t) - u(t)\|$ são mensuráveis (à Lebesgue) em $(0,T)$, $\forall\ n$, e

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left\|\varphi_n(t) - u(t)\right\| dt = 0. \tag{1.8}$$

Demonstração: Ver [9] . ■

Corolário 1.2 *Nas condições do Teorema 1.3, a seqüência $(\int_0^T \varphi_n(t)dt)$ converge em X e seu limite é unicamente determinado por u. Este limite é, por definição, a Integral de Bochner da função u e é denotado por $\int_0^T u(t)dt$.*

Demonstração: Ver [9] . ■

Desta forma, a integral de Bochner da função vetorial u, é o vetor de X dado por

$$\int_0^T u(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \varphi_n(t)dt,$$

onde o limite é considerado na norma de X.

Dizer que uma função vetorial u é integrável no sentido de Bochner-Lebesgue ou simplesmente $\mathfrak{B}$-integrável, significa que ela pode ser aproximada em X, quase sempre em $(0,T)$, por uma seqüência de funções simples satisfazendo (1.7) e consequentemente (1.8).

Uma função vetorial $u : (0,T) \to X$ é dita *fracamente mensurável* (ω-mensurável) quando a função numérica $t \longmapsto \langle \Phi, u(t)\rangle$ for mensurável, para qualquer funcional $\Phi \in X'$. Dizemos que u é *fortemente mensurável* (s-mensurável) quando existir uma seqüência de funções simples $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\varphi_n(t) \longrightarrow u(t), \text{ em } X, \text{ quase sempre em } (0,T).$$

Em particular, quando u é s-mensurável, então a função numérica $t \mapsto \|u(t)\|$ é mensurável à Lebesgue.

Teorema 1.4 ***(S. Bochner)*** *Uma função $u : (0,T) \to X$ é $\mathfrak{B}$-integrável se, e somente se, é s-mensurável e a função numérica $t \mapsto \|u(t)\|$ é integrável.*

Demonstração: Ver [9] . ■

Corolário 1.3 *Sejam X e Y dois espaços de Banach. Se $u : (0,T) \to X$ é $\mathfrak{B}$-integrável e se $T : X \longrightarrow Y$ é um operador linear limitado, então a função vetorial $Tu : (0,T) \longrightarrow Y$ definida por $(Tu)(t) = T(u(t))$é $\mathfrak{B}$-integrável e é válida a relação*

$$\int_0^T T(u(t))dt = T(\int_0^T u(t)dt).$$

Demonstração: Ver: [9] . ■

Corolário 1.4 *Se $u : (0,T) \to X'$ é $\mathfrak{B}$-integrável , então para cada $v \in X$ temos*

$$\left\langle \int_0^T u(t)dt, v \right\rangle_{X',X} = \int_0^T \langle u(t), v\rangle_{X',X}\, dt.$$

Demonstração: Ver [9] . ■

Num espaço de Hilbert H com produto interno $(.,.)$ onde os funcionais lineares limitados são identificados, via o Teorema da Representação de Riesz, com o produto interno, obtemos do corolário 1.4 a seguinte relação

$$(\int_0^T u(t)dt, v) = \int_0^T (u(t), v)dt, \ \forall\ v \in H,$$

quando $u : (0,T) \to H$ for $\mathfrak{B}$-integrável.

Dado $T > 0$, um número real, denotaremos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções vetoriais $u : (0,T) \longrightarrow X$ fortemente mensuráveis e tais que a função numérica $t \longmapsto \|u(t)\|_X$ está em $L^p(0,T)$, munido da norma

$$|u|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0, T; H)$ é também um espaço de Hilbert cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T ((u(t), v(t)))_H dt.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representaremos o espaço de Banach das (classes de) funções vetoriais $u : (0, T) \to X$ que são fortemente mensuráveis e $t \longmapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0, T)$ com a norma

$$|u|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname*{supess}_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X .$$

Lema 1.2 ***(Imersão)*** *Sejam X e Y dois espaços de Banach e suponhamos que $X \hookrightarrow Y$, isto é, $X \subset Y$ com imersão contínua. Se $1 \leq s \leq r \leq \infty$, então*

$$L^r(0, T; X) \hookrightarrow L^s(0, T; Y).$$

Demonstração: Ver [9] . ■

Lema 1.3 *Se $u \in L^p(0, T; X'), 1 \leq p \leq \infty,$ e $v \in X$ então $t \longmapsto \langle u(t), v\rangle_{X',X} \in L^p(0, T)$. Em particular, se H é um espaço de Hilbert, então $t \longmapsto (u(t), v)_H \in L^p(0, T)$.*

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty,$ então $L^p(0, T; X)$ é um espaço reflexivo separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de Banach $L^q(0, T; X')$, onde p e q são expoentes conjugados. No caso, $p = 1$ o dual topológico do espaço $L^1(0, T; X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0, T; X')$.

Lema 1.4 *Se p e q são índices conjugados, $u \in L^p(0, T; X)$ e $v \in L^q(0, T; X')$, então a função numérica $t \longmapsto \langle v(t), u(t)\rangle_{X',X} \in L^1(0, T)$.*

Demonstração: Ver [9] . ■

Observamos que o espaço de Banach $L^p(0, T; L^p(\Omega))$ se identifica, via o Teorema de Fubini, com o espaço $L^p(Q)$, $1 \leq p \leq \infty$, sendo Q o *cilindro* $\Omega \times (0, T)$. De fato, vejamos o caso em que $1 \leq p < \infty$. Dada uma função $u \in L^p(0, T; L^p(\Omega))$, então para cada $t \in (0, t)$

temos que $u(t) \in L^p(\Omega)$ e portanto $u(t)$ é uma função de $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo valor em x será denotado por $u(x,t)$. Assim,

$$\int_0^T |u(t)|^p_{L^p(\Omega)}\, dt = \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^p\, dxdt = \int_Q |u(x,t)|^p\, dQ = |u|^p_{L^p(Q)}\,. \blacksquare$$

Dado $u \in L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, definimos o operador $T_u : \mathfrak{D}(0,T) \longrightarrow X$ por:

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt,$$

onde a integral é calculada no sentido de Bochner em X. A aplicação T_u é linear e contínua de $\mathfrak{D}(0,T)$ em X e por esta razão é denominada *distribuição vetorial.*

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathfrak{D}(0,T)$ em X é denominado o espaço das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X, o qual denotaremos $\mathfrak{D}'(0,T;X)$.

Po $C^0([0,T]\,;X)$, $0 < T < \infty$, representaremos o espaço de Banach das funções comtínuas $u : [0,T] \longrightarrow X$ munido da norma da convergência uniforme

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X\,.$$

Por $C^0_w([0,T]\,;X)$, denotaremos o espaço das funções $u : [0,T] \longrightarrow X$ tais que a aplicação $t \longmapsto \langle v, u(t)\rangle_{X',X}$ é contínua em $[0,T]\,,\, \forall\, v \in X'$. Uma tal função u é denominada *fracamente contínua e no caso em que* $X = H$ é um espaço de Hilbert, a continuidade fraca de u é equivalente a continuidade da aplicação $t \longmapsto (u(t), v)_H$, $v \in H$.

Lema 1.5 *Sejam V e H espaços de Hilbert, V imerso continuamente em H, $u \in L^p(0,T;V)$ e $u' \in L^p(0,T;H)$, com $1 \leq p \leq \infty$, então*

$$u \in C^0([0,T];H) \cap C^0_w([0,T];V).$$

Demonstração: Ver Lions [7] . $\blacksquare$

Lema 1.6 ***(Lema de Compacidade de Aubin-Lions)*** *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach reflexivos tais que, $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$. Se $1 < p_0$, $p_1 < \infty$ e $T > 0$, então o espaço*

$$W = \{u \in L^{p_0}(0,T;B_0);\ u' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}$$

equipado da norma $\|u\|_W = |u|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + |u'|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$, *está compactamente imerso em* $L^{p_0}(0,T;B)$.

Demonstração: Ver Lions [7] . $\blacksquare$

Como conseqüência do Lema de Compacidade de Aubin-Lions, temos que se $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em $L^{p_0}(0,T;B_0)$ e $(u'_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em $L^{p_1}(0,T;B_1)$, então $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é limitada em W. Daí, segue da imersão compacta, que existe uma subseqüência $(u_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (u_ν) tal que $u_{\nu_k} \to u$ forte em $L^{p_0}(0,T;B)$.

Lema 1.7 ***(Lions)*** *Sejam* G *um aberto limitado de* $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, g_m *e* g *funções de* $L^q(G)$, $1 < q < \infty$, *satisfazendo*

$$|g_m|_{L^q(G)} \leq c \quad e \quad g_m \longrightarrow g \ \text{q.s. em } G.$$

Então:

$$g_m \longrightarrow g \quad \text{em} \quad L^q(G) \quad \text{fraco.}$$

Demonstração: Ver [7] . $\blacksquare$

1.4 Soma Hilbertiana, Base Hilbertiana

Definição 1.3 *Seja* $(E_n)_{n\geq 1}$ *uma sucessão de subespaços fechados de um espaço de Hilbert* H. *Dizemos que* H *é soma Hilbertiana dos* E_n *e escrevemos* $H = \bigoplus\limits_n E_n$ *se:*
(i) Os E_n *são dois a dois ortogonais, isto é,* $(u,v) = 0$, $\forall\ u \in E_m$, $\forall\ v \in E_n$, $m \neq n$.
(ii) Os subespaço gerado pelos E_n *é denso em* H.

Teorema 1.5 *Suponhamos* $H = \bigoplus\limits_n E_n$ *e denotemos por* P_{E_n} *a projeção de* H *sobre* E_n. *Se* $u \in H$ *e* $u_n = P_{E_n}u$, *então:*
(i) $u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, *isto é,* $u = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{k} u_n$.

(ii) $|u|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|^2$ (*igualdade de Bessel-Parseval*).

Reciprocamente, dada uma sucessão (u_n) de H, com $u_n \in E_n$, $\forall n$, e $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty$, então a série $\sum_n u_n$ é converge em H e $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ verifica $u_n = P_{E_n} u$.
Demonstração: Ver [3] . ∎

Definição 1.4 *Uma seqüência (w_ν) de vetores de H é chamada base Hilbertiana se:*

(i) $(w_\nu, w_\mu) = \delta_{\nu\mu} = \begin{cases} 1, & \text{se } \nu = \mu \\ 0, & \text{se } \nu \neq \mu \end{cases}$;

(ii) As combinações lineares finitas dos w_ν são densas em H.

Resulta do Teorema 1.5 que se $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma base Hilbertiana de H, então para todo $u \in H$ tem-se:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, w_\nu) w_\nu, \quad \text{e} \quad |u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, w_\nu)|^2 .$$

Teorema 1.6 *Todo espaço de Hilbert separável admite uma base Hilbertiana.*

Demonstração: Ver [3] . ∎

1.5 Sobre o Prolongamento de Soluções

Seja D um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^{m+1}$ cujos elementos serão denotados por (t, x), $x \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}$ e seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função não necessariamente contínua. Se existe uma função $x(t)$, absolutamente contínua, definida em algum intervalo da reta I tal que $(t, x(t)) \in D$, para todo $t \in I$ e

$$x' = f(t, x) \text{ para quase todo } t \in I \tag{1.9}$$

então dizemos que $x(t)$ é uma solução de (1.9) sobre I.

Dado $(t_0, x_0) \in D$ consideremos o seguinte problema do valor inicial associado a (1.9)

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} . \tag{1.10}$$

As seguintes condições sobre f são denominadas *Condições de Carathéodory*:

1. $f(t,x)$ é mensurável em t, para cada x fixo;
2. $f(t,x)$ é contínua em x, para cada t fixo;
3. Para cada compacto $K \subset D$, existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que

$$|f(t,x)| \leq m_K(t), \text{ para todo } (t,x) \in D.$$

Teorema 1.7 ***(Carathéodory)***
Sobre o retângulo $R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{m+1}; |t-t_0| \leq a, \ |x-x_0| \leq b\}, a > 0, b > 0$ *consideremos* $f : R \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *satisfazendo as condições de Carathéodory. Existe uma solução* $x(t)$ *de (1.10) em algum intervalo* $|t-t_0| \leq \beta$, $(\beta > 0)$.

Demonstração: Ver [11]. ■

Corolário 1.5 *Se* $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ *é aberto e* f *satisfaz as condições de Carathéodory sobre* D, *então o problema (1.10) tem solução para qualquer* $(t_0, x_0) \in D$.

Seja $\varphi(t)$ uma solução de (1.9) sobre I. Por um *prolongamento* de φ ao intervalo $I_1 \supset I$, entendemos uma solução φ_1 de (1.9) definida em I_1 tal que $\varphi_1(t) = \varphi(t)$, $\forall\ t \in I$.

Teorema 1.8 *Seja* D *um aberto limitado e conexo do* $\mathbb{R}^{m+1}$ *e suponha que* f *satisfaça as duas primeiras condições de Carathéodory sobre* D *e que exista uma função integrável* $m(t)$ *tal que* $|f(t,x)| \leq m(t)$, *para todo* $(t,x) \in D$. *Seja* φ *uma solução de (1.9) sobre o intervalo aberto* (a,b) *então:*

(i) existem $\varphi(a+0)$, $\varphi(b-0)$;

(ii) se $(b, \varphi(b-0)) \in D$ então φ pode ser prolongada até $(a, b+\delta]$ para algum $\delta > 0$. Análogo para a;

(iii) $\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo (γ, ω) tal que $(\gamma, \varphi(\gamma+0)), (\omega, \varphi(\omega-0)) \in \partial D$ (∂D fronteira de D);

(iv) se f estende-se a $\overline{D}$ sem que ele perca suas propriedades, então $\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo $[\gamma, \omega]$ tal que $(\gamma, \varphi(\gamma+0)), (\omega, \varphi(\omega-0)) \in \partial D$.

Demonstração: Ver [11]. ■

Corolário 1.6 *Seja $D = [0,T] \times B$, $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^m; |x| \leq b\}$, $b > 0$ e f nas condições do Teorema 1.8. Seja $\varphi(t)$ uma solução de*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = x_0, \quad |x_0| \leq b \end{cases}.$$

Suponhamos que em qualquer intervalo I, onde $\varphi(t)$ está definida, se tenha $|\varphi(t)| \leq M$, $\forall$ $t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então φ tem um prolongamento até $[0,T]$.

Demonstração: Ver [11] . ■

Vamos apresentar agora um novo operador. A grande vantagem de definir o operador A é possibilitar a formulação dos problemas (1) e (2), descritos na introdução, sobre a fronteira Γ.

1.6 Operador A

Dada $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, segue da teoria de equação elíptica que o problema

$$\left| \begin{array}{l} \Delta\Phi = 0 \ \text{ em } \ \Omega \\ \Phi = \varphi \ \text{ sobre } \ \Gamma \end{array} \right. \tag{1.11}$$

possui solução $\Phi \in H^1(\Omega)$ e da teoria do traço resulta que $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \eta} \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Definimos o operador $A : H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ por

$$A\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}. \tag{1.12}$$

Para mostrarmos que o operador A está bem definido usaremos as propriedades do operador de traço. De fato, sendo o operador traço $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ linear, contínuo e sobrejetivo, dado $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ existe $\Phi \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0\Phi = \varphi$. Por outro lado, se Φ_1 e Φ_2 são soluções de (1.11), então $w = \Phi_1 - \Phi_2$ é solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta w = 0 \ \text{ em } \ \Omega \\ w = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma \end{array} \right.$$

e do Teorema de Unicidade segue que $w = 0$. Desta forma, $\Phi_1 = \Phi_2$, o que mostra a unicidade de solução do problema (1.11). Mostremos agora que $A \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma); H^{-1/2}(\Gamma))$. Com efeito:

i) A é linear.

Dados φ_1, $\varphi_2 \in H^{1/2}(\Gamma)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, sejam Φ_1, $\Phi_2 \in H^1(\Omega)$ tais que $A\varphi_j = \dfrac{\partial \Phi_j}{\partial \eta}$, $j = 1, 2$. Então, segue da definição de A que

$$A\varphi_1 + \lambda A\varphi_2 = \frac{\partial}{\partial \eta}(\Phi_1 + \lambda\Phi_2) \tag{1.13}$$

e sendo $\Phi_1 + \lambda\Phi_2$ solução de

$$\left| \begin{array}{l} \Delta(\Phi_1 + \lambda\Phi_2) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \Phi_1 + \lambda\Phi_2 = \varphi_1 + \lambda\varphi_2 \quad \text{sobre} \quad \Gamma, \end{array} \right.$$

resulta que

$$A\left(\varphi_1 + \lambda\varphi_2\right) = \frac{\partial}{\partial \eta}(\Phi_1 + \lambda\Phi_2). \tag{1.14}$$

Comparando (1.13) com (1.14), obtemos

$$A(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) = A\varphi_1 + \lambda A\varphi_2.$$

ii) A é limitado

Consideremos o espaço de Hilbert $\widetilde{H}(\Omega)$ dado por

$$\widetilde{H}(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega);\ \Delta u \in L^2(\Omega)\right\},$$

com produto escalar

$$(u, v)_{\widetilde{H}(\Omega)} = (u, v)_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}.$$

Em [11], demonstra-se que no espaço $\widetilde{H}(\Omega)$ o operador traço $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1)$ atua do seguinte modo:

$$\begin{array}{rccc} \gamma = (\gamma_0, \gamma_1): & \widetilde{H}(\Omega) & \longrightarrow & H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma) \\ & u & \longmapsto & (\gamma_0 u, \gamma_1 u) \end{array}$$

onde $\gamma_0 u = u|_\Gamma$ e $\gamma_1 u = \left.\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right|_\Gamma$, sendo γ linear, contínuo e sobrejetivo. Dado $\Phi \in \widetilde{H}(\Omega)$ satisfazendo (1.11) e (1.12), então $\gamma_1 \Phi = \left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$ e, da continuidade de γ, segue que existe uma constante C tal que:

$$\|\gamma_1\Phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \|\gamma_0\Phi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\gamma_1\Phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \|\gamma\Phi\|_{H^{1/2}\times H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C\,\|\Phi\|_{\widetilde{H}(\Omega)}\,.$$

Logo,

$$\|\gamma_1\Phi\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C\,\|\Phi\|^2_{\widetilde{H}(\Omega)}\,. \tag{1.15}$$

Como $\|\Phi\|^2_{\widetilde{H}(\Omega)} = \|\Phi\|^2_{H^1(\Omega)} + |\Delta\Phi|^2_{L^2(\Omega)}$, resulta de $(1.11)_1$ e de (1.15) que

$$\|\gamma_1\Phi\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C(\|\Phi\|^2_{H^1(\Omega)} + |\Delta\Phi|^2_{L^2(\Omega)}) = C\,\|\Phi\|^2_{H^1(\Omega)}\,,$$

ou seja,

$$\|\gamma_1\Phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C\,\|\Phi\|_{H^1(\Omega)}\,. \tag{1.16}$$

Finalmente, usando a continuidade do operador $\gamma_0^{-1} : H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^1(\Omega)$ deduzimos que

$$\left\|\gamma_0^{-1}\gamma_0\Phi\right\|_{H^1(\Omega)} \leq C\,\|\gamma_0\Phi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

e substituindo esta última desigualdade em (1.16), obtemos

$$\|\gamma_1\Phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C\,\|\gamma_0\Phi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\,.$$

Desta forma,

$$\|A\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \|\gamma_1\Phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C\,\|\gamma_0\Phi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = C\,\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\,,$$

onde C representa diversas constantes positivas. Concluímos, portanto, que o operador A é limitado.

O operador A admite uma extensão natural $\widetilde{A}$ ao espaço $L^p(0,T;H^{1/2}(\Gamma))$, $1 \leq p \leq \infty$, que é linear e limitada, definida por:

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{A}: & L^p(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) & \longrightarrow & L^p(0,T;H^{-1/2}(\Gamma)) \\ & u & \longmapsto & \widetilde{A}u \end{array}$$

Lema 1.8 *Seja Φ satisfazendo (1.11) e (1.12). Dado $\lambda > 0$, então existe $\alpha = \alpha(\lambda) > 0$ tal que*

$$(A\varphi, \varphi)_\Gamma + \lambda |\varphi|^2_{L^2(\Gamma)} \geq \alpha \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}, \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \ \forall \lambda > 0.$$

Demonstração: Usando a Identidade de Green, temos

$$0 = \int_\Omega (-\Delta\Phi)\Phi dx = \int_\Omega \nabla\Phi\nabla\Phi dx - \int_\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\Phi d\Gamma = \int_\Omega |\nabla\Phi|^2 dx - (A\varphi, \varphi)_\Gamma$$

e, conseqüentemente:

$$(A\varphi, \varphi)_\Gamma = \int_\Omega |\nabla\Phi|^2 dx. \tag{1.17}$$

Portanto,

$$(A\varphi, \varphi)_\Gamma + \lambda |\varphi|^2_{L^2(\Gamma)} = \int_\Omega |\nabla\Phi|^2 dx + \lambda \int_\Gamma |\Phi|^2 d\Gamma. \tag{1.18}$$

Ora, o operador $\gamma_0^{-1} : \mathrm{Im}(\gamma_0) \subset L^2(\Gamma) \longrightarrow H^1(\Omega)$ é linear e contínuo e, sendo assim, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\|\gamma_0^{-1}(v)\right\|_{H^1(\Omega)} \leq C |v|_{L^2(\Gamma)}, \forall v \in \mathrm{Im}(\gamma_0). \tag{1.19}$$

Considerando $v = \gamma_0\Phi \in \mathrm{Im}(\gamma_0)$ em (1.19), obtemos

$$\|\Phi\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C \int_\Gamma |\Phi|^2 d\Gamma,$$

ou seja,

$$\frac{1}{C} \|\Phi\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \int_\Gamma |\Phi|^2 d\Gamma.$$

Logo,

$$\int_\Omega |\nabla\Phi|^2 dx + \lambda \int_\Gamma |\Phi|^2 d\Gamma \geq \frac{\lambda}{C} \|\Phi\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{1.20}$$

Substituindo (1.20) em (1.18) e usando a continuidade do operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, concluímos que $(A\varphi, \varphi)_\Gamma + \lambda |\varphi|^2_{L^2(\Gamma)} \geq \alpha \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}$.$\blacksquare$

Observação 1.2 *De (1.17), temos que*

$$(A\varphi, \varphi)_\Gamma = \int_\Omega |\nabla\Phi|^2 dx \geq 0$$

e portanto concluímos que o operador A é positivo.

Observação 1.3 *Poderíamos considerar no Lema 1.8* $\lambda = 0$. *Para isso, é suficiente substituir o problema (1.11) por*

$$\left| \begin{array}{l} \Delta\Phi + \beta\Phi = 0 \quad \textit{em} \;\; \Omega \quad \textit{para}\ \beta > 0, \\ \Phi = \varphi \quad \textit{sobre} \;\; \Gamma. \end{array} \right.$$

Neste caso, é possível resolver os problemas (1) *e* (2), *bem como o caso linear.*

Capítulo 2

O Problema Parabólico Sobre Γ

Designando $w(t)|_{\Gamma} = u(t)$ e observando que $\dfrac{\partial w}{\partial \eta}(t) = Au(t)$, o problema (1) apresentado na introdução deste trabalho pode ser formulado assim:

$$(P)\left|\begin{array}{l}\text{Encontrar uma função } u : \Sigma \to \mathbb{R}, \text{ tal que} \\ u' + Au + |u|^{\rho}\, u = f \quad \text{sobre} \quad \Sigma \\ u(0) = w_0, \quad \text{dado sobre } \Gamma. \end{array}\right.$$

Para estudar o Problema (P), primeiro vamos estabelecer o conceito de solução. Por solução do problema (P) entendemos qualquer função $u : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$u \in L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) \cap L^{\infty}(0,T;L^2(\Gamma)) \cap L^p(\Sigma), \tag{2.1}$$

$$u' + Au + |u|^{\rho}\, u = f \qquad \text{no sentido de } L^{p'}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma) + L^{p'}(\Gamma)), \tag{2.2}$$

$$u(0) = w_0, \ \text{ sobre } \Gamma, \tag{2.3}$$

onde $p = \rho + 2$.

Teorema 2.1 *Dados $w_0 \in L^2(\Gamma)$ e $f \in L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$, existe uma única função $u : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (2.1), (2.2) e (2.3).*

Demonstração:

2.1 Existência de Solução

A existência de solução será estabelecida utilizando o Método de Faedo-Galerkin, o qual consiste em obter uma seqüência de soluções aproximadas do problema (P) e, em seguida, por meio de estimativas a Priori, passar o limite, em uma topologia adequada, nesta seqüência de soluções aproximadas. Por simplicidade, dividiremos a demonstração nas seguintes etapas:

1. Construção de soluções aproximadas em subespaços de dimensão finita.
2. Estimativas a Priori.
3. Passagem ao limite nas soluções aproximadas.
4. Condição Inicial.

2.1.1 Etapa 1: Soluções Aproximadas

Consideremos $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma base Hilbertiana de $H^{1/2}(\Gamma)\cap L^p(\Gamma)$ e para cada $m = 1,2,3,\ldots$seja $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ o subespaço de $H^{1/2}(\Gamma)\cap L^p(\Gamma)$ gerado pelos m primeiros vetores de $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$. O problema aproximado, associado a (P), consiste em determinar uma seqüência de funções da forma:

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j(x) \in V_m,$$

sendo $g_{jm}(t)$ de classe C^1, de modo que satisfaçam ao sistema:

$$(PA)\left|\begin{array}{l} (u_m'(t),v)_\Gamma + (Au_m(t),v)_\Gamma + (|u_m(t)|^\rho\, u_m(t),v)_\Gamma = (f(t),v)_\Gamma,\ \forall v\in V_m, \\ u_m(0) = w_{0m}\in V_m, \end{array}\right.$$

onde w_{0m} é a aproximação de w_0. Como $H^{1/2}(\Gamma)\cap L^p(\Gamma)\hookrightarrow L^2(\Gamma)$ então, usando o processo de Gram-Schmidt, a base $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ pode ser considerada ortonormal em $L^2(\Gamma)$ e sendo $w_0\in L^2(\Gamma)$, podemos aproximá-lo por combinações lineares finitas dos w_ν, isto é, existem $\alpha_{jm}\in\mathbb{R}$, $j=1,2,...,m$, tais que

$$w_{0m} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm} w_j \longrightarrow w_0 \text{ em } L^2(\Gamma). \tag{2.4}$$

Portanto, tem-se de forma natural

$$u_m(0) = u_m(x,0) = w_{0m}$$

e $(PA)_2$ torna-se equivalente a

$$g_{jm}(0) = \alpha_{jm}, \text{ para } \quad j = 1, 2, ..., m.$$

Seja $\varphi(s) = |s|^\rho s$ e façamos $v = w_i$ em $(PA)_1$, para obtermos

$$\sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\,(w_j, w_i)_\Gamma + \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\,(Aw_j, w_i)_\Gamma + (\varphi\,(u_m\,(t))\,, w_i)_\Gamma = (f\,(t)\,, w_i)_\Gamma\,.$$

Desde que a seqüência $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ é ortonormal em $L^2\,(\Gamma)$, a última igualdade é equivalente a:

$$g'_{jm}(t) + \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\,(Aw_j, w_i)_\Gamma + (\varphi\,(u_m\,(t))\,, w_i)_\Gamma = (f\,(t)\,, w_i)_\Gamma\,, \;\; j = 1, 2, ..., m$$

e, conseqüentemente, o sistema (PA) assume a seguinte forma:

$$\left| \begin{array}{l} g'_{jm}(t) + \sum\limits_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\,(Aw_j, w_i)_\Gamma + (\varphi\,(u_m\,(t))\,, w_i)_\Gamma = (f\,(t)\,, w_i)_\Gamma\,, \;\; j = 1, 2, ..., m, \\ g_{jm}(0) = \alpha_{jm}, \text{ para } \quad j = 1, 2, ..., m. \end{array} \right. \tag{2.5}$$

Para escrevermos (2.5) na forma matricial, consideremos as seguintes matrizes:

$$C = \left[(Aw_j, w_i)_\Gamma\right]_{1\le i,j\le m}, \quad L = \begin{bmatrix} (\varphi\,(u_m\,(t))\,, w_1)_\Gamma \\ \vdots \\ (\varphi\,(u_m\,(t))\,, w_m)_\Gamma \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

$$M = \begin{bmatrix} (f\,(t)\,, w_1)_\Gamma \\ \vdots \\ (f\,(t)\,, w_m)_\Gamma \end{bmatrix}_{m\times 1}, \quad Y = \begin{bmatrix} g_{1m} \\ \vdots \\ g_{mm} \end{bmatrix}_{m\times 1} \quad Y_0 = \begin{bmatrix} \alpha_{1m} \\ \vdots \\ \alpha_{mm} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

e o sistema (2.5) torna–se:

$$\left| \begin{array}{l} Y' = F\,(t, Y) \\ Y\,(0) = Y_0, \end{array} \right.$$

onde $F(t,Y) = -CY - L + M$. Observemos que a matriz (função) M não depende de Y e é mensurável como função de t, porque cada entrada $t \mapsto (f(t), w_j)_\Gamma$ é mensurável. Por outro lado, a função $Y \mapsto -CY - L$ é contínua como função de Y, porque CY é linear e

$$(g_{1m}, ..., g_{mm}) \in \mathbb{R}^m \overset{G}{\longmapsto} u = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j \in [w_1, w_2, ..., w_m] \quad \text{e}$$

$$u \in [w_1, w_2, ..., w_m] \overset{H}{\longmapsto} (\varphi(u), w_j) \in \mathbb{R}$$

são funções contínuas e portanto a composição

$$(g_{1m}, ..., g_{mm}) \in \mathbb{R}^m \overset{H \circ G}{\longmapsto} (\varphi(u), w_j) \in \mathbb{R}$$

é também contínua. Com isto deduzimos que $F(t,Y)$ atende às condições de Carathéodory. Além disso, se $B = \{Y \in \mathbb{R}^m; |Y| \leq b\}$, $b > 0$, $Y_0 \in B$, então para Y variando em B, todas as entradas das matrizes CY e L são limitadas por uma mesma constante $C_B > 0$ e as entradas da matriz M são funções integráveis em $[0,T]$. De fato, como $f \in L^2(0,T; H^{-1/2}(\Gamma))$, então

$$\int_0^T \left| \langle f(t), w_j \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} \right| dt \leq \|w_j\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \int_0^T \|f(t)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \, dt < \infty$$

Temos, portanto

$$|F(t,Y)| \leq 2C_B + |\langle f(t), w_j \rangle| = m_j(t),$$

onde (t,Y) varia no compacto $[0,T] \times B$ e $m_j(t)$, $j = 1, 2, ..., m$ é integrável em $[0,T]$.

Desta forma, pelo Teorema 1.7 o sistema (2.5) possui solução local e, consequentemente, (PA) tem solução $u_m(t)$ definida no intervalo $[0, t_m]$, $t_m < T$. Na próxima etapa, vamos obter estimativas a priori para as soluções aproximadas com o objetivo de prolongar a solução $u_m(t)$ ao intervalo $[0,T]$.

2.1.2 Etapa 2: Estimativas a Priori

Estimativas a Priori 1

Considerando em $(PA)_1$ $v = u_m(t)$, obtemos

$$\left(u_m'(t), u_m(t) \right)_\Gamma + (Au_m(t), u_m(t))_\Gamma + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m(t))_\Gamma = (f(t), u_m(t))_\Gamma \quad (2.6)$$

e usando as relações

- $\left(u_m'(t), u_m(t)\right)_\Gamma = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left|u_m(t)\right|^2_{L^2(\Gamma)}$
- $\left(\left|u_m(t)\right|^\rho u_m(t), u_m(t)\right)_\Gamma = \left|u_m(t)\right|^p_{L^p(\Gamma)}$, $p = \rho + 2$

resulta de (2.6)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m(t)\right|^2_{L^2(\Gamma)} + \left(Au_m(t), u_m(t)\right)_\Gamma + \left|u_m(t)\right|^p_{L^p(\Gamma)} = \langle f(t), u_m(t)\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)}. \tag{2.7}$$

Observação 2.1 *Desde que $p = \rho + 2 > 2$, segue que $L^p(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$ e portanto existe uma constante $C > 0$ tal que $C\left|u\right|_{L^2(\Gamma)} \leq \left|u\right|_{L^p(\Gamma)}$, e do Lema 1.8, resulta*

$$\begin{aligned}\left(Au_m(t), u_m(t)\right)_\Gamma + \left|u_m(t)\right|^p_{L^p(\Gamma)} &\geq \left(Au_m(t), u_m(t)\right)_\Gamma + C\left|u_m(t)\right|^p_{L^2(\Gamma)} \geq \\ &\geq \left(Au_m(t), u_m(t)\right)_\Gamma + C\left|u_m(t)\right|^2_{L^2(\Gamma)} \geq \\ &\geq \alpha\left\|u_m(t)\right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}.\end{aligned}$$

Da Observação 2.1 e de (2.7), segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m(t)\right|^2_{L^2(\Gamma)} + \alpha\left\|u_m(t)\right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \langle f(t), u_m(t)\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Integrando esta última desigualdade de 0 a $t \in [0, t_m]$ e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, encontramos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left|u_m(t)\right|^2_{L^2(\Gamma)} + \alpha\int_0^t \left\|u_m(s)\right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} ds \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\left|w_{0m}\right|^2_{L^2(\Gamma)} + \int_0^t \langle f(s), u_m(s)\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} ds.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Agora, usando a Desigualdade de Cauchy e em seguida a Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}\int_0^t \langle f(s), u_m(s)\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} ds &\leq \int_0^t \left\|f(s)\right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\left\|u_m(s)\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left\|f(s)\right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\sqrt{\alpha}\left\|u_m(s)\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} ds \\ &\leq \frac{1}{2\alpha}\int_0^T \left\|f(s)\right\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} ds + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \left\|u_m(s)\right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} ds.\end{aligned}$$

Substituindo em (2.8), resulta

$$\frac{1}{2}\left|u_m(t)\right|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \left\|u_m(s)\right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} ds \leq \frac{1}{2}\left|w_{0m}\right|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{1}{2\alpha}\int_0^T \left\|f(s)\right\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} ds.$$

De (2.4) e considerando que $f \in L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$, obtemos

$$\frac{1}{2}\left|u_m\left(t\right)\right|^2_{L^2(\Gamma)}+\frac{\alpha}{2}\int_0^t\left\|u_m\left(s\right)\right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}ds\leq C, \tag{2.9}$$

onde $C>0$ independe de m e de $t\in[0,t_m]$.

De (2.9) segue que

$$\left|u_m\left(t\right)\right|^2_{L^2(\Gamma)}\leq C,$$

onde C independe de m e de $t\in[0,t_m]$. Desde que

$$\left|u_m\left(t\right)\right|^2_{L^2(\Gamma)}=\left(u_m\left(t\right),u_m\left(t\right)\right)_\Gamma=\left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j,\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j\right)_\Gamma=\sum_{j=1}^m g^2_{jm}(t),$$

temos,

$$\left|Y\left(t\right)\right|^2_{\mathbb{R}^m}=\sum_{j=1}^m g^2_{jm}(t)\leq C.$$

Considerando b suficientemente grande de modo que $\sqrt{C}<b$, segue do Corolário 1.6 que podemos prolongar $Y\left(t\right)$ ao intervalo $[0,T]$. Assim o sistema aproximado possui solução $u_m\left(t\right)$ definida no intervalo $[0,T]$ e como conseqüência de (2.9), temos as estimativas:

$$\frac{\alpha}{2}\int_0^t\left\|u_m\left(s\right)\right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}ds\leq C, \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{2}\left|u_m\left(t\right)\right|^2_{L^2(\Gamma)}\leq C, \tag{2.11}$$

onde $C>0$ independe de m e de $t\in[0,T]$.

Observação 2.2 *Para cada $t\in[0,T]$, seja $\Phi_m\left(x,t\right)$, $x\in\Omega$, satisfazendo $\Delta\Phi_m\left(x,t\right)=0$, x em Ω e $\Phi_m\left(x,t\right)=u_m\left(x,t\right)$, $x\in\Gamma$. Então, segue da Identidade de Green que:*

$$\left(Au_m\left(t\right),u_m\left(t\right)\right)_\Gamma=\int_\Gamma\frac{\partial\Phi_m\left(x,t\right)}{\partial\eta}\Phi_m\left(x,t\right)dx=\int_\Omega\left|\nabla\Phi_m\left(t\right)\right|^2dx\geq 0.$$

Da Observação 2.2 e de (2.7) obtemos, após integração de 0 a $t\in[0,T]$, a seguinte relação:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left|u_m\left(t\right)\right|^2_{L^2(\Gamma)}+\int_0^t\int_\Omega\left|\nabla\Phi_m\left(s\right)\right|^2dxds+\int_0^t\left|u_m\left(s\right)\right|^p_{L^p(\Gamma)}ds\\&=\frac{1}{2}\left|w_{0m}\right|^2_{L^2(\Gamma)}+\int_0^t\left\langle f(s),u_m\left(s\right)\right\rangle_{H^{-11/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)}ds\end{aligned}$$

e, conseqüentemente

$$\frac{1}{2}\left|u_m(t)\right|^2_{L^2(\Gamma)}+\int_0^t\left|u_m(s)\right|^p_{L^p(\Gamma)}ds\leq\frac{1}{2}\left|w_{0m}\right|^2_{L^2(\Gamma)}+\int_0^t\left\langle f(s),u_m(s)\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)}ds.$$

Usando (2.10) deduzimos que o lado direito da última desigualdade é limitado e, dessa forma, concluímos que

$$\frac{1}{2}\left|u_m(t)\right|^2_{L^2(\Gamma)}+\int_0^t\left|u_m(s)\right|^p_{L^p(\Gamma)}ds\leq C$$

de onde resulta

$$\int_0^t\left|u_m(s)\right|^p_{L^p(\Gamma)}ds\leq C,\tag{2.12}$$

onde $C>0$ independe de m e de $t\in[0,T]$.

Das estimativas (2.10), (2.11) e (2.12), deduzimos que

$$\begin{aligned}&(u_m)\ \text{é limitada em } L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma)),\\&(u_m)\ \text{é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Gamma)),\\&(u_m)\ \text{é limitada em } L^p(0,T;L^p(\Gamma))=L^p(\Sigma).\end{aligned}\tag{2.13}$$

Como

$$\left|\widetilde{A}u_m\right|^2_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))}=\int_0^T\left\|Au_m(t)\right\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}dt\leq C\int_0^T\left\|u_m(t)\right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}dt,$$

deduzimos de (2.13) que

$$(\widetilde{A}u_m)\ \text{é limitada em } L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))\tag{2.14}$$

e, ainda por (2.13), temos que

$$(\left|u_m\right|^\rho u_m)\ \text{é limitada em } L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Gamma))=L^{p'}(\Sigma).\tag{2.15}$$

De fato, se p' é o expoente conjugado de $p=\rho+2$ então, $1\leq p'\leq 2$ e $(\rho+1)\,p'=p$. Assim,

$$\begin{aligned}\left|\left|u_m\right|^\rho u_m\right|^{p'}_{L^{p'}(\Sigma)}&=\int_0^T\left|\left|u_m(t)\right|^\rho u_m(t)\right|^{p'}_{L^{p'}(\Gamma)}dt=\int_0^T\int_\Gamma\left|\left|u_m(x,t)\right|^\rho u_m(t)\right|^{p'}d\Gamma dt\\&=\int_0^T\int_\Gamma\left|u_m(x,t)\right|^{(\rho+1)p'}d\Gamma dt=\int_0^T\left|u_m(t)\right|^p_{L^p(\Gamma)}dt=\left|u_m\right|^p_{L^p(0,T;L^p(\Gamma))}.\end{aligned}$$

Estimativas a Priori 2

Designe $P_m : L^2(\Gamma) \longrightarrow [w_1, w_2, ..., w_m]$ o operador projeção sobre V_m, definido do modo seguinte: dado $v \in L^2(\Gamma)$ escrevemos

$$v = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} (v, w_j)\, w_j,$$

e definimos $P_m v = \sum\limits_{j=1}^{m} (v, w_j)\, w_j$. É claro que P_m é um operador linear. Usando a relação

$$|v|_\Gamma^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(v, w_j)|^2 \geq \sum_{j=1}^{m} |(v, w_j)|^2 = |P_m v|_\Gamma^2$$

obtemos que P_m é contínuo.

Para obter uma estimativa para $\left(u_m'\right)$, observamos inicialmente que $P_m v = v,\ \forall v \in V_m$, e de $(PA)_1$, resulta

$$u_m' = -Au_m - |u_m|^\rho\, u_m + f$$

e assim

$$u_m' = -P_m A u_m - P_m\left(|u_m|^\rho\, u_m\right) + P_m f. \tag{2.16}$$

Seja $\widetilde{P}_m : H^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ extensão de P_m. Mostremos que $\widetilde{P}_m$ é limitado. De fato, se i representa o operador inclusão, então do diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} L^2(\Gamma) & \xrightarrow{P_m} & V_m \subset L^2(\Gamma) \\ i\downarrow & & i\downarrow \\ H^{-1/2}(\Gamma) & \xrightarrow{\widetilde{P}_m} & H^{-1/2}(\Gamma) \end{array}$$

deduzimos

$$\langle i(v), \varphi \rangle = (v, \varphi)_\Gamma \quad \text{e} \quad \left\langle \widetilde{P}_m(v), \varphi \right\rangle = \langle v, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$$

e, portanto

$$\begin{aligned}
\left\| \widetilde{P}_m(v) \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} &= \sup\{\left| \left\langle \widetilde{P}_m(v), \varphi \right\rangle \right|, \ \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \ \|\varphi\| = 1\} \\
&= \sup\{|\langle v, \varphi\rangle|, \ \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \ \|\varphi\| = 1\} \\
&\leq \sup_{\substack{\varphi \,\in\, H^{1/2}(\Gamma) \\ \|\varphi\|=1}} \left(\|v\|_{H^{-1/2}} \|\varphi\|_{H^{1/2}} \right) \\
&= \sup_{\varphi \,\in\, H^{1/2}(\Gamma)} \|v\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \|v\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Quando necessário, iremos considerar a extensão

$$\widetilde{P}_m : L^{p'}(\Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma),$$

que também é limitada.

Para concluir que (u_m') é limitada em $L^{p'}\left(0, T; H^{-1/2}(\Gamma)\right)$ analisemos cada termo do lado direito de (2.16).

- $(P_m A u_m)$ é limitado em $L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma))$.

De fato,

$$\|P_m A u_m(t)\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \|A u_m(t)\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}$$

e, portanto

$$\int_0^T \|P_m A u_m(t)\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} dt \leq C \int_0^T \|A u_m(t)\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} dt = C \left| \widetilde{A} u_m \right|^2_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))},$$

e de (2.14) deduzimos que

$$|P_m A u_m|_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))} \leq C \left| \widetilde{A} u_m \right|_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))} < \infty.$$

- $(P_m(|u_m|^\rho u_m))$ é limitado em $L^{p'}(0, T; H^{-1/2}(\Gamma))$.

De fato,

$$\|P_m(|u_m(t)|^\rho u_m(t))\|^{p'}_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \||u_m(t)|^\rho u_m(t)\|^{p'}_{L^{p'}(\Gamma)},$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|P_m(|u_m(t)|^\rho u_m(t))\|^{p'}_{H^{-1/2}(\Gamma)} dt &\leq C \int_0^T \||u_m(t)|^\rho u_m(t)\|^{p'}_{L^{p'}(\Gamma)} dt \\
&= C \left||u_m|^\rho u_m\right|^{p'}_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Gamma))}.
\end{aligned}$$

Usando (2.15) obtemos

$$|P_m(|u_m|^\rho u_m)|_{L^{p'}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))} \leq C\,||u_m|^\rho u_m|_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Gamma))} < \infty.$$

• $(P_m f)$ é limitado em $L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$.

Isto segue diretamente da limitação do operador P_m e do fato de f pertencer a $L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$

$$\int_0^T \|P_m f(t)\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}\,dt \leq C\int_0^T \|f(t)\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} < \infty.$$

Como $1 \leq p' \leq 2$, então $L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma)) \hookrightarrow L^{p'}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$ e tendo em vista que as limitações acima independem de m, podemos concluir da análise de (2.16) que a seqüência (u_m') é limitada em $L^{p'}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$.

Com a certeza de que existe solução aproximada de (P) no intervalo $[0,T]$, objetivamos, na próxima etapa, obter o limite destas soluções e provar que este limite é a solução mencionada no Teorema 2.1.

2.1.3 Etapa 3: Passagem ao Limite

Das estimativas anteriores, encontramos as seguintes limitações:

$$(u_m) \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) \cap L^\infty\left(0,T;L^2(\Gamma)\right) \cap L^p(0,T;L^p(\Gamma))$$

$$(u_m') \text{ é limitada em } L^{p'}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$$

$$\left(\widetilde{A}u_m\right) \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$$

$$(|u_m|^\rho u_m) \text{ é limitada em } L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Gamma)) = L^{p'}(\Sigma).$$

Fazendo uso do Teorema de *Banach-Alaoglu-Bourbaki*, deduzimos que existe uma subseqüência de (u_m), que por simplicidade denotaremos da mesma forma, tal que:

$$u_m \longrightarrow u \text{ em } L^p(0,T;L^p(\Gamma)) = L^p(\Sigma)\,,\text{ fraco -}*, \tag{2.17}$$

$$u_m \longrightarrow u \text{ em } L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma)),\text{ fraco -}*, \tag{2.18}$$

$$u_m \longrightarrow u \text{ em } L^\infty\left(0,T;L^2(\Gamma)\right), \text{ fraco -}*, \tag{2.19}$$

$$u_m' \longrightarrow \tau \text{ em } L^{p'}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma)), \text{ fraco -}*, \tag{2.20}$$

$$\widetilde{A}u_m \longrightarrow \beta \text{ em } L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma)), \text{ fraco -}*, \tag{2.21}$$

$$|u_m|^\rho u_m \longrightarrow \chi \text{ em } L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Gamma)) = L^{p'}(\Sigma), \text{ fraco - }*. \tag{2.22}$$

Temos,

• $\tau = u'$. De fato, desde que $L^p(\Sigma) \hookrightarrow \mathfrak{D}'(\Sigma)$ segue de (2.17) que $u_m \longrightarrow u$ em $\mathfrak{D}'(\Sigma)$ e como o operador derivação é contínuo de $\mathfrak{D}'(\Sigma)$ em $\mathfrak{D}'(\Sigma)$, então $u_m' \longrightarrow u'$ em $\mathfrak{D}'(\Sigma)$. Pela unicidade do limite, concluimos que $\tau = u'$.

• $\beta = \widetilde{A}u$. De fato, temos que $\widetilde{A}$ é contínuo e como conseqüência de (2.18) resulta que $\widetilde{A}u_m \longrightarrow \widetilde{A}u$ em $L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$. Logo, mais uma vez pela unicidade do limite obtemos o resultado.

• $\chi = |u|^\rho u$. De fato, consideremos no Lema (1.6) (Lema de Aubin-Lions) os seguintes dados: $p_0 = 2,\ p_1 = p'$, $B_0 = H^{1/2}(\Gamma),\ B_1 = H^{-1/2}(\Gamma)$ e $B = L^2(\Gamma)$, de modo que tenhamos a injeção compacta

$$W = \left\{v; v \in L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) \text{ e } v' \in L^{p'}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))\right\} \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Sigma) \tag{2.23}$$

Como (u_m) é limitada em $L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma))$ e (u_m') é limitada em $L^{p'}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$ então (u_m) é limitada em W e assim, por (2.23), (u_m) possui uma subseqüência, que denotaremos da mesma forma, tal que

$$u_m \longrightarrow u \text{ em } L^2(\Sigma) \text{ e q.s em } \Sigma.$$

Sendo a função $\varphi(s) = |s|^\rho s$ contínua, segue desta última convergência que

$$|u_m|^\rho u_m \longrightarrow |u|^\rho u \text{ q.s em } \Sigma$$

e considerando no Lema (1.7) (Lema de Lions) $G = \Sigma$, $q = p'$, $g_m = |u_m|^\rho u_m$ e $g = |u|^\rho u$, deduzimos que

$$|u_m|^\rho u_m \longrightarrow |u|^\rho u \text{ em } L^{p'}(\Sigma), \text{ fraco}. \tag{2.24}$$

Agora, de (2.22), (2.24) e usando a unicidade do limite, comprovamos nossa afirmação.

De (2.20), (2.21) e (2.22) obtemos

$$\langle u_m', w\rangle \longrightarrow \langle u', w\rangle , \forall w \in L^p(0,T;H^{1/2}(\Gamma)),$$

$$\left\langle \widetilde{A}u_m, w\right\rangle \longrightarrow \left\langle \widetilde{A}u, w\right\rangle , \forall w \in L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma)),$$

$$\langle |u_m|^\rho u_m, w\rangle \longrightarrow \langle |u|^\rho u, w\rangle , \forall w \in L^p(0,T;L^p(\Gamma)).$$

Considerando, em particular, $w = v\theta$, com $v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$ e $\theta \in L^p(0,T)$ e $v\theta \in L^p(0,T;H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma))$, resulta

$$\int_0^T (u_m'(t), v)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \langle u'(t), v\rangle \theta(t)dt, \tag{2.25}$$

$$\int_0^T (Au_m(t), v)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \langle Au(t), v\rangle \theta(t)dt, \tag{2.26}$$

$$\int_0^T (|u_m(t)|^\rho u_m(t), v)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \langle |u(t)|^\rho u(t), v\rangle \theta(t)dt. \tag{2.27}$$

No sentido distribucional, podemos afirmar que

$$\langle (u_m'(t), v), \theta\rangle \longrightarrow \langle \langle u'(t), v\rangle , \theta\rangle \tag{2.28}$$

$$\langle (Au_m(t), v), \theta\rangle \longrightarrow \langle \langle Au(t), v\rangle , \theta\rangle \tag{2.29}$$

$$\langle (|u_m(t)|^\rho u_m(t), v), \theta\rangle \longrightarrow \langle \langle |u(t)|^\rho u(t), v\rangle , \theta\rangle \tag{2.30}$$

para todo $v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$, $\theta \in \mathfrak{D}(0,T)$.

Somando o lado esquerdo de (2.28) - (2.30), obtemos por $(PA)_1$

$$\langle (u_m'(t), v), \theta\rangle + \langle (Au_m(t), v), \theta\rangle + \langle (|u_m(t)|^\rho u_m(t), v), \theta\rangle = \langle \langle f(t), v\rangle , \theta\rangle , \tag{2.31}$$

para todo $v \in V_{m_0} \subset V_m$, $(m \geq m_0)$ e $\theta \in \mathfrak{D}(0,T)$. Fazendo $m \longrightarrow \infty$ em (2.31) concluímos que

$$\langle \langle u'(t), v\rangle , \theta\rangle + \langle \langle Au(t), v\rangle , \theta\rangle + \langle \langle |u(t)|^\rho u(t), v\rangle , \theta\rangle = \langle \langle f(t), v\rangle , \theta\rangle \tag{2.32}$$

para todo $\theta \in \mathfrak{D}(0,T)$ e $v \in V_{m_0}$. A relação (2.32) sendo válida para todo v em V_{m_0}, para cada m_0 fixo, segue por densidade que ela ocorre para qualquer v em $H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$ e, dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned}
&\langle u'(t), v\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)} + \langle Au(t), v\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)} + \langle |u(t)|^\rho u(t), v\rangle_{L^{p'}(\Gamma),L^p(\Gamma)} = \\
&= \langle f(t), v\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)}
\end{aligned}$$

para todo $v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$ no sentido de $\mathfrak{D}'(0,T)$, ou seja,

$$\langle u'(t) + Au(t) + |u(t)|^\rho u(t) - f(t), v\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)} = 0,$$

para todo $v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$ no sentido de $\mathfrak{D}'(0,T)$.
Logo,

$$u' + Au + |u|^\rho u = f \;\text{ no sentido de } \mathfrak{D}'(0,T; H^{-1/2}(\Gamma) + L^{p'}(\Gamma))$$

e, recordando que $f \in L^2(0,T; H^{-1/2}(\Gamma))$ e $|u|^\rho u \in L^{p'}(0,T; L^{p'}(\Gamma))$, obtemos a igualdade no sentido de $L^{p'}(0,T; H^{-1/2}(\Gamma) + L^{p'}(\Gamma))$.

2.1.4 Etapa 4: Condição Inicial

Inicialmente observamos que faz sentido calcular $u(0)$, como um elemento de $H^{-1/2}(\Gamma)$, porque

$$u \in L^2(0,T; H^{1/2}(\Gamma)) \hookrightarrow L^{p'}(0,T; H^{1/2}(\Gamma)) \text{ e } u' \in L^{p'}(0,T; H^{-1/2}(\Gamma)),$$

e do Lema 1.5 segue que

$$u \in C^0([0,T]; H^{-1/2}(\Gamma)).$$

Dado $\theta \in C^1([0,T])$, com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$, segue de (2.25) que para cada $v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$

$$\int_0^T (u'_m(t), v)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \langle u'(t), v\rangle \theta(t)dt \tag{2.33}$$

e de (2.19) resulta que

$$\int_0^T (u_m(t), v)\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), v)\theta'(t)dt. \tag{2.34}$$

Somando (2.33) com (2.34) , temos

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u_m(t), v)\theta(t)\right] dt \longrightarrow \int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u(t), v)\theta(t)\right] dt,$$

isto é,

$$(u_m(0), v) \longrightarrow (u(0), v),\ \forall v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma).$$

Por outro lado, segue de (2.4)

$$(u_m(0), v) \longrightarrow (w_0, v),\ \forall v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$$

e, consequentemente,

$$(u(0), v) = (w_0, v),\ \forall v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma).$$

Por densidade, obtemos $u(0) = w_0$.

2.2 Unicidade

Suponhamos que u e $\widehat{u}$ sejam soluções do problema (P). Então $z = u - \widehat{u}$ satisfaz

$$z \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma)) \cap L^\infty\left(0, T; L^2(\Gamma)\right) \cap L^p\left(0, T; L^p(\Gamma)\right), \tag{2.35}$$

$$z' \in L^{p'}(0, T; H^{-1/2}(\Gamma) + L^{p'}(\Gamma)), \tag{2.36}$$

$$z' + Az + |u|^\rho u - |\hat{u}|^\rho \widehat{u} = 0 \text{ em } L^{p'}(0, T; H^{-1/2}(\Gamma) + L^{p'}(\Gamma)), \tag{2.37}$$

$$z(0) = 0 \text{ sobre } \Gamma. \tag{2.38}$$

Multiplicando (2.37) por z e integrando de 0 até $t \leq T$, obtemos

$$\int_0^t \langle z'(s), z(s)\rangle\, ds + \int_0^t \langle Az(s), z(s)\rangle\, ds + \int_0^t \langle |u(s)|^\rho u(s) - |\widehat{u}(s)|^\rho \widehat{u}(s), z(s)\rangle\, ds = 0. \tag{2.39}$$

Considerando $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$, onde Φ_1 e Φ_2 são tais que:

$$\left|\begin{array}{l} \Delta\Phi_1 = 0, \quad \text{em} \ \ \Omega \\ \Phi_1 = u, \quad \text{sobre} \ \ \Gamma \end{array}\right. \qquad \text{e} \qquad \left|\begin{array}{l} \Delta\Phi_2 = 0, \quad \text{em} \ \ \Omega \\ \Phi_2 = \widehat{u}, \quad \text{sobre} \ \ \Gamma, \end{array}\right.$$

então $Au(t) = \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\eta}(t)$ e $A\widehat{u}(t) = \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial\eta}(t)$ e sendo $z = u - \widehat{u}$, teremos $Az(t) = \dfrac{\partial\Phi}{\partial\eta}(t)$. Da Identidade de Green, resulta

$$\langle Az(s), z(s)\rangle = \int_\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\Phi d\Gamma = \int_\Omega |\nabla\Phi|^2\, dx$$

e de (2.39), obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{ds}|z(s)|^2_{L^2(\Gamma)}\, ds + \int_0^t\int_\Omega |\nabla\Phi(x,s)|^2\, dxds + \\ &+ \int_0^t\int_\Gamma \left[|u(x,s)|^\rho u(x,s) - |\widehat{u}(x,s)|^\rho \widehat{u}(x,s)\right] z(x,s) d\Gamma ds = 0. \end{aligned}$$

Sendo $z(0) = 0$, deduzimos da última igualdade que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|z(t)|^2_{L^2(\Gamma)} + \int_0^t\int_\Omega |\nabla\Phi(x,s)|^2\, dxds \\ &+ \int_0^t\int_\Gamma \left[|u(x,s)|^\rho u(x,s) - |\widehat{u}(x,s)|^\rho \widehat{u}(x,s)\right] z(x,s) d\Gamma ds = 0. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio à função $\varphi(s) = |s|^\rho s$, observando que $\varphi'(s) = (\rho+1)|s|^\rho > 0$, temos

$$|u(x,s)|^\rho u(x,s) - |\widehat{u}(x,s)|^\rho \widehat{u}(x,s) = (\rho+1)|\xi|^\rho \left[u(x,s) - \widehat{u}(x,s)\right],$$

onde ξ está entre $u(x,s)$ e $\widehat{u}(x,s)$. Com isto e de (2.40), obtemos

$$\frac{1}{2}|z(t)|^2_{L^2(\Gamma)} + \int_0^t\int_\Omega |\nabla\Phi(x,s)|^2\, dxdt + \int_0^t\int_\Gamma (\rho+1)|\xi|^\rho (z(x,s))^2 d\Gamma ds = 0, \tag{2.41}$$

para cada $t \leq T$. Logo $|z(t)|^2_{L^2(\Gamma)} = 0$, $\forall t$ e, portanto, $z = 0$, isto é, $u = \widehat{u}$. ■

Capítulo 3

O Problema Hiperbólico sobre Γ

Neste capítulo vamos estudar o problema hiperbólico

$$(P)\left|\begin{array}{l} u'' + Au + |u|^{\rho}\, u = f \quad \text{sobre} \quad \Sigma \\ u(0) = w_0,\, u'(0) = w_1 \;\; \text{dados sobre } \Gamma \end{array}\right. .$$

seguindo a mesma metodologia do capítulo 2.

Definição 3.1 *Dados $w_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $w_1 \in L^2(\Gamma)$ e $f \in L^2(\Sigma)$, a solução do problema (P) é uma função $u : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$u \in L^{\infty}(0,T; H^{1/2}(\Gamma)) \cap L^{\infty}(0,T; L^{p}(\Gamma)), \tag{3.1}$$

$$u' \in L^{\infty}(0,T; L^2(\Gamma)), \tag{3.2}$$

$$u'' + Au + |u|^{\rho}\, u = f, \quad \textit{no sentido de } L^2(0,T; H^{-1/2}(\Gamma) + L^{p'}(\Gamma)), \tag{3.3}$$

$$u(0) = w_0,\, u'(0) = w_1 \;\; \textit{sobre } \Gamma, \tag{3.4}$$

onde $p = \rho + 2$.

Teorema 3.1 *Dados $w_0 \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$, $w_1 \in L^2(\Gamma)$ e $f \in L^2(\Sigma)$, existe uma função $u : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (3.1) - (3.4). Além disso, se $\rho \leq \dfrac{1}{n-2}$ para $n \geq 3$ (ou $\rho > 0$ qualquer, se $n = 2$), então a solução é única.*

Demonstração:

3.1 Existência de Solução

A existência da solução também será demonstrada utilizando o Método de Faedo-Galerkin, que consiste em obter uma seqüência de soluções aproximadas do problema (P) e, em seguida mostraremos, por meio de estimativas a Priori, que tal seqüência converge para a solução do problema. Para provarmos a unicidade da solução faremos uso de um método idealizado por Visik -Ladyzenskaya. Como no problema anterior, vamos dividir a demonstração nas seguintes etapas:

1. Construção de soluções aproximadas em subespaços de dimensão finita.
2. Estimativas a priori sobre as soluções aproximadas.
3. Passagem ao limite das soluções aproximadas.
4. Condições Iniciais.

3.1.1 Etapa 1: Soluções Aproximadas

Consideremos $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma base Hilbertiana do espaço $H^{1/2}(\Gamma)\cap L^p(\Gamma)$, $p=\rho+2$. Para cada $m=1,2,3,...$ seja $V_m=[w_1,w_2,...,w_m]$ o subespaço de $H^{1/2}(\Gamma)\cap L^p(\Gamma)$ gerado pelos m primeiros vetores de $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$. Temos que $V_1\subset V_2\subset V_3\subset\ldots$ e as combinações lineares finitas dos $w_{\nu's}$ são densas em $H^{1/2}(\Gamma)\cap L^p(\Gamma)$. O problema aproximado, associado a (P), consiste em determinar uma solução da forma

$$u_m(x,t)=\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j(x)\in V_m,$$

sendo os g_{jm} de classe C^2, determinados de modo que satisfaçam o seguinte sistema:

$$(PA)\left|\begin{array}{l}(u_m''(t),v)_\Gamma+(Au_m(t),v)_\Gamma+(|u_m(t)|^\rho\,u_m(t),v)_\Gamma=(f(t),v)_\Gamma,\ \forall v\in V_m,\\ u_m(0)=w_{0m}\in V_m,\\ u_m'(0)=w_{1m}\in V_m,\end{array}\right. .$$

onde w_{0m} e w_{1m} são aproximações de w_0 e w_1, respectivamente. Considerando as aproximações

$$w_{0m}=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{jm}w_j\longrightarrow w_0,\quad \text{em}\quad H^{1/2}(\Gamma)\cap L^p(\Gamma), \tag{3.5}$$

$$w_{1m} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{jm} w_j \longrightarrow w_1 \text{ em } L^2(\Gamma), \tag{3.6}$$

as condições iniciais $(PA)_2$ e $(PA)_3$ são equivalentes a $g_{jm}(0) = \alpha_{jm}$ e $g'_{jm}(0) = \beta_{jm}$, respectivamente.

Consideremos a função contínua $\varphi(s) = |s|^{\rho} s$ e façamos $v = w_i$ na equação aproximada $(PA)_1$, para obtermos o problema

$$\left| \begin{array}{l} g''_{jm}(t) + \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) \left(Aw_j, w_i\right)_\Gamma + \left(\varphi\left(u_m\left(t\right)\right), w_i\right)_\Gamma = \left(f\left(t\right), w_i\right)_\Gamma, \ \ j = 1, 2, ..., m, \\ g_{jm}(0) = \alpha_{jm}, \ \text{ para } \ \ j = 1, 2, ..., m, \\ g'_{jm}(0) = \beta_{jm}, \ \text{ para } \ \ j = 1, 2, ..., m. \end{array} \right. \tag{3.7}$$

Imitando o que foi feito no Capítulo 2, vamos colocar o sistema acima nas condições de Carathéodory. Para isto, sejam as matrizes

$$C = \left[\left(Aw_j, w_i\right)_\Gamma\right]_{1 \le i,j \le m}, \quad L = \begin{bmatrix} \left(\varphi\left(u_m\left(t\right)\right), w_1\right)_\Gamma \\ \vdots \\ \left(\varphi\left(u_m\left(t\right)\right), w_m\right)_\Gamma \end{bmatrix}_{m \times 1},$$

$$M = \begin{bmatrix} \left(f\left(t\right), w_1\right)_\Gamma \\ \vdots \\ \left(f\left(t\right), w_m\right)_\Gamma \end{bmatrix}_{m \times 1}, \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} g_{1m} \\ \vdots \\ g_{mm} \end{bmatrix}_{m \times 1}.$$

e escrevamos o sistema aproximado $(3.7)_1$ na forma matricial

$$Y'' = -CY - L + M. \tag{3.8}$$

Para reduzir a ordem do sistema (3.8) denotemos por I a matriz identidade $m \times m$, 0 a matriz nula $m \times m$, $\overline{0}$ a matriz nula $m \times 1$ e seja

$$X(t) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ Y'(t) \end{bmatrix}_{2m \times 1}.$$

O sistema (3.8) é equivalente a

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ -L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ M \end{bmatrix}$$

e denotando por $F_1(t, X)$, $F_2(t, X)$ e $F_3(t, X)$ as funções matriciais

$$F_1(t, X) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C & 0 \end{bmatrix} X, \quad F_2(t, X) = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ -L \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F_3(t, X) = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ M \end{bmatrix},$$

obtermos o seguinte problema do valor inicial

$$\left| \begin{array}{l} X' = F_1(t, X) + F_2(t, X) + F_3(t, X) = F(t, X), \\ X(0) = X_0, \end{array} \right. \tag{3.9}$$

onde $X_0 = \begin{bmatrix} Y(0) \\ Y'(0) \end{bmatrix}$. Verifiquemos que $F(t, X)$ está nas condições de Carathéodory. Seja $D = [0, T] \times B \subset \mathbb{R}^{2m+1}$, onde

$$B = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2m}; |X| \leq b \right\}, \, b > 0, \, X_0 \in B$$

então:

a) Fixado X, temos que $F_1(t, X)$ e $F_2(t, X)$ não dependem de t, sendo, portanto, mensuráveis em t e a função $F_3(t, X)$ é mensurável em t pois $f \in L^2(0, T; L^2(\Gamma))$ e desta forma $(f(t), w_i)_\Gamma$ é mensurável em $t \in [0, T]$.

b) Fixado t, $F_3(t, X)$ não depende de X, sendo, portanto, contínua. A função $F_1(t, X)$ é contínua em X pois é o produto de uma matriz cujas entradas são números reais pela matriz X, ou seja, $F_1(t, X)$ é linear em X. A função $F_2(t, X)$ é contínua em X, pois desde que as funções

$$(g_{1m}, ..., g_{mm}) \in \mathbb{R}^m \xmapsto{G} u = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j \in [w_1, w_2, ..., w_m],$$

$$u \in [w_1, w_2, ..., w_m] \xmapsto{H} (\varphi(u), w_j) \in \mathbb{R}$$

são contínuas, segue que a composição também é , isto é,

$$(g_{1m}, ..., g_{mm}) \in \mathbb{R}^m \overset{H \circ G}{\longmapsto} (\varphi(u), w_j) \in \mathbb{R}$$

é contínua.

Assim, as funções F_1, F_2 e F_3 são mensuráveis em t, para cada X fixado e contínuas em X, para cada t fixado.

c) Como X varia em B, então todas as entradas de F_1 e F_2 são limitadas por uma mesma constante $C_B > 0$ e as entradas de F_3 são funções integráveis em $[0, T]$. De fato,

$$\int_0^T |(f(t), w_j)_\Gamma| \, dt \leq |w_j|_{L^2(\Gamma)} \int_0^T |f(t)|_{L^2(\Gamma)} \, dt < \infty$$

já que $f \in L^2(0, T; L^2(\Gamma))$ e, por definição, $t \longmapsto |f(t)|_{L^2(\Gamma)} \in L^2(0, T) \hookrightarrow L^1 0, T)$. Temos, portanto

$$|F(t, X)| \leq 2C_B + |(f(t), w_j)_\Gamma| = m_j(t), \ \forall (t, X) \in D,$$

sendo D compacto e $m_j(t)$, $j = 1, 2, ..., m$ integrável em $[0, T]$.

Desta forma, $F(t, X)$ satisfaz as condições de Carathéodory sobre D e, portanto, pelo Teorema 1.7 o sistema (3.9) possui solução local e, consequentemente, $(P_1 A)$ tem solução $u_m(t)$ definida em um intervalo $[0, t_m]$, $t_m < T$. Na próxima etapa, vamos obter estimativas a priori das soluções aproximadas com o objetivo de prolongar a solução $u_m(t)$ ao intervalo $[0, T]$.

3.1.2 Etapa 2: Estimativas a Priori

Fazendo em $(PA)_1$ $v = u'_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t) w_j \in V_m$, obtemos

$$(u''_m(t), u'_m(t))_\Gamma + (Au_m(t), u'_m(t))_\Gamma + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), u'_m(t))_\Gamma = (f(t), u'_m(t))_\Gamma, \quad (3.10)$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2_{L^2(\Gamma)} + (Au_m(t), u'_m(t))_\Gamma + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^p_{L^p(\Gamma)} = (f(t), u'_m(t))_\Gamma. \quad (3.11)$$

A análise do termo $\left(Au_m\left(t\right), u_m'\left(t\right)\right)_\Gamma$ é feita observando a definição do operador A. De fato, para cada $t \in [0, t_m]$, seja $\Phi_m(x,t)$, $x \in \Omega$, solução do problema

$$\left|\begin{array}{l} \Delta\Phi_m(x,t) = 0 \\ \Phi_m(x,t) = u_m(x,t), \ \ x \in \Gamma \end{array}\right. .$$

Por definição, $Au_m(t) = \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial \eta}(t)$ e.usando a Identidade de Green, resulta

$$\begin{aligned}\left(Au_m\left(t\right), u_m'\left(t\right)\right)_\Gamma &= \int_\Gamma \frac{\partial \Phi_m}{\partial \eta}(t) u_m'(t) d\Gamma = \int_\Gamma \frac{\partial \Phi_m}{\partial \eta}(t)\Phi_m'(t)d\Gamma \\ &= \int_\Omega \nabla\Phi_m(x,t)\cdot\nabla\Phi_m'(x,t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left|\nabla\Phi_m(x,t)\right|^2 dx.\end{aligned}$$

Levando este valor em (3.11) e integrando de 0 a $t \in [0, t_m]$, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left|u_m'\left(t\right)\right|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla\Phi_m(x,t)\right|^2 dx + \frac{1}{p}\left|u_m\left(t\right)\right|^p_{L^p(\Gamma)} = \\ &= \frac{1}{2}\left|w_{1m}\right|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla\Phi_m(x,0)\right|^2 dx + \frac{1}{p}\left|w_{0m}\right|^p_{L^p(\Gamma)} + \int_0^t (f(s), u_m'\left(s\right))_\Gamma ds.\end{aligned}$$

Temos que

$$\int_\Omega \left|\nabla\Phi_m(x,t)\right|^2 dx = \left(Au_m\left(t\right), u_m\left(t\right)\right)_\Gamma \geq 0$$

e, portanto, a última igualdade transforma-se em

$$\begin{aligned}&\left|u_m'\left(t\right)\right|^2_{L^2(\Gamma)} + \left(Au_m\left(t\right), u_m\left(t\right)\right)_\Gamma + \frac{2}{p}\left|u_m\left(t\right)\right|^p_{L^p(\Gamma)} = \\ &= \left|w_{1m}\right|^2_{L^2(\Gamma)} + \left(Aw_{0m}, w_{0m}\right)_\Gamma + \frac{2}{p}\left|w_{0m}\right|^p_{L^p(\Gamma)} + 2\int_0^t (f(s), u_m'\left(s\right))_\Gamma ds.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Usando as estimativas

- $2\displaystyle\int_0^t (f(s), u_m'\left(s\right))_\Gamma ds \leq \left\|f\right\|^2_{L^2(\Sigma)} + \int_0^t \left|u_m'(s)\right|^2_{L^2(\Gamma)} ds$
- $\left(Aw_{0m}, w_{0m}\right)_\Gamma \leq \left\|Aw_{0m}\right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \left\|w_{0m}\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C\left\|w_{0m}\right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}$

em (3.12), e mais o fato das seqüências $\left(\left|w_{1m}\right|^2_{L^2(\Gamma)}\right)$, $\left(\left\|w_{0m}\right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}\right)$ e $\left(\left\|w_{0m}\right\|^p_{L^p(\Gamma)}\right)$ serem convergentes, segue a existência de uma constante $C > 0$ tal que

$$\left|u_m'\left(t\right)\right|^2_{L^2(\Gamma)} + \left(Au_m\left(t\right), u_m\left(t\right)\right)_\Gamma + \frac{2}{p}\left|u_m\left(t\right)\right|^p_{L^p(\Gamma)} \leq C + \int_0^t \left|u_m'(s)\right|^2_{L^2(\Gamma)} ds. \tag{3.13}$$

Observação 3.1 *Desde que $p = \rho + 2 > 2$, segue que $L^p(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$ e, portanto, existe uma constante $C > 0$ tal que $|u|^p_{L^2(\Gamma)} \leq C\,|u|^p_{L^p(\Gamma)}$. Pelo Lema 1.8, com $\lambda = 2/Cp$, temos*

$$(Au_m(t), u_m(t))_\Gamma + \frac{2}{p}\,|u_m(t)|^p_{L^p(\Gamma)} \geq (Au_m(t), u_m(t))_\Gamma + \frac{2}{Cp}\,|u_m(t)|^2_{L^2(\Gamma)} \geq \alpha\,\|u_m(t)\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Da Observação 3.1 e (3.13), segue que existe uma constante, ainda denotada por C, tal que

$$|u'_m(t)|^2_{L^2(\Gamma)} + \alpha\,\|u_m(t)\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C + \int_0^t |u'_m(s)|^2_{L^2(\Gamma)}\,ds. \tag{3.14}$$

De (3.14) e do Lema de Gronwall deduzimos que

$$|u'_m(t)|^2_{L^2(\Gamma)} + \alpha\,\|u_m(t)\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C,$$

de onde seguem as estimativas:

$$|u'_m(t)|^2_{L^2(\Gamma)} \leq C \tag{3.15}$$

e

$$\alpha\,\|u_m(t)\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C, \tag{3.16}$$

onde $C > 0$ independe de m e de $t \in [0, t_m]$.

Retornando à desigualdade (3.13), com a estimativa (3.15), encontramos

$$|u_m(t)|^p_{L^p(\Gamma)} \leq C, \tag{3.17}$$

onde $C > 0$ é uma constante que não depende de m nem de $t \in [0, t_m]$.

Desde que $H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$, segue de (3.16) que

$$|u_m(t)|^2_{L^2(\Gamma)} \leq \alpha_1\,\|u_m(t)\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C, \tag{3.18}$$

onde $C > 0$ independe de m e de $t \in [0, t_m]$.

As estimativas obtidas são suficientes para prolongarmos a solução $u_m(t)$ ao intervalo $[0, T]$ e nesse intervalo teremos

$$|u'_m(t)|^2_{L^2(\Gamma)} \leq C, \quad \|u_m(t)\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C \quad \text{e} \quad |u_m(t)|^p_{L^p(\Gamma)} \leq C$$

onde a constante genérica $C > 0$ independe de m e de $t \in [0, T]$. Logo

$$(u_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) \cap L^\infty(0,T;L^p(\Gamma)), \tag{3.19}$$

$$(u'_m) \text{ é limitada em } L^\infty\left(0,T;L^2(\Gamma)\right), \tag{3.20}$$

e de (3.19) deduzimos que

$$\left(\widetilde{A}u_m\right) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H^{-1/2}(\Gamma)). \tag{3.21}$$

De fato,

$$\left|\widetilde{A}u_m\right|_{L^\infty(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))} = \underset{0\leq t\leq T}{\text{supess}} \|Au_m(t)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C\underset{0\leq t\leq T}{\text{supess}} \|u_m(t)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} < \infty.$$

Ainda de (3.19) temos que

$$(|u_m|^\rho u_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^{p'}(\Gamma)), \tag{3.22}$$

porque

$$||u_m|^\rho u_m|_{L^\infty(0,T;L^{p'}(\Gamma))} = \underset{0\leq t\leq T}{\text{supess}} ||u_m(t)|^\rho u_m(t)|_{L^{p'}(\Gamma)} = \underset{0\leq t\leq T}{\text{supess}} \left(\int_\Gamma |u_m(t)|^p \, d\Gamma\right)^{1/p'} < \infty.$$

3.1.3 Etapa 3: Passagem ao Limite

Das estimativas (3.19) - (3.22) e do Teorema de *Banach-Alaoglu-Bourbaki*, decorre que existe uma subseqüência de (u_m), que denotaremos da mesma forma, tal que

$$u_m \longrightarrow u \text{ em } L^\infty(0,T;H^{1/2}(\Gamma)), \text{ fraco -}*, \tag{3.23}$$

$$u_m \longrightarrow u \text{ em } L^\infty(0,T;L^p(\Gamma)), \text{ fraco -}*, \tag{3.24}$$

$$u'_m \longrightarrow u' \text{ em } L^\infty\left(0,T;L^2(\Gamma)\right), \text{ fraco -}*, \tag{3.25}$$

$$\widetilde{A}u_m \longrightarrow \widetilde{A}u \text{ em } L^\infty(0,T;H^{-1/2}(\Gamma)), \text{ fraco -}*, \tag{3.26}$$

$$|u_m|^\rho u_m \longrightarrow \chi \text{ em } L^\infty(0,T;L^{p'}(\Gamma)), \text{ fraco - }*. \tag{3.27}$$

Para mostrar que $\chi = |u|^{\rho} u$ procedemos como no Capítulo 2, utilizando o Lema de Aubin-Lions, com os dados: $p_0 = p_1 = 2$, $B_0 = H^{1/2}(\Gamma)$ e $B = B_1 = L^2(\Gamma)$, que estabelece a compacidade da injeção:

$$W = \left\{v; v \in L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) \text{ e } v' \in L^2(0,T;L^2(\Gamma))\right\} \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Sigma). \tag{3.28}$$

Das convergências (3.25) - (3.27), segue que

$$\langle u_m', w\rangle \longrightarrow \langle u', w\rangle, \ \forall w \in L^1(0,T;L^2(\Gamma)),$$

$$\left\langle \widetilde{A}u_m, w\right\rangle \longrightarrow \left\langle \widetilde{A}u, w\right\rangle, \ \forall w \in L^1(0,T;H^{1/2}(\Gamma)),$$

$$\langle |u_m|^{\rho} u_m, w\rangle \longrightarrow \langle |u|^{\rho} u, w\rangle, \ \forall w \in L^1(0,T;L^p(\Gamma))$$

e considerando $w = v\theta$, com $v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$ e $\theta \in L^1(0,T)$, obtemos

$$\int_0^T (u_m'(t), v)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u'(t), v)\theta(t)dt, \tag{3.29}$$

$$\int_0^T (Au_m(t), v)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \langle Au(t), v\rangle \theta(t)dt, \tag{3.30}$$

$$\int_0^T (|u_m(t)|^{\rho} u_m(t), v)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \langle |u(t)|^{\rho} u(t), v\rangle \theta(t)dt. \tag{3.31}$$

No sentido distribucional, temos

$$\langle (u_m'(t), v), \theta\rangle \longrightarrow \langle (u'(t), v), \theta\rangle, \tag{3.32}$$

$$\langle (Au_m(t), v), \theta\rangle \longrightarrow \langle \langle Au(t), v\rangle, \theta\rangle, \tag{3.33}$$

$$\langle (|u_m(t)|^{\rho} u_m(t), v), \theta\rangle \longrightarrow \langle \langle Au(t), v\rangle, \theta\rangle, \tag{3.34}$$

para todo $v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$, $\theta \in \mathfrak{D}(0,T)$.

Em particular,

$$\langle (u_m'(t), v), \theta'\rangle \longrightarrow \langle (u'(t), v), \theta'\rangle,$$

ou seja,

$$-\left\langle \frac{d}{dt}(u_m'(t), v), \theta\right\rangle \longrightarrow -\left\langle \frac{d}{dt}(u'(t), v), \theta\right\rangle$$

e portanto,

$$\langle (u''_m(t), v), \theta \rangle \longrightarrow \langle (u''(t), v), \theta \rangle \tag{3.35}$$

para todo $v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$, $\theta \in \mathfrak{D}(0,T)$.

De (3.33) - (3.35) e usando $(PA)_1$, encontramos

$$\langle (u''_m(t), v), \theta \rangle + \langle (Au_m(t), v), \theta \rangle + \langle (|u_m(t)|^\rho u_m(t), v), \theta \rangle = \langle (f(t), v), \theta \rangle \tag{3.36}$$

para todo $v \in V_{m_0} \subset V_m$, $(m \geq m_0)$ e $\theta \in \mathfrak{D}(0,T)$. Fazendo $m \longrightarrow \infty$ em (3.36), deduzimos que

$$\langle (u''(t), v), \theta \rangle + \langle \langle Au(t), v \rangle, \theta \rangle + \langle \langle |u(t)|^\rho u(t), v \rangle, \theta \rangle = \langle (f(t), v), \theta \rangle$$

para todo $\theta \in \mathfrak{D}(0,T)$ e $v \in V_{m_0}$. Por densidade, segue que a última igualdade é válida para todo $v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$, isto é

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u'(t), v), \theta \right\rangle + \langle \langle Au(t), v \rangle, \theta \rangle + \langle \langle |u(t)|^\rho u(t), v \rangle, \theta \rangle = \langle (f(t), v), \theta \rangle, \tag{3.37}$$

para todo $\theta \in \mathfrak{D}(0,T)$ e $v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$.

Temos,

- $(u'(t), v) \in L^\infty(0,T)$, o que implica que $\frac{d}{dt}(u'(t), v) \in \mathfrak{D}'(0,T)$.
- $\langle Au(t), v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} \in L^\infty(0,T) \hookrightarrow \mathfrak{D}'(0,T)$.
- $\langle |u(t)|^\rho u(t), v \rangle_{L^{p'}(\Gamma), L^p(\Gamma)} \in L^\infty(0,T) \hookrightarrow \mathfrak{D}'(0,T)$.
- $(f(t), v) \in L^2(0,T) \hookrightarrow \mathfrak{D}'(0,T)$.

Desta forma, resulta de (3.37) que

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u'(t), v) + \langle Au(t), v \rangle + \langle |u(t)|^\rho u(t), v \rangle - (f(t), v), \theta \right\rangle = 0,$$

$\forall\ \theta \in \mathfrak{D}(0,T)$. Assim,

$$\frac{d}{dt}(u'(t), v) + \langle Au(t), v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} + \langle |u(t)|^\rho u(t), v \rangle_{L^{p'}(\Gamma), L^p(\Gamma)} = (f(t), v) \tag{3.38}$$

para todo $v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$ no sentido de $\mathfrak{D}'(0,T)$.

De (3.38), segue que

$$\langle -(u'(t), v), \theta' \rangle + \langle \langle Au(t), v \rangle, \theta \rangle + \langle \langle |u(t)|^\rho u(t), v \rangle, \theta \rangle = \langle (f(t), v), \theta \rangle$$

para todo $\theta \in \mathfrak{D}(0,T)$ e todo $v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$. Daí obtemos

$$\int_0^T \langle u''(t), v\rangle \theta(t)dt + \int_0^T \langle Au(t), v\rangle \theta(t)dt + \int_0^T \langle |u(t)|^\rho u(t), v\rangle \theta(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt,$$

onde a integral é entendida como uma integral de Bochner em $H^{-1/2}(\Gamma) + L^{p'}(\Gamma)$. Usando a notação das distribuições vetoriais, escrevemos

$$\langle \langle u''(t), \theta\rangle + \langle Au(t), \theta\rangle + \langle |u(t)|^\rho u(t), \theta\rangle - (f(t), \theta), v\rangle = 0$$

que implica em

$$\langle \langle u'' + Au + |u|^\rho u - f, \theta\rangle, v\rangle = 0, \tag{3.39}$$

para todo $\theta \in \mathfrak{D}(0,T)$ e $v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$. De (3.39)

$$u'' + Au + |u|^\rho u = f, \text{ em } \mathfrak{D}'(0,T; H^{-1/2}(\Gamma) + L^{p'}(\Gamma)).$$

Mas, $Au \in L^\infty(0,T; H^{-1/2}(\Gamma))$, $f \in L^2(0,T; L^2(\Gamma))$ e $|u|^\rho u \in L^\infty(0,T; L^{p'}(\Gamma))$. Logo,

$$u'' + Au + |u|^\rho u = f, \text{ no sentido de } L^2(0,T; H^{-1/2}(\Gamma) + L^{p'}(\Gamma)) \tag{3.40}$$

e, por fim, concluimos que $u'' \in L^2(0,T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) + L^{p'}(\Gamma))$.

3.1.4 Etapa 4: Condições Iniciais

Observamos que $u \in L^\infty(0,T; H^{1/2}(\Gamma))$, $u' \in L^\infty(0,T; L^2(\Gamma))$ e $u'' \in L^2(0,T; H^{-1/2}(\Gamma) + L^{p'}(\Gamma))$, e como conseqüência do Lema 1.5 segue que

$$u \in C^0([0,T]; L^2(\Gamma)) \text{ e } u' \in C^0([0,T]; H^{-1/2}(\Gamma) + L^{p'}(\Gamma))$$

e, portanto, os valores $u(0)$ e $u'(0)$ estão bem definidos.

Mostremos que $u(0) = w_0$.

De (3.29), temos:

$$\int_0^T (u_m'(t), v)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u'(t), v)\theta(t)dt, \quad \text{para } v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma) \tag{3.41}$$

e de (3.23) segue que:

$$\langle u_m, w\rangle \longrightarrow \langle u, w\rangle\,,\ \forall w \in L^1(0,T;H^{-1/2}(\Gamma)).$$

Considerando $w = v\theta$, com $v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$ e $\theta \in C^1([0,T])$, com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$, obtemos:

$$\int_0^T (u_m(t), v)\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), v)\theta'(t)dt \tag{3.42}$$

e somando (3.41) com (3.42), resulta:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}[(u_m(t), v)\theta(t)]dt \longrightarrow \int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u(t), v)\theta(t)\right]dt.$$

Do Teorema Fundamental do Cálculo, concluimos que

$$(u_m(0), v)_\Gamma \longrightarrow (u(0), v)_\Gamma,\ \forall v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$$

e, por outro lado,

$$(u_m(0), v)_\Gamma \longrightarrow (w_0, v)_\Gamma,\ \forall v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma).$$

Assim, da unicidade do limite segue que:

$$(u(0), v)_\Gamma = (w_0, v)_\Gamma,\ \forall v \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$$

e por densidade, obtemos $u(0) = w_0$. ■

Mostremos que $u'(0) = w_1$

Consideremos a função θ_δ definida em $[0,T]$ por:

$$\theta_\delta(t) = \left|\begin{array}{l} -\dfrac{t}{\delta} + 1, \quad \text{se } \ 0 \leq t \leq \delta \\ 0, \quad \text{se } \ \delta \leq t \leq T. \end{array}\right.$$

Usando integração por partes, obtemos

$$\int_0^\delta (u_m''(t), v)\theta_\delta(t)dt = -(w_{1m}, v) + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (u_m'(t), v)dt. \tag{3.43}$$

Agora, multiplicamos $(PA)_1$ por θ_δ, integramos em $[0,T]$ e usamos (3.43), para obtermos

$$\begin{aligned}&-(w_{1m},v)+\frac{1}{\delta}\int_0^\delta (u_m'(t),v)dt+\int_0^\delta (Au_m(t),v)\theta_\delta(t)dt+\\&+\int_0^\delta (|u_m(t)|^\rho u_m(t),v)\theta_\delta(t)dt=\int_0^\delta (f(t),v)\theta_\delta(t)dt\end{aligned} \tag{3.44}$$

para todo $v\in V_{m_0}\subset V_m$, $(m\geq m_0)$. Tomando o limite em (3.44), com $m\longrightarrow\infty$, obtemos

$$\begin{aligned}&-(w_1,v)+\frac{1}{\delta}\int_0^\delta (u'(t),v)dt+\int_0^\delta \langle Au(t),v\rangle\,\theta_\delta(t)dt+\\&+\int_0^\delta \langle |u(t)|^\rho u(t),v\rangle\,\theta_\delta(t)dt=\int_0^\delta (f(t),v)\theta_\delta(t)dt\end{aligned}$$

para todo $v\in H^{1/2}(\Gamma)\cap L^p(\Gamma)$, pois as combinações lineares finitas dos w_ν são densas em $H^{1/2}(\Gamma)\cap L^p(\Gamma)$. Agora, na última igualdade fazemos $\delta\longrightarrow 0^+$ e usando que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h f(t)dt=f(0)$ chegamos a

$$(u'(0),v)=(w_1,v),\ \forall v\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\cap L^p(\Gamma)$$

e por densidade concluimos que $u'(0)=w_1$. ■

3.2 Unicidade

Suponhamos que u e $\widehat{u}$ sejam soluções do problema (P_1). Então $z=u-\widehat{u}$ satisfaz

$$z\in L^\infty(0,T;H^{1/2}(\Gamma)\cap L^p(\Gamma)),\quad p=\rho+2 \tag{3.45}$$

$$z'\in L^\infty(0,T;L^2(\Gamma)) \tag{3.46}$$

$$z''+Az+|u|^\rho u-|\widehat{u}|^\rho\,\widehat{u}=0 \text{ em } L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma)+L^{p'}(\Gamma)) \tag{3.47}$$

$$z(0)=z'(0)=0 \text{ sobre } \Gamma. \tag{3.48}$$

Mostraremos que $z=0$, isto é, $u=\widehat{u}$. Observamos inicialmente que não faz sentido a dualidade $\langle z''+Az+|u|^\rho u-|\hat{u}|^\rho\,\hat{u},z'\rangle$ e para contornar esta situação usaremos o método devido a Visik-Ladyzenskaya. O método se inicia definindo a função

$$w(t) = \left| \begin{array}{l} -\int_t^s z(\xi)d\xi, \quad \text{se} \ \ 0 \leq t \leq s \\ 0, \quad \text{se} \ \ s \leq t \leq T, \end{array} \right.$$

onde a integral é entendida como integral de Bochner em $H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$. A função w tem as seguintes propriedades:

- $w \in L^\infty(0, T; H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma))$;
- $w'(t) = z(t) \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$;
- Se $z_1(t) = \int_0^t z(\xi)d\xi$, então $w(t) = z_1(t) - z_1(s)$ e, portanto, $w(0) = -z_1(s)$.

Considerando $E = H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$, tomando a dualidade $\langle , \rangle_{E',E}$ de (3.47) com $w(t)$, e integrando de 0 até $s \leq T$, obtemos

$$\int_0^s \langle z''(t), w(t) \rangle \, dt + \int_0^s \langle Az(t), w(t) \rangle \, dt = \int_0^s \langle |\widehat{u}(t)|^\rho \, \widehat{u}(t) - |u(t)|^\rho \, u(t), w(t) \rangle \, dt. \tag{3.49}$$

Usando a relação $\dfrac{d}{dt}(z'(t), w(t)) = \langle z''(t), w(t) \rangle + (z'(t), w'(t))$, considerando que $w(s) = 0$ e $z(0) = z'(0) = 0$, vem

$$\int_0^s \langle z''(t), w(t) \rangle \, dt = \int_0^s \frac{d}{dt}(z'(t), w(t))dt - \int_0^s (z'(t), w'(t))dt = -\int_0^s \frac{1}{2}\frac{d}{dt} |z(t)|^2_{L^2(\Gamma)} \, dt \tag{3.50}$$

$$= -\frac{1}{2} |z(s)|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{1}{2} |z(0)|^2_{L^2(\Gamma)} = -\frac{1}{2} |z(s)|^2_{L^2(\Gamma)}.$$

Por outro lado, da Observação 1.1, obtemos

$$\int_0^s \langle Az(t), w(t) \rangle \, dt = \int_0^s \langle Aw'(t), w(t) \rangle \, dt = \int_0^s \langle Aw(t), w'(t) \rangle \, dt \tag{3.51}$$

$$= \int_0^s \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla\Phi(x,t)|^2 \, dxdt = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\Phi(s)|^2 \, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\Phi(0)|^2 \, dx.$$

Como, por (1.17), $|\nabla\Phi(x,s)|^2_{L^2(\Omega)} = \langle Aw(s), w(s) \rangle = 0$, obtemos de (3.49), (3.50) e (3.51)

$$-|z(s)|^2_{L^2(\Gamma)} - \int_\Omega |\nabla\Phi(x,0)|^2 \, dx = 2\int_0^s \langle |\widehat{u}(t)|^\rho \, \widehat{u}(t) - |u(t)|^\rho \, u(t), w(t) \rangle \, dt.$$

Agora, do Lema 1.8, temos

$$\int_\Omega |\nabla\Phi(x,0)|^2 \, dx = (Aw(0), w(0)) \geq \alpha \, \|w(0)\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} - \lambda \, |w(0)|^2_{L^2(\Gamma)} =$$

$$= \alpha \, \|z_1(s)\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} - \lambda \, |z_1(s)|^2_{L^2(\Gamma)}$$

e substituindo na igualdade anterior, vem

$$|z(s)|_{L^2}^2 + \alpha \|z_1(s)\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 - \lambda |z_1(s)|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq 2\int_0^s |\langle |u(t)|^\rho u(t) - |\widehat{u}(t)|^\rho \widehat{u}(t), w(t)\rangle| \, dt. \quad (3.52)$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio à função $\varphi(s) = |s|^\rho s$, concluímos que existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} |\varphi(a) - \varphi(b)| &= |\varphi'(a + \theta(b-a))| \, |a-b| = (\rho+1) \, |a + \theta(b-a)|^\rho \, |a-b| \\ &\leq (\rho+1)(|a| + |b|)^\rho \, |a-b| \leq (\rho+1)2^\rho(|a|^\rho + |b|^\rho) \, |a-b| \, . \end{aligned}$$

Considerando $a = u(x,t)$ e $b = \widehat{u}(x,t)$, encontramos:

$$||u(x,t)|^\rho u(x,t) - |\widehat{u}(x,t)|^\rho \widehat{u}(x,t)| \leq (\rho+1)2^\rho(|u(x,t)|^\rho + |\widehat{u}(x,t)|^\rho) \, |z(x,t)| \, . \quad (3.53)$$

Lema 3.1 *Se* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2(n-1)}$, $n \geq 3$, *e* $\rho \leq \dfrac{1}{n-2}$, *então as aplicações* $t \mapsto |u(t)|^\rho$ *e* $t \mapsto |\widehat{u}(t)|^\rho$ *estão em* $L^\infty(0,T; L^r(\Gamma))$, *com* $r = 2(n-1)$.

Demonstração: Sendo $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2(n-1)}$, $n \geq 3$, segue do Teorema de Sobolev que $H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow L^q(\Gamma)$ e como $\rho \leq \dfrac{1}{n-2}$, então $\rho r \leq q$. Seja $X_t = \{x \in \Gamma;\ |u(x,t)| \leq 1\}$, de modo que

$$\begin{aligned} \int_\Gamma |u(x,t)|^{\rho r} \, d\Gamma &= \int_{X_t} |u(x,t)|^{\rho r} \, d\Gamma + \int_{\Gamma\setminus X_t} |u(x,t)|^{\rho r} \, d\Gamma \leq \text{med}\,(\Gamma) + \int_\Gamma |u(x,t)|^{\rho r} \, d\Gamma \\ &\leq \text{med}\,(\Gamma) + \int_\Gamma |u(x,t)|^q \, d\Gamma = \text{med}\,(\Gamma) + |u(t)|_{L^q(\Gamma)}^q \\ &\leq \text{med}\,(\Gamma) + C \, \|u\|_{L^\infty(0,T;H^{1/2}(\Gamma))}^q < \infty. \end{aligned}$$

De maneira semelhante, mostra-se que $|\widehat{u}(\cdot)|^\rho$ é limitado em $L^\infty(0,T;L^r(\Gamma))$. Desta forma, $t \mapsto (|u(t)|^\rho + |\widehat{u}(t)|^\rho)$ está em $L^\infty(0,T;L^r(\Gamma))$. ■

Lema 3.2 *Existe uma constante* $C(\rho, \alpha, \lambda, T) > 0$ *tal que*

$$\begin{aligned} &|\langle |u(t)|^\rho u(t) - |\widehat{u}(t)|^\rho \widehat{u}(t), w(t)\rangle| \leq \\ &\leq C\left(|z(t)|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\alpha}{4} \, ||z_1(t)||_{H^{1/2}(\Gamma)}^2\right) + \frac{\alpha}{4T} \, ||z_1(s)||_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \, . \end{aligned} \quad (3.54)$$

Demonstração: De (3.53) segue que

$$|\langle|u(t)|^\rho u(t) - |\widehat{u}(t)|^\rho \widehat{u}(t), w(t)\rangle| = \left|\int_\Gamma (|u(x,t)|^\rho u(x,t) - |\widehat{u}(x,t)|^\rho \widehat{u}(x,t))\, w(x,t)dx\right| \leq$$
$$\leq (\rho+1)2^\rho \int_\Gamma (|u\,(x,t)|^\rho + |\widehat{u}\,(x,t)|^\rho)\,|z\,(x,t)|\,|w(x,t)|\,dx$$

e, desde que, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{r} = 1$, $z(t) \in L^2(\Gamma)$, $w(t) \in H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow L^q(\Gamma)$, usamos a desigualdade de Hölder e em seguida o Lema 3.1 para obter

$$|\langle|u(t)|^\rho u(t) - |\widehat{u}(t)|^\rho \widehat{u}(t), w(t)\rangle| \leq$$
$$\leq (\rho+1)2^\rho(||u(t)|^\rho|_{L^r(\Gamma)} + ||\widehat{u}(t)|^\rho|_{L^r(\Gamma)})\,|z(t)|_{L^2(\Gamma)}\,|w(t)|_{L^q(\Gamma)} \leq$$
$$\leq C\,|z(t)|_{L^2(\Gamma)}\,\|z_1(t) - z_1(s)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq$$
$$\leq C\,|z(t)|_{L^2(\Gamma)}\,\|z_1(t)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + C\,|z(t)|_{L^2(\Gamma)}\,||z_1(s)||_{H^{1/2}(\Gamma)}\,.$$

Escrevendo $C\,|z(t)|_{L^2(\Gamma)}\,\|z_1(t)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = 2\dfrac{C}{\sqrt{\alpha}}\,|z(t)|_{L^2(\Gamma)}\,\dfrac{\sqrt{\alpha}}{2}\,\|z_1(t)\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$, $C\,|z(t)|_{L^2(\Gamma)}\,||z_1(s)||_{H^{1/2}(\Gamma)} = 2\dfrac{\sqrt{T}C}{\sqrt{\alpha}}\,|z(t)|_{L^2(\Gamma)}\,\dfrac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{T}}\,||z_1(s)||_{H^{1/2}(\Gamma)}$ e usando a desigualdade elementar $2ab \leq a^2 + b^2$, obtemos da última desigualdade

$$|\langle|u(t)|^\rho u(t) - |\widehat{u}(t)|^\rho \widehat{u}(t), w(t)\rangle| \leq$$
$$\leq \frac{C^2}{\alpha}\,|z(t)|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\alpha}{4}\,||z_1(t)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \frac{TC^2}{\alpha}\,|z(t)|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\alpha}{4T}\,||z_1(s)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} =$$
$$= \left(\frac{C^2}{\alpha} + \frac{TC^2}{\alpha}\right)|z(t)|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\alpha}{4}\,||z_1(t)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \frac{\alpha}{4T}\,||z_1(s)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq$$
$$\leq \max\left\{1, \frac{C^2(1+T)}{\alpha}\right\}\left(|z(t)|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\alpha}{4}\,||z_1(t)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)}\right) + \frac{\alpha}{4T}\,||z_1(s)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} =$$
$$= C\left(|z(t)|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\alpha}{4}\,||z_1(t)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)}\right) + \frac{\alpha}{4T}\,||z_1(s)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)}\,. \blacksquare$$

De (3.52) e (3.54), deduzimos a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
&|z(s)|^2_{L^2(\Gamma)} + \alpha \, \|z_1(s)\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} - \lambda \, |z_1(s)|^2_{L^2(\Gamma)} \leq \\
&\leq 2C \int_0^s \left(|z\,(t)|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\alpha}{4} \, ||z_1(t)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \right) dt + \frac{\alpha}{2T} \int_0^s ||z_1\,(s)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \, dt \leq \\
&\leq 2C \int_0^s \left(|z\,(t)|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\alpha}{4} \, ||z_1(t)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \right) dt + \frac{\alpha}{2T} \int_0^T ||z_1\,(s)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \, dt \leq \\
&\leq 2C \int_0^s \left(|z\,(t)|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\alpha}{4} \, ||z_1(t)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \right) dt + \frac{\alpha}{2} \, ||z_1\,(s)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \,,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&|z(s)|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\alpha}{2} \, ||z_1\,(s)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \\
&\leq 2C \int_0^s \left(|z\,(t)|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\alpha}{4} \, ||z_1(t)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \right) dt + \lambda \textstyle\int_0^s \frac{d}{dt} \, |z_1(t)|^2_{L^2(\Gamma)} \, dt = \\
&= 2C \int_0^s \left(|z\,(t)|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\alpha}{4} \, ||z_1(t)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \right) dt + \lambda \textstyle\int_0^s 2 \left(z_1\,(t)\,, z_1'\,(t) \right) dt.
\end{aligned}$$

Como $z_1' = z$ e existe $C_1 > 0$ tal que $|z_1\,(t)|_{L^2(\Gamma)} \leq C_1 \, \|z_1\,(t)\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&|z(s)|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\alpha}{2} \, ||z_1\,(s)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \\
&\leq 2C \int_0^s \left(|z\,(t)|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\alpha}{4} \, ||z_1(t)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \right) dt + \lambda C_1 \int_0^s 2 \, |z\,(t)|_{L^2(\Gamma)} \, \|z_1\,(t)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \, dt = \\
&= 2C \int_0^s \left(|z\,(t)|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\alpha}{4} \, ||z_1(t)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \right) + 2C \int_0^s 2 \left(\frac{\lambda C_1}{C\sqrt{\alpha}} \, |z\,(t)|_{L^2(\Gamma)} \right) \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \, \|z_1\,(t)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \right) dt.
\end{aligned}$$

Usando novamente a desigualdade $2ab \leq a^2 + b^2$ encontramos

$$\begin{aligned}
&|z(s)|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\alpha}{2} \, ||z_1\,(s)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \\
&\leq 2C \int_0^s \left[\left(1 + \frac{\lambda^2 C_1^2}{C^2 \alpha} \right) |z\,(t)|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\alpha}{2} \, ||z_1(t)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \right] dt \leq \\
&\leq 2C \max \left\{ 1, 1 + \frac{\lambda^2 C_1^2}{C^2 \alpha} \right\} \int_0^s \left(|z\,(t)|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\alpha}{2} \, ||z_1(t)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \right) dt = \\
&= 2C \left(1 + \frac{\lambda^2 C_1^2}{C^2 \alpha} \right) \int_0^s \left(|z\,(t)|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\alpha}{2} \, ||z_1(t)||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \right) dt.
\end{aligned}$$

e do Lema de Gronwall segue que $|z(s)|^2_{L^2(\Gamma)} = 0$ e, portanto, $u = \widehat{u}$ em $L^\infty(0, T; H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p\,(\Gamma))$. ■

Referências Bibliográficas

[1] ARARUNA, F. D., ANTUNES, G. O. and MEDEIROS, L. A.- *Semilinear wave equation on manifolds*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Vol. XI, n^o 1, 2002, 7-18.

[2] BACHMAN, G. and NARICI, L. - *Functional Analysis*, New York, Academic Press, 1966.

[3] BRÉZIS, H. - *Analyse Fonctionnelle (Théorie et Applications)*, Paris, Masson, 1983.

[4] CAVALCANTI, M. M. e DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. - *Iniciação à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*, vol. II, 2000.

[5] CAVALCANTI, M. M. and DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. - *On Solvability of Solutions of Degenerate Nonlinear Equations on Manifolds*, Diferential and Integral Equation, Vol. 13 (10-12), 2000, 1445-1458.

[6] KREYSZIG, E. - *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York, Wiley, 1989.

[7] LIONS, J. L. - *Quelques Méthodes de Résolution des Problémes Aux Limites Non Linéaires*, Paris, Dunod, 1969.

[8] LIONS et E. MAGENES - *Problemes aux limites non homogenes et applications*, Vol. 1 et 2, Paris, Dunod, 1968.

[9] MATOS, M. P. - *Integral de Bochner e Espaços* $L^p(0,T,X)$, *Notas de Aulas do Curso de Verão*, UFPB, João Pessoa, 1998.

[10] MEDEIROS, L. A., MIRANDA, M. M. - *Introdução aos Espaços de Sobolev a às Equações Diferenciais Parciais*, IM-UFRJ, 1989.

[11] MEDEIROS, L. A., RIVERA, P. H. - *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ, n^o 9, 1975.

[12] MIRANDA, M. M - *Análise Espectral em Espaços de Hilbert*, IM-UFRJ, 1990.

[13] ROBERT A. ADAMS - *Sobolev Spaces*, New York, Academic Press, 1975.