Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Versões Não-lineares do Teorema da Dominação de Pietsch

Antonio Gomes Nunes

2008

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Versões Não-lineares do Teorema da Dominação de Pietsch

por

Antonio Gomes Nunes

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

novembro de 2008
João Pessoa-PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Versões Não-lineares do Teorema da Dominação de Pietsch

por

Antonio Gomes Nunes

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho - UFU

Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho - UFCG

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB (Suplente)

Aos meus pais,
Pedro e Geralda.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por estar presente em todas as minhas decisões e por me mostrar sempre soluções para os meus problemas.

Um agradecimento especial a minha família especialmente meus pais por terem me colocado no mundo para desfrutar de algo tão especial ″a vida″.

Aos meus professores dos colégios Bernardino Bento e Lídia Cabral de Sousa em especial à professora Maria de Fátima Soares.

Aos professores de graduação e pós-graduação que contribuíram para minha formação acadêmica.

Aos professores que participam dessa banca examinadora: Geraldo Botelho, Jaime Barbosa e Uberlandio.

Aos meus amigos de mestrado, em especial ao Thiago Bernardino e Joedson.

Ao meu orientador Daniel Marinho Pellegrino, o qual não foi apenas um orientador acadêmico, mas um orientador em tudo que precisei, pois com sua paciência não se cansou de me ajudar .

A Myriam Ciarlini (Mãe de Daniel) pelo apoio do início ao fim desse trabalho.

Ao CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo apoio financeiro.

Um agradecimento muito especial a minha namorada Célia Maria, pelo apoio moral e incentivo que me permitiram levar até ao fim este trabalho.

Resumo

O Teorema da Dominação de Pietsch (TDP) é um dos resultados centrais da teoria de operadores absolutamente somantes. Neste trabalho estudamos várias versões do TDP para aplicações não-lineares, incluindo uma recente versão geral que engloba vários casos particulares existentes na literatura.

Palavras-Chave:
Teorema da Dominação de Pietsch, aplicações subhomogêneas, operadores absolutamente somantes.

Abstract

Pietsch's Domination Theorem (PDT) is a cornerstone in the theory of absolutely summing operators. In this work we investigate some nonlinear versions of PDT, including a recent general version which contains, as particular cases, several well known versions of PDT.

Key-Words:
Pietsch Domination Theorem, subhomogeneous mappings, absolutely summing operators.

Sumário

Introdução

A teoria de operadores absolutamente somantes é uma importante área de pesquisa da Análise Funcional; sua origem remonta à década de 50, com contribuições de Grothendieck. Entretanto, apenas na década de 60, com trabalhos de Pietsch [24], Mitjagin e Pełczyński [22] e Lindenstrauss e Pełczyński [18], a teoria foi melhor divulgada e se tornou mais acessível; o trabalho de Lindenstrauss e Pełczyński [18] traz aplicações da teoria à solução de problemas da teoria de espaços de Banach.

Na década de 80, Pietsch [25] esboçou uma generalização da teoria de operadores absolutamente somantes para aplicações multilineares. A partir de então, vários autores começaram a se interessar pelo assunto e atualmente já existe uma extensa literatura não-linear relacionada ao tema. Ao contrário do que pode ser imaginado, a teoria não-linear não é construída indutivamente a partir da teoria linear; várias novas técnicas têm surgido e muitos problemas difíceis têm aparecido, demandando técnicas totalmente diferentes dos argumentos da teoria linear (uma boa amostra dos caminhos que a teoria não-linear está traçando pode ser encontrada em [7, 8, 16, 23]). Atualmente a teoria não-linear relacionada a operadores absolutamente somantes não se resume apenas ao caso de aplicações multilineares e polinômios, mas também a funções holomorfas e até aplicações mais gerais (veja, por exemplo, [19, 20]).

O Teorema de Dominação de Pietsch (TDP) é um resultado central da teoria de operadores absolutamente somantes; este resultado relaciona, de forma surpreendente, a teoria de operadores absolutamente somantes com teoria da medida. A primeira versão não-linear do TDP é devida a Pietsch [25]. O presente trabalho apresenta algumas outras versões não-lineares, mais recentes, do TDP.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

No Capítulo 1 apresentamos a definição de operadores absolutamente somantes e alguns resultados básicos da teoria; o principal resultado deste capítulo é o Teorema da Dominação de Pietsch (TDP), que servirá como modelo para as generalizações não lineares estudadas nos demais capítulos. A demonstração do TDP baseou-se na demonstração encontrada no livro [13], embora tenhamos feito algumas modificações para evitar o uso de medidas com sinal.

No Capítulo 2 demonstramos o TDP para aplicações subhomogêneas e apresentamos uma nova versão do TDP para aplicações multilineares. As principais fontes de referências foram [3, 6].

No Capítulo 3 apresentamos uma versão geral do Teorema da Dominação de Pietsch, ainda não publicada, devida a Botelho, Pellegrino e Rueda (veja [4, 5]). Esta versão do TDP, denominada "versão abstrata", engloba várias versões do TDP existentes na literatura, como o TDP para aplicações semi-integrais, fortemente somantes, assim como o TDP linear e o TDP para aplicações subhomogêneas.

O Capítulo 4 é dedicado à demonstração de resultados que são utilizados nos capítulos anteriores.

Notação e Terminologia

- Em todo esse texto, $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Os espaços vetoriais sempre serão considerados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- O dual (topológico) de um espaço de Banach E será denotado por E^*.
- Usaremos o termo "operador" com o mesmo sentido de "função".
- B_{E^*} denotará a bola unitária fechada de E^* com a topologia fraca-estrela.
- $C(B_{E^*})$ denotará o espaço de Banach (sobre o corpo dos reais) de todas as funções reais contínuas com domínio B_{E^*}.

Capítulo 1

Operadores absolutamente somantes e o Teorema da Dominação de Pietsch (TDP)

1.1 Operadores absolutamente somantes

Nesta seção apresentamos, de forma bastante resumida, o conceito de oprerador absolutamente somante e alguns resultados básicos relacionados. A teoria de operadores absolutamente somantes é bastante rica e profunda, com aplicações em diferentes ramos da Análise Funcional e também Análise Harmônica, Teoria de Operadores, Teoria da Aproximação, etc. Para uma exposição detalhada do assunto indicamos [13].

No que segue, X, Y, E, F sempre serão espaços de Banach.

$$l_p(X) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}; \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < \infty \right\}.$$

Se $p \geq 1$, $l_p(X)$ é um espaço de Banach com as operações usuais e com a norma

$$\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

e, se $0 < p < 1$, $l_p(X)$ é quasi-Banach. Definimos ainda

$$l_p^w(X) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}; \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p < \infty \text{ para todo } \varphi \text{ em } X^* \right\}.$$

Usando o Teorema do Gráfico Fechado pode-se mostrar que se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(X)$, então

$$\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} := \sup_{\substack{\|\varphi\| \leq 1 \\ \varphi \in X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

A função acima é uma norma quando $p \geq 1$ e uma p-norma se $0 < p < 1$.

Se $(x_n) \in l_p(X)$ dizemos que (x_n) é absolutamente p-somável e, se $(x_n) \in l_p^w(X)$, dizemos que (x_n) é fracamente p-somável.

Seja $u\colon X \longrightarrow Y$ um operador linear e contínuo entre espaços de Banach. É fácil provar que u leva seqüências absolutamente p-somáveis em seqüências absolutamente p-somáveis e seqüências fracamente p-somáveis em seqüências fracamente p-somáveis. Mais precisamente, se $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma seqüência absolutamente p-somável em X, então $(u(x_j))_{j=1}^{\infty}$ é absolutamente p-somável em Y; e se $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma seqüência fracamente p-somável em X, então $(u(x_j))_{j=1}^{\infty}$ é fracamente p-somável em Y. Entretanto não é sempre verdade que se $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma seqüência fracamente p-somável em X, então $(u(x_j))_{j=1}^{\infty}$ é absolutamente p-somável em Y. Essa propriedade, quando válida, é muito interessante, pois *melhora a convergência* de séries. Os operadores que melhoram a convergência nesse sentido são chamados de *absolutamente p-somantes*.

Definição 1.1.1 *Sejam $0 < q \leq p < \infty$ e $u : X \longrightarrow Y$ um operador linear contínuo. Dizemos que u é absolutamente $(p;q)$-somante (ou $(p;q)$-somante) se $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(X)$.*

Denotamos por $\Pi_{p,q}(X;Y)$ o conjunto formado por todos os operadores $(p;q)$-somantes de X em Y. Quando $p = q$, escrevemos $\Pi_p(X;Y)$ no lugar de $\Pi_{p,q}(X;Y)$. O espaço vetorial formado por todos os operadores lineares contínuos $u : X \longrightarrow Y$ com a norma do sup será denotado por $\mathcal{L}(X;Y)$. A seguinte caracterização de operadores absolutamente somantes é bastante útil:

Proposição 1.1.2 *([13])Seja $u \in \mathcal{L}(X,Y)$. São equivalentes:*

(i) u é $(p;q)$-somante;

(ii) Existe $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.1}$$

para quaisquer $x_1, ..., x_n$ em X e n natural;

(iii) Existe $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|u(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.2}$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(X)$.

A menor das constantes C para as quais (1.1) (ou equivalentemente (1.2)) vale é denotada por $\pi_{p,q}(u)$. Se $p = q$ escrevemos simplesmente $\pi_p(u)$.

Observação: A rigor, não é claro que o ínfimo das constantes C seja atingido, mas isso ocorre e podemos falar em menor das constantes.

1.2 O TDP linear

A seguir, apresentamos uma demonstração do Teorema da Dominação de Pietsch linear. Nossa demonstração segue as linhas da demonstração de [13], mas evitamos o uso de medidas com sinal. Na demonstração de [13] se usa que o dual de $C(K)$, com K compacto, é identificado com um certo conjunto de medidas com sinal. Na demonstração que apresentamos, que é inspirada em demonstrações não lineares de [3, 9], evitamos o uso de medidas com sinal simplesmente evitando usar a caracterização do dual de $C(K)$ precipitadamente; nosso argumento usa os funcionais de $C(K)$, sem caracterizá-los como medidas e, apenas na parte final da demonstração, quando estamos restritos ao contexto de funcionais positivos, usamos um resultado de caracterização mais simples, que usa apenas medidas positivas. Acreditamos que a nossa demonstração é de mais fácil compreensão, uma vez que medidas com sinal não são estudadas em cursos introdutórios de medida e integração.

O próximo lema será útil em todas as nossas demonstrações envolvendo o TDP. A seguir $C(K)$ denota o espaço de Banach, sobre o corpo dos reais, com a norma do sup, formado pelas funções $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas no compacto K.

Lema 1.2.1 $\mathcal{P} = \{f \in C(K) ; f(x) > 0$ *para todo* $x \in K\}$ *é aberto.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{P}$. Como K é compacto,

$$\inf_{x \in K} f(x)$$

é assumido. Logo, existe $x_0 \in K$ tal que

$$\inf_{x \in K} f(x) = f(x_0) > 0.$$

Seja $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$. Se $\|g - f\| < \varepsilon$ segue que

$$|g(x) - f(x)| < \varepsilon$$

para todo x. Como $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x, segue que

$$g(x) > f(x) - \varepsilon \geq f(x_0) - \varepsilon > 0$$

para todo x. Assim, $g \in \mathcal{P}$ e a bola aberta de centro f e raio ε está contida em $\mathcal{P}$, garantindo que $\mathcal{P}$ é aberto.$\square$

Teorema 1.2.2 *(Teorema da Dominação de Pietsch - Caso Linear) Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* $u : E \longrightarrow F$ *um operador linear contínuo. Então* u *é* p*-somante se, e somente se, existem uma constante* $C > 0$ *e uma medida de probabilidade* μ *nos borelianos de* B_{E^*}*, com a topologia fraca estrela, tais que*

$$\|u(x)\| \leq C \left(\int_{B_{E^*}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.3}$$

para cada $x \in E$. Neste caso, $\pi_p(u)$ é a menor de todas as constantes C tais que (1.3) ocorre.

Demonstração. ($\Longleftarrow$) Suponhamos que a desigualdade (1.3) ocorra. Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p &\leq C^p \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{B_{E^*}} |\varphi(x_k)|^p \, d\mu(\varphi) \\
&= C^p \int\limits_{B_{E^*}} \sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^p \, d\mu(\varphi) \\
&\leq C^p \int\limits_{B_{E^*}} \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^p \, d\mu(\varphi) \\
&= C^p \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^p \int\limits_{B_{E^*}} d\mu(\varphi) \\
&= C^p \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^p
\end{aligned}$$

para toda coleção finita de vetores $x_1, ..., x_n \in E$. Portanto, u é p-somante e

$$\pi_p(u) \leq C. \tag{1.4}$$

($\Longrightarrow$) Defina, para cada conjunto finito $M \subset E$,

$$\begin{aligned}
g_M &: B_{E^*} \rightarrow \mathbb{R} \\
g_M(\varphi) &:= \sum_{x \in M} (\|u\,(x)\|^p - \pi_p(u)^p \, |\varphi\,(x)|^p).
\end{aligned}$$

Seja $\mathcal{Q}$ o conjunto formado por todas as g_M e note que $\mathcal{Q} \subset C\,(B_{E^*})$, ou seja, cada g_M é contínua. Recordemos que B_{E^*} está munido da topologia fraca estrela e essa topologia é a topologia fraca (no sentido de Topologia Geral) gerada pelos funcionais da forma $Jx \in E^{**}$, com

$$Jx\,(\varphi) = \varphi\,(x)$$

para todo φ em E^*, isto é, a topologia em E^* mais econômica que torna os Jx contínuos.

Para verificar que g_M é contínua devemos mostrar que sempre que uma rede (φ_λ) converge para φ em B_{E^*} então $g_M\,(\varphi_\lambda) \rightarrow g_M\,(\varphi)$. Isso é fácil; de fato, seja (φ_λ) uma rede convergindo para φ em B_{E^*}. Então

$$|\varphi_\lambda\,(x)|^p = |Jx(\varphi_\lambda)|^p \rightarrow |Jx(\varphi)|^p = |\varphi\,(x)|^p.$$

Logo

$$g_M(\varphi_\lambda) = \left(\sum_{x \in M} \|u(x)\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi_\lambda(x)|^p \right) \to \left(\sum_{x \in M} \|u(x)\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi(x)|^p \right) = g_M(\varphi)$$

e portanto g_M é contínua.

Note ainda que $\mathcal{Q}$ é convexo. Com efeito, se M e M_1 são subconjuntos finitos de E e $0 < \lambda < 1$, então

$$\begin{aligned}
\lambda g_M(\varphi) + (1-\lambda) g_{M_1}(\varphi) &= \lambda \sum_{x \in M} (\|u(x)\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi(x)|^p) + \\
&+ (1-\lambda) \sum_{x \in M_1} (\|u(x)\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi(x)|^p) \\
&= \sum_{x \in M} \left(\left\| \lambda^{\frac{1}{p}} u(x) \right\|^p - \pi_p(u)^p \left| \varphi\left(\lambda^{\frac{1}{p}} x \right) \right|^p \right) + \\
&+ \sum_{x \in M_1} \left(\left\| u\left((1-\lambda)^{\frac{1}{p}} x \right) \right\|^p - \pi_p(u)^p \left| \varphi\left((1-\lambda)^{\frac{1}{p}} x \right) \right|^p \right) \\
&= \sum_{a \in \left\{ \lambda^{1/p} x; x \in M \right\}} (\|ua\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi(a)|^p) + \\
&+ \sum_{a \in \left\{ (1-\lambda)^{1/p} x; x \in M_1 \right\}} (\|ua\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi(a)|^p) \\
&= g_{M_2}(\varphi),
\end{aligned}$$

com

$$M_2 = \left\{ \lambda^{\frac{1}{p}} x; x \in M \right\} \cup \left\{ (1-\lambda)^{\frac{1}{p}} x; x \in M_1 \right\}.$$

Considere

$$\mathcal{P} = \{ w \in C(B_{E^*}); w(\varphi) > 0 \text{ para todo } \varphi \text{ em } B_{E^*} \}.$$

Note que, pelo Lema 1.2.1 com $K = B_{E^*}$, $\mathcal{P}$ é aberto. Claramente $\mathcal{P}$ é convexo, pois dadas f, $g \in \mathcal{P}$ e $0 < \lambda < 1$, temos

$$\lambda f + (1-\lambda) g = h \in C(B_{E^*})$$

e

$$h(\varphi) = \lambda f(\varphi) + (1-\lambda) g(\varphi) > 0, \text{ para todo } \varphi \text{ em } B_{E^*}.$$

Temos também que

$$\mathcal{Q} \cap \mathcal{P} = \varnothing.$$

De fato, dado $g_M \in \mathcal{Q}$ existe $\varphi_1 \in B_{E^*}$ tal que $g_M(\varphi_1) \leq 0$. Com efeito, pela compacidade da B_{E^*} (Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki) e pela continuidade de g_M, existe $\varphi_1 \in B_{E^*}$ tal que

$$g_M(\varphi_1) = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} g_M(\varphi) = \left(\sum_{x \in M} \|u(x)\|^p \right) - \pi_p(u)^p \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{x \in M} |\varphi(x)|^p \right).$$

Como u é p-somante, segue que

$$\left(\sum_{x\in M}\|u(x)\|^p\right)-\pi_p\left(u\right)^p\sup_{\varphi\in B_{E^*}}\sum_{x\in M}\left|\varphi\left(x\right)\right|^p\leq 0$$

e portanto

$$g_M\left(\varphi_1\right)\leq 0.$$

Como $\mathcal{P}$ é aberto e convexo e como $\mathcal{Q}$ é convexo, segue pelo Teorema 4.2.8 (com $A=\mathcal{P}, B=\mathcal{Q}$ e $X=C(B_{E^*})$) que existem $h\in C(B_{E^*})^*$ e $c\geq 0$ tais que

$$h(g)\leq c<h(w) \tag{1.5}$$

para todo $w\in\mathcal{P}$ e todo $g\in\mathcal{Q}$. Como $u\left(0\right)=0$, temos que $0=g_{\{0\}}\in\mathcal{Q}$. Logo

$$h\left(w\right)>c\geq h\left(0\right)=0 \tag{1.6}$$

para todo $w\in\mathcal{P}$, ou seja, $h\left(w\right)>0$ para todo $w\in\mathcal{P}$. Como h é contínua, segue que $h\left(w\right)\geq 0$ sempre que $w\geq 0$. De fato, se $w\in C\left(B_{E^*}\right)$ e $w\geq 0$, considere então (para cada k natural),

$$g_k(\varphi)=w(\varphi)+\frac{1}{k}.$$

Então $g_k>0$ e

$$\begin{cases} h(g_k)>0 \\ \|g_k-w\|_{C(B_{E^*})}=\frac{1}{k}\end{cases}$$

para todo $k\in\mathbb{N}$. Assim,

$$g_k\to w \text{ em } C(B_{E^*})$$

e, como h é contínua, segue que

$$h\left(w\right)=\lim_{k\to\infty}h\left(g_k\right)\geq 0.$$

sempre que $w\geq 0$.

Vamos agora mostrar que $c=0$. Para cada k natural, seja w_k a função constante $\frac{1}{k}$. Note que $w_k\in\mathcal{P}$, pois $\frac{1}{k}>0$. Note também que $w_k\overset{k\to\infty}{\to}0$ no espaço $C(B_{E^*})$. Portanto

$$h\left(w_k\right)\overset{k\to\infty}{\to}h\left(0\right)=0.$$

Como $h\left(w_k\right)>c$ para todo $k\in\mathbb{N}$, segue que

$$c\leq 0. \tag{1.7}$$

De (1.6) e (1.7) segue que $c=0$.

Seja $h_1\in C\left(B_{E^*}\right)^*$ dado por

$$h_1\left(w\right)=\frac{h\left(w\right)}{h\left(1\right)}.$$

Perceba que h_1 está bem definido, pois $h(1) > 0$. Note que $h_1(1) = 1$ e $h_1(w) \geq 0$ sempre que $w \geq 0$. De [2, Theorem 4.3.10] podemos encontrar uma medida de probabilidade (positiva) na sigma-álgebra de Borel de B_{E^*} tal que

$$h_1(w) = \int_{B_{E^*}} w(\varphi)\, d\mu(\varphi)$$

para todo $w \in C(B_{E^*})$. Logo

$$\int_{B_{E^*}} g(\varphi)\, d\mu(\varphi) = h_1(g) \leq 0,$$

para cada $g \in \mathcal{Q}$, pois

$$h_1(g) = \frac{h(g)}{h(1)} \leq \frac{c}{h(1)} = 0$$

para cada $g \in \mathcal{Q}$. Agora, para cada $x \in E$, temos $g_{\{x\}} \in \mathcal{Q}$ e obtemos

$$\int_{B_{E^*}} g_{\{x\}}(\varphi)\, d\mu(\varphi) \leq 0,$$

isto é,

$$\int_{B_{E^*}} \left(\|u(x)\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi(x)|^p\right) d\mu(\varphi) \leq 0.$$

Portanto

$$\left(\int_{B_{E^*}} \|u(x)\|^p\, d\mu(\varphi)\right) - \pi_p(u)^p \int_{B_{E^*}} |\varphi(x)|^p\, d\mu(\varphi) \leq 0$$

e

$$\|u(x)\|^p \int_{B_{E^*}} d\mu(\varphi) \leq \pi_p(u)^p \int_{B_{E^*}} |\varphi(x)|^p\, d\mu(\varphi).$$

Elevando ambos os membros a $1/p$, temos

$$\|u(x)\| \leq \pi_p(u) \left(\int_{B_{E^*}} |\varphi(x)|^p\, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.8}$$

De (1.4) e (1.8) segue que $\pi_p(u)$ é a menor das constantes que satisfaz (1.3).$\square$

Corolário 1.2.3 *Se $1 \leq p \leq q < \infty$, todo operador p-somante é também q-somante.*

Demonstração. Seja $u : X \longrightarrow Y$ uma aplicação p-somante. Então, pelo TDP existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\|u(x)\| \leq C \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo x em X. Como a medida μ é de probabilidade temos que $L_q(X, \Sigma, \mu) \subset L_p(X, \Sigma, \mu)$ e $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$. Daí

$$\|u(x)\| \leq C \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Portanto, novamente pelo TDP, segue que u é q-somante.$\square$

Capítulo 2

Aplicações não-lineares absolutamente somantes e o TDP

2.1 Aplicações multilineares

Sejam $m \in \mathbb{N}$, $E_1, E_2, ..., E_m$ e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que uma aplicação $A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é m-linear (multilinear) quando é linear em cada variável.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, o conjunto de todas as aplicações multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F é denotado por $L(E_1, ..., E_m; F)$. Quando $F = \mathbb{K}$ denotamos $L(E_1, ..., E_m; F)$ por $L(E_1, ..., E_m)$ e quando $E_1 = E_2 = \cdots = E_m = E$, escrevemos $L(^m E; F)$. O conjunto $L(E_1, ..., E_m; F)$ é claramente um espaço vetorial munido com as operações usuais de espaços de funções.

Se $E_1, ..., E_m$ e F são espaços vetoriais normados, note que $E_1 \times \cdots \times E_m$ é um espaço vetorial normado com a norma

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \|x_i\|_{E_i}.$$

Uma aplicação m-linear $A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é limitada se

$$\sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ i=1,...,n}} \|A(x_1, ..., x_n)\| < \infty.$$

$A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é contínua se A for contínua no sentido de espaços métricos, considerando $E_1 \times \cdots \times E_m$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$.

O próximo teorema apresenta várias equivalências sobre a continuidade de uma aplicação multilinear:

Teorema 2.1.1 *Seja $m \in \mathbb{N}$. Se $E_1, ..., E_m$ e F são espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é uma aplicação multilinear, então são equivalentes:*

(i) A é contínua;

(ii) A é contínua na origem;

(iii) Existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|A(x_1, ..., x_m)\| \leq M \|x_1\| \cdots \|x_m\|$$

para qualquer $(x_1, ..., x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$.

Demonstração.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Se A é contínua, então A é contínua em todo ponto; em particular, é contínua na origem.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Como A é contínua na origem, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $x \in E_1 \times \cdots \times E_m$, com $\|x\|_\infty \leq \delta$, temos $\|A(x)\| \leq \varepsilon$. Sejam $\varepsilon = 1$ e $x = (x_1, ..., x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ tal que $x_i \neq 0$ para todo $i = 1, ..., m$. Assim

$$\left\| \left(\frac{\delta x_1}{\|x_1\|}, \frac{\delta x_2}{\|x_2\|}, ..., \frac{\delta x_m}{\|x_m\|}\right) \right\|_\infty = \delta$$

e portanto

$$\left\| A\left(\frac{\delta x_1}{\|x_1\|}, \frac{\delta x_2}{\|x_2\|}, ..., \frac{\delta x_m}{\|x_m\|}\right) \right\| \leq 1.$$

Como A é multilinear, segue que

$$\|A(x_1, x_2, ..., x_m)\| \leq \frac{1}{\delta^m} \|x_1\| \cdots \|x_m\|.$$

Tomando $M = \frac{1}{\delta^m}$ temos o desejado. Caso $x_i = 0$ para algum $i = 1, ..., m$, temos $A(x) = A(x_1, ..., 0, ..., x_m) = 0$ e a desigualdade continua válida.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Note que se $z = (z_1, ..., z_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$, então, para qualquer $x = (x_1, ..., x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$, temos

$$\|A(x) - A(z)\| \leq \|A(x_1 - z_1, x_2, ..., x_m)\| + \|A(z_1, x_2 - z_2, x_3, ..., x_m)\|$$

$$+ \cdots + \|A(z_1, z_2, ..., z_{m-1}, x_m - z_m)\| \leq M \|x_1 - z_1\| \|x_2\| \cdots \|x_m\|$$

$$+ \cdots + M \|z_1\| \cdots \|z_{m-1}\| \|x_m - z_m\|.$$

Note que se $\|x\|$,$\|z\| < r$, então $\|x_i\| < r$ e $\|z_i\| < r$ para todo $i = 1, 2, ..., m$. Portanto

$$\|A(x) - A(z)\| \leq Mr^{m-1}(\|x_1 - z_1\| + \cdots + \|x_m - z_m\|) \leq mMr^{m-1} \|x - z\|_\infty.$$

Portanto A é contínua.□

Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotamos o conjunto de todas as aplicações multilineares contínuas de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F por $\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$. Quando $E_1 = \cdots = E_m = E$, escrevemos $\mathcal{L}(^m E; F)$ e, se $F = \mathbb{K}$, usamos $\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(E_1, ..., E_m)$ e $\mathcal{L}(^m E) = \mathcal{L}(^m E; \mathbb{K})$. Representamos $\mathcal{L}(^1 E; F)$ por $\mathcal{L}(E; F)$.

2.2 Aplicações multilineares absolutamente somantes

A teoria multilinear relacionada a operadores absolutamente somantes foi idealizada por Pietsch em [25] e alguns resultados relacionados ao tema foram publicados na década de 80 e início da década de 90 por B. Schneider ([27]) e S. Geiss ([15]), que foi aluno de Pietsch. Ainda no final da década de 80, em um relatório técnico da Universidad Complutense de Madrid [1], R. Alencar e M.C. Matos desenvolvem algumas das idéias contidas em [25] e, a partir de então, vários autores se interessam pelo assunto e muitos trabalhos relacionados ao tema têm sido publicados desde então.

Definição 2.2.1 *Sejam $0 < p, q_1, ..., q_n$ com $\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n} \geq \frac{1}{p}$. Uma aplicação n-linear contínua $A : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ é absolutamente $(p; q_1, ..., q_n)$-somante se*

$$\left(A \left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)} \right) \right)_{j=1}^{\infty} \in l_p(F)$$

sempre que

$$\left(x_j^{(k)} \right)_{j=1}^{\infty} \in l_{q_k}^{w}(E_k)$$

para cada $k = 1, ..., n$. O espaço vetorial das aplicações $(p; q_1, ..., q_k)$-somantes é denotado por $\mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Teorema 2.2.2 *Sejam $E_1, \ldots, E_n$, F espaços de Banach e $T : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ um operador n-linear contínuo. São equivalentes:*

(a) $T \in \mathcal{L}_{as(s;q_1,...,q_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$,

(b)Existe $C \geq 0$ tal que

$$\left\| \left(T \left(x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)} \right) \right)_{i=1}^{\infty} \right\|_s \leq C \left\| \left(x_i^{(1)} \right)_{i=1}^{\infty} \right\|_{w,q_1} \cdots \left\| \left(x_i^{(n)} \right)_{i=1}^{\infty} \right\|_{w,q_n} \tag{2.1}$$

sempre que $\left(x_i^{(j)} \right)_{i=1}^{\infty} \in l_{r_j}^{w}(E_j)$, $j = 1, ..., n$.

(c) Existe $C \geq 0$ tal que

$$\left\| \left(T \left(x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)} \right) \right)_{i=1}^{m} \right\| \leq C \left\| \left(x_i^{(1)} \right)_{i=1}^{m} \right\|_{w,q_1} \cdots \left\| \left(x_i^{(n)} \right)_{i=1}^{m} \right\|_{w,q_n} \tag{2.2}$$

para todo m natural e $x_i^{(k)} \in E_k$, $k = 1, ..., n$ e $i = 1, ..., m$.

A menor das constantes C para as quais (2.2) vale é denotada por $\|T\|_{as(s;r_1,...,r_n)}$.

As aplicações n-lineares $(\frac{p}{n}; p, ..., p)$-somantes têm propriedades muito parecidas com as propriedades da teoria linear. Por exemplo, para tais aplicações existe um Teorema de Dominação de Pietsch. Por essa razão, tais aplicações são chamadas de p-dominadas. A seguir, enunciamos o TDP para aplicações p-dominadas. Esse teorema é enunciado em [25] (veja também [15, 21]).

Teorema 2.2.3 (Teorema da Dominação de Pietsch para aplicações dominadas) *Seja* $1 \leq p < \infty$. *Uma aplicação* $A \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *é p-dominada se, e somente se, existem uma constante* $C \geq 0$ *e medidas de probabilidade* μ_k *nos borelianos de* $B_{E_k^*}$, $k = 1, ..., n$, *tais que*

$$\|A(x_1, ..., x_n)\| \leq C \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{B_{E_k^*}} |\varphi_k (x_k)|^p \, d\mu (\varphi_k) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2.3 O TDP para aplicações subhomogêneas

A definição a seguir aparece em [6] . Uma definição parecida, ligeiramente diferente, aparece em [19].

Definição 2.3.1 *Sejam* $\alpha > 0$ *e* E, F *espaços de Banach. Uma aplicação* $f : E \longrightarrow F$ *é dita* α*-subhomogênea se*

$$\|f(\lambda x)\| \geq \lambda^\alpha \|f(x)\|$$

para todo x *em* E *e* $0 < \lambda < 1$.

A seguinte definição é dada em [6] e é uma variação da definição de M. C Matos para aplicações arbitrárias absolutamente somantes (veja [19]).

Definição 2.3.2 *Sejam* $1 \leq p, q < \infty$ *e* E *um espaço de Banach. Uma aplicação* $f : E \longrightarrow F$ *é absolutamente* $(p; q)$*-somante se cada seqüência fracamente q-somável* $(x_j)_{j=1}^\infty$ *em* E *é levada em uma seqüência absolutamente p-somável* $(f(x_j))_{j=1}^\infty$ *em* F, *isto é,*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f(x_j)\|^p < \infty$$

sempre que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q < \infty,$$

para todo φ *em* E^*.

É claro que se f é $(p; q)$-somante, então $f(0) = 0$.

O próximo resultado, que também aparece em [6], caracteriza aplicações α-subhomogêneas absolutamente-somantes.

Teorema 2.3.3 *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* $\alpha > 0$. *Se* $f : E \longrightarrow F$ *é* α*-subhomogênea, são equivalentes:*

(a) Existem constantes $C_\alpha \geq 0$ e $\varrho > 0$ tais que

$$\sum_{j=1}^{m} \|f(x_j)\|^{\frac{p}{\alpha}} \leq C_\alpha \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p$$

para todos $x_1, ..., x_m \in E$ e $m \in \mathbb{N}$ com $\left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,p} \leq \varrho$.

(b) Existe uma constante $C_b \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|f(x_j)\|^{\frac{p}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{p}} \leq C_b \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{\alpha}{p}}$$

para todos $x_1, ..., x_m \in E$ e $m = 1, 2, ...$

(c) A função f é absolutamente $\left(\frac{p}{\alpha}; p\right)$-somante.

Demonstração. $(a) \Longrightarrow (b)$. Dados $x_1, ..., x_m \in E$, consideremos dois casos:

Primeiro caso: Se $\left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,p} \leq \varrho$, segue diretamente de (a) que

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|f(x_j)\|^{\frac{p}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{p}} \leq C_\alpha^{\frac{\alpha}{p}} \left(\sup_{\varphi \in B_{E^*}} \sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{\alpha}{p}}. \tag{2.3}$$

Segundo caso: Se $\left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,p} > \varrho$, seja

$$\lambda = \frac{\varrho}{\left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,p}} < 1.$$

Como $\left\|(\lambda x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,p} = \varrho$, a subhomogeneidade de f e (2.3) implicam

$$\begin{aligned}
\lambda^\alpha \left(\sum_{j=1}^{m} \|f(x_j)\|^{\frac{p}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{p}} &\leq \left(\sum_{j=1}^{m} \|f(\lambda x_j)\|^{\frac{p}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{p}} \\
&\leq C_\alpha^{\frac{\alpha}{p}} \left(\sup_{\varphi \in B_{E^*}} \sum_{j=1}^{m} |\varphi(\lambda x_j)|^p\right)^{\frac{\alpha}{p}} \\
&= \lambda^\alpha C_\alpha^{\frac{\alpha}{p}} \left(\sup_{\varphi \in B_{E^*}} \sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{\alpha}{p}}.
\end{aligned}$$

Daí segue o resultado com $C_b = C_\alpha^{\alpha/p}$

$(b) \Longrightarrow (c)$ Fazendo $m \to \infty$ em (b), obtemos (c).

$(c) \Longrightarrow (a)$ Suponha que o resultado seja falso. Para todo $k \in \mathbb{N}$, poderíamos encontrar $x_1^{(k)}, ..., x_{m_k}^{(k)} \in E$ tais que

$$\sum_{j=1}^{m_k} \left\| f\left(x_j^{(k)}\right) \right\|^{\frac{p}{\alpha}} > k^2 \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \sum_{j=1}^{m_k} \left| \varphi\left(x_j^{(k)}\right) \right|^p \tag{2.4}$$

e

$$\left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,p}^p = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \sum_{j=1}^{m_k} \left| \varphi\left(x_j^{(k)}\right) \right|^p \leq \frac{1}{k^2}. \tag{2.5}$$

Note que $\left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,p}^p \neq 0$ pois, caso contrário, (2.4) não seria válida.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja n_k a parte inteira de

$$\frac{2}{k^2 \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,p}^p},$$

isto é,

$$n_k \leq \frac{2}{k^2 \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,p}^p} < n_k + 1.$$

Daí,

$$n_k \left(k^2 \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,p}^p \right) \leq 2 < (n_k + 1) \left(k^2 \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,p}^p \right). \tag{2.6}$$

De (2.5) temos

$$k^2 \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,p}^p \leq 1 \tag{2.7}$$

para todo k natural e, de (2.6), temos

$$\begin{aligned} 2 &< (n_k + 1) \left(k^2 \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,p}^p \right) \\ &= n_k \left(k^2 \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,p}^p \right) + \left(k^2 \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,p}^p \right). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Logo, de (2.7) e (2.8) segue que

$$n_k \left(k^2 \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,p}^p \right) > 1 \tag{2.9}$$

para todo k natural. Agora considere a seqüência $(y_r)_{r=1}^{\infty}$ na qual cada $x_j^{(k)}$ aparece precisamente n_k vezes para cada $j = 1, ..., m_k$ e $k \in \mathbb{N}$. Então, para cada $\varphi \in B_{E^*}$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{\infty} |\varphi(y_r)|^p &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k} n_k \left|\varphi\left(x_j^{(k)}\right)\right|^p = \sum_{k=1}^{\infty} n_k \sum_{j=1}^{m_k} \left|\varphi\left(x_j^{(k)}\right)\right|^p \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} n_k \left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k}\right\|_{w,p}^p \overset{(2.6)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} < \infty.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Portanto $(y_r)_{r=1}^{\infty}$ é fracamente p-somável. Como f é $(p/\alpha; p)$-somante, a seqüência $(f(y_r))_{r=1}^{\infty}$ deveria ser fortemente $\frac{p}{\alpha}$-somável, e isso é impossível, pois

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{\infty} \|f(y_r)\|^{\frac{p}{\alpha}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k} n_k \left\|f\left(x_j^{(k)}\right)\right\|^{\frac{p}{\alpha}} \overset{(2.4)}{>} \sum_{k=1}^{\infty} n_k k^2 \left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k}\right\|_{w,p}^p \overset{(2.9)}{\geq} \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty.\end{aligned}$$

Portanto $(c) \Longrightarrow (a)$.$\square$

O próximo resultado é o principal teorema do capítulo e garante que as aplicações subhomogêneas também permitem o surgimento de um TDP muito semelhante ao teorema linear.

Teorema 2.3.4 *(Botelho-Pellegrino-Rueda [6]) Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* $\alpha > 0$. *Então uma aplicação* α*-subhomogênea* $f : E \longrightarrow F$ *é absolutamente* $\left(\frac{p}{\alpha}, p\right)$*-somante se, e somente se, existem uma constante* $C \geq 0$ *e uma medida de probabilidade* μ *nos borelianos de* B_{E^*} *(com a topologia fraca estrela) tais que*

$$\|f(x)\| \leq C\left(\int_{B_{E^*}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{\alpha}{p}} \tag{2.11}$$

para todo x *em* E.

Demonstração.

$(\Longleftarrow)$ Suponhamos que a desigualdade (2.11) ocorra. Então, se $x_1, ..., x_m \in E$ e $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\|f(x)\|^{\frac{p}{\alpha}} \leq C^{\frac{p}{\alpha}} \int_{B_{E^*}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi)$$

para todo x em E. Daí,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}\|f(x_j)\|^{\frac{p}{\alpha}} &\leq C^{\frac{p}{\alpha}}\sum_{j=1}^{m}\int_{B_{E^*}}|\varphi(x_j)|^p\,d\mu(\varphi)\\ &= C^{\frac{p}{\alpha}}\int_{B_{E^*}}\sum_{j=1}^{m}|\varphi(x_j)|^p\,d\mu(\varphi)\\ &\leq C^{\frac{p}{\alpha}}\int_{B_{E^*}}\sup_{\varphi\in B_{E^*}}\sum_{j=1}^{m}|\varphi(x_j)|^p\,d\mu(\varphi)\\ &= C^{\frac{p}{\alpha}}\sup_{\varphi\in B_{E^*}}\sum_{j=1}^{m}|\varphi(x_j)|^p\end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\|f(x_j)\|^{\frac{p}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{p}} \leq C\sup_{\varphi\in B_{E^*}}\left(\sum_{j=1}^{m}|\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{\alpha}{p}}.$$

Portanto, pelo Teorema 2.3.3, f é $\left(\frac{p}{\alpha},p\right)$-somante.

($\Longrightarrow$) Suponhamos agora que $f: E\longrightarrow F$ seja absolutamente $\left(\frac{p}{\alpha},p\right)$-somante. Então, pelo Teorema 2.3.3, existe uma constante $C>0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\|f(x_j)\|^{\frac{p}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{p}} \leq C\sup_{\varphi\in B_{E^*}}\left(\sum_{j=1}^{m}|\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{\alpha}{p}} \tag{2.12}$$

para todo $x_1,...,x_m\in E$ e $m\in\mathbb{N}$. Pelo Corolário **??** temos que $f(0)=0$.

Para cada conjunto finito $M\subset E$, seja

$$\Psi_M(\varphi)=\sum_{x\in M}\left(\|f(x)\|^{\frac{p}{\alpha}}-C^{\frac{p}{\alpha}}|\varphi(x)|^p\right).$$

Note que $\Psi_M\in C(B_{E^*})$, ou seja, Ψ_M é contínua (pela mesma justificativa do caso linear). Agora considere $\mathcal{A}$ o conjunto de todas Ψ_M e $\mathcal{F}$ a envoltória convexa de $\mathcal{A}$, ou seja, $\mathcal{F}$ é a interseção de todos os convexos que contêm $\mathcal{A}$. Vamos mostrar que, se $\Psi\in\mathcal{F}$, então existe $\varphi_\Psi\in B_{E^*}$ com $\Psi(\varphi_\Psi)\leq 0$. Pelo Lema 4.1.4, cada $\Psi\in\mathcal{F}$ é escrito como

$$\Psi=\sum_{j=1}^{s}\lambda_j\Psi_{M_j} \tag{2.13}$$

com $0\leq\lambda_j\leq 1$, para todo $j=1,...,s$, $s\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{s}\lambda_j=1$$

e $\Psi_{M_j} \in \mathcal{A}$, para todo $j = 1, ..., s$. Note que

$$\Psi \leq \Psi_{M_0} \tag{2.14}$$

com

$$M_0 = \bigcup_{j=1}^{s} \left\{ \lambda_j^{\frac{1}{p}} x;\ x \in M_j \right\}.$$

De fato, para cada $\Psi \in \mathcal{F}$ escrito sob a forma (2.13), temos

$$\begin{aligned}
\Psi(\varphi) &= \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \Psi_{M_j}(\varphi) \\
&= \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \sum_{x \in M_j} \left(\|f(x)\|^{\frac{p}{\alpha}} - C^{\frac{p}{\alpha}} |\varphi(x)|^p \right) \\
&= \sum_{j=1}^{s} \sum_{x \in M_j} \left(\lambda_j \|f(x)\|^{\frac{p}{\alpha}} - \lambda_j C^{\frac{p}{\alpha}} |\varphi(x)|^p \right) \\
&= \sum_{j=1}^{s} \sum_{x \in M_j} \left(\left\| \lambda_j^{\frac{\alpha}{p}} f(x) \right\|^{\frac{p}{\alpha}} - C^{\frac{p}{\alpha}} \left| \varphi\left(\lambda_j^{\frac{1}{p}} x \right) \right|^p \right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{s} \sum_{x \in M_j} \left(\left\| f\left(\lambda_j^{\frac{1}{p}} x \right) \right\|^{\frac{p}{\alpha}} - C^{\frac{p}{\alpha}} \left| \varphi\left(\lambda_j^{\frac{1}{p}} x \right) \right|^p \right) \\
&= \sum_{j=1}^{s} \sum_{y \in \left\{ \lambda_j^{1/p} x;\ x \in M_j \right\}} \left(\|f(y)\|^{\frac{p}{\alpha}} - C^{\frac{p}{\alpha}} |\varphi(y)|^p \right) \\
&= \sum_{y \in M_0} \left(\|f(y)\|^{\frac{p}{\alpha}} - C^{\frac{p}{\alpha}} |\varphi(y)|^p \right) \\
&= \Psi_{M_0}(\varphi).
\end{aligned}$$

Como B_{E^*} é compacta e Ψ_{M_0} é contínua, existe $\varphi_{M_0} \in B_{E^*}$ tal que

$$\Psi_{M_0}(\varphi_{M_0}) = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \Psi_{M_0}(\varphi). \tag{2.15}$$

Por (2.12) temos

$$\sup_{\varphi \in B_{E^*}} \Psi_{M_0}(\varphi) \leq 0. \tag{2.16}$$

Logo, de (2.15) e (2.16) temos

$$\Psi_{M_0}(\varphi_{M_0}) \leq 0. \tag{2.17}$$

Portanto, de (2.14) e (2.17), temos

$$\Psi(\varphi_{M_0}) \leq 0. \tag{2.18}$$

Seja

$$\mathcal{P} = \{w \in C(B_{E^*}); w(\varphi) > 0 \text{ para todo } \varphi \in B_{E^*}\}.$$

Note que $\mathcal{P}$ é aberto pelo Lema 1.2.1 com $K = B_{E^*}$, convexo e não-vazio, seguindo as mesmas justificativas da demonstração do TDP linear.

Da definição de $\mathcal{P}$ e de (2.18) segue que $\mathcal{P} \cap \mathcal{F} = \varnothing$. Assim, pelo Teorema 4.2.8 (Hahn-Banach, Forma Geométrica), com $A = \mathcal{P}$, $B = \mathcal{F}$ e $X = C(B_{E^*})$, existem $h \in C(B_{E^*})^*$ e $c > 0$ tais que

$$h(g) \leq c < h(w)$$

para todo $g \in \mathcal{F}$ e $w \in \mathcal{P}$. Como $f(0) = 0$, temos

$$0 = \Psi_{\{0\}} \in \mathcal{F}.$$

Assim,

$$h(w) > c \geq h(0) = 0 \tag{2.19}$$

para todo $w \in \mathcal{P}$, isto é, $h(w) > 0$ para todo $w \in \mathcal{P}$. Procedendo como na demonstração do caso linear, usando a continuidade de h, concluímos que $h(w) \geq 0$ sempre que $w \geq 0$; usando novamente os mesmos argumentos do caso linear, obtemos uma medida de probabilidade μ tal que

$$\int_{B_{E^*}} \Psi_{\{x\}}(\varphi)\, d\mu(\varphi) \leq 0$$

para todo $x \in E$. Logo

$$\int_{B_{E^*}} \left(\|f(x)\|^{\frac{p}{\alpha}} - C^{\frac{p}{\alpha}} |\varphi(x)|^p \right) d\mu(\varphi) \leq 0.$$

Portanto

$$\left(\int_{B_{E^*}} \|f(x)\|^{\frac{p}{\alpha}}\, d\mu(\varphi) \right) - C^{\frac{p}{\alpha}} \int_{B_{E^*}} |\varphi(x)|^p\, d\mu(\varphi) \leq 0$$

e assim

$$\|f(x)\|^{\frac{p}{\alpha}} \left(\int_{B_{E^*}} 1 d\mu(\varphi) \right) \leq C^{\frac{p}{\alpha}} \int_{B_{E^*}} |\varphi(x)|^p\, d\mu(\varphi).$$

Como μ é medida de probabilidade, segue que

$$\|f(x)\| \leq C \left(\int_{B_{E^*}} |\varphi(x)|^p\, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{\alpha}{p}}.$$

□

2.4 Uma nova versão do TDP para aplicações multilineares

O seguinte resultado é essencial para o Teorema 2.4.2.

Proposição 2.4.1 *Se $A : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ é n-linear contínua então as definições 2.2.1 e 2.3.2 com $E = (E_1 \times \cdots \times E_n, \|\cdot\|_\infty)$ coincidem. Mais precisamente, A é absolutamente $(p; q, ..., q)$-somante pela Definição 2.2.1 se, e somente se, A é absolutamente $(p; q)$-somante segundo a Definição 2.3.2.*

Demonstração. Suponha que A seja absolutamente $(p; q, ..., q)$-somante pela Definição 2.2.1. Seja

$$\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w \left(E_1 \times \cdots \times E_n\right).$$

Pelo Lema 4.3.2 temos que $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w \left(E_k\right)$ para cada $k = 1, ..., n$. Como A é absolutamente $(p; q)$somante pela Definição 2.2.1, segue que

$$\left(A\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p \left(F\right).$$

Reciprocamente, suponha que A seja absolutamente $(p; q)$-somante pela Definição 2.3.2. Seja $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w \left(E_k\right)$, para cada $k = 1, ..., n$. Pelo Lema 4.3.2 temos que

$$\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w \left(E_1 \times \cdots \times E_n\right).$$

Como A é absolutamente $(p; q)$ somante pela Definiçao 2.3.2, segue que

$$\left(A\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p \left(F\right).$$

□

A seguir, usando os resultados da seção anterior obtemos um TDP alternativo para aplicações multilineares dominadas. Este teorema também é devido a Botelho, Pellegrino e Rueda e aparece em essência em [6].

Teorema 2.4.2 *Seja $1 \leq p < \infty$. Uma aplicação $A \in \mathcal{L}\left(E_1, ..., E_n; F\right)$ é absolutamente $\left(\frac{p}{n}; p, ..., p\right)$-somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade μ nos borelianos de $B_{(E_1 \times \cdots \times E_n)^*}$ com a topologia fraca-estrela tais que*

$$\left\|A\left(x_1, ..., x_n\right)\right\| \leq C \left(\int_{B_{(E_1 \times \cdots \times E_n)^*}} \left|\varphi\left(x_1, ..., x_n\right)\right|^p d\mu\left(\varphi\right)\right)^{\frac{n}{p}}.$$

Demonstração.($\Rightarrow$) Pela Proposição 2.4.1 segue que A é $\left(\frac{p}{n}, p\right)$-somante segundo a Definição 2.3.2. Como A é n-linear, é claro que A é n-subhomogênea. O Teorema 2.3.4 com $n = \alpha$ fornece o resultado.

($\Leftarrow$) A recíproca é demonstrada da forma usual, como foi feita no TDP linear.□

Capítulo 3

Uma versão abstrata do TDP

Os resultados desse capítulo também são devidos a Botelho, Pellegrino e Rueda e aparecem em [5].

3.1 O TDP abstrato

Sejam $\beta > 0$ e K um conjunto compacto (qualquer conjunto compacto). Considere a aplicação

$$R : K \times E \longrightarrow [0, \infty)$$

satisfazendo

$$R(\varphi, 0) = 0 \tag{3.1}$$

e suponha que para cada $x \in E$, a função

$$\begin{aligned} R_x : K &\longrightarrow [0, \infty) \\ R_x(\varphi) &= R(\varphi, x) \end{aligned}$$

seja contínua e

$$R(\varphi, \eta x) \leq \eta^\beta R(\varphi, x) \tag{3.2}$$

para todo η entre 0 e 1 e quaisquer $\varphi \in K$ e $x \in E$.

De agora em diante, R denotará uma aplicação satisfazendo as propriedades mencionadas acima.

Definição 3.1.1 *Seja $f : E \longrightarrow F$ α-subhomogênea. Se existir uma constante $C_1 > 0$ tal que*

$$\sum_{j=1}^{m} \|f(x_j)\|^{\frac{p\beta}{\alpha}} \leq C_1 \sup_{\varphi \in K} \sum_{j=1}^{m} R(\varphi, x_j)^p, \tag{3.3}$$

para todos $x_1, ..., x_m \in E$ e $m = 1, 2, ...$, a aplicação f é chamada de R^β-abstrata p-dominada.

A demonstração do TDP abstrato segue o mesmo roteiro da demonstração do caso linear e subhomogêneo. Entretanto, como o contexto é bem mais abragente que os casos anteriores, preferimos fazer todos os detalhes.

Teorema 3.1.2 *(Botelho-Pellegrino-Rueda) Sejam $1 \leq p < \infty$ e $f : E \longrightarrow F$ α-subhomogênea. Então f é R^{β}-abstrata p-dominada (com constante C_1) se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade μ nos borelianos em K tais que*

$$\|f(x)\| \leq C \left(\int_K R(\varphi, x)^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{\alpha}{p\beta}} \tag{3.4}$$

para todo $x \in E$. Além disso $C = C_1^{\frac{\alpha}{p\beta}}$.

Demonstração. ($\Longleftarrow$) Suponhamos que (3.4) ocorra. Se $x_1, ..., x_m \in E$ e $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \|f(x_j)\|^{\frac{p\beta}{\alpha}} &\leq C^{\frac{p\beta}{\alpha}} \sum_{j=1}^{m} \int_K R(\varphi, x_j)^p \, d\mu(\varphi) \\
&= C^{\frac{p\beta}{\alpha}} \int_K \sum_{j=1}^{m} R(\varphi, x_j)^p \, d\mu(\varphi) \\
&\leq C^{\frac{p\beta}{\alpha}} \int_K \sup_{\varphi \in K} \sum_{j=1}^{m} R(\varphi, x_j)^p \, d\mu(\varphi) \\
&= C^{\frac{p\beta}{\alpha}} \sup_{\varphi \in K} \sum_{j=1}^{m} R(\varphi, x_j)^p .
\end{aligned}$$

Portanto f é R^{β}-abstrata p-dominada com $C_1 = C^{\frac{p\beta}{\alpha}}$.

($\Longrightarrow$) Suponha agora que $f : E \longrightarrow F$ seja R^{β}-abstrata p-dominada. Então existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{m} \|f(x_j)\|^{\frac{p\beta}{\alpha}} \leq C_1 \sup_{\varphi \in K} \sum_{j=1}^{m} R(\varphi, x_j)^p \tag{3.5}$$

para todos $x_1, ..., x_m \in E$ e $m \in \mathbb{N}$. Em particular, note que $f(0) = 0$. De fato, tome $m = 1$ e $x_1 = 0$. Então, de (3.1) e (3.5) temos

$$\|f(0)\|^{\frac{p\beta}{\alpha}} \leq C_1 \sup_{\varphi \in K} R(\varphi, 0)^p = 0.$$

Logo

$$\|f(0)\| \leq 0$$

e assim

$$f(0) = 0.$$

Seja $C(K)$ espaço de Banach de todas as funções reais contínuas em K com a norma do sup. Para cada conjunto finito $M \subset E$, seja

$$\Psi_M(\varphi) = \sum_{x \in M} \left(\|f(x)\|^{\frac{p\beta}{\alpha}} - C_1 R(\varphi, x)^p \right).$$

Como

$$R_x : K \longrightarrow [0, \infty)$$

é contínua, temos que Ψ_M é contínua, ou seja, $\Psi_M \in C(K)$. Sejam $\mathcal{G}$ o conjunto de todas as Ψ_M e $\mathcal{F}$ a envoltória convexa de $\mathcal{G}$, ou seja, $\mathcal{F}$ é a interseção de todos os convexos que contêm $\mathcal{G}$. Agora vamos mostrar que se $\Psi \in \mathcal{F}$, então existe $\varphi_\Psi \in K$ tal que

$$\Psi(\varphi_\Psi) \leq 0.$$

Pelo Lema 4.1.4, cada $\Psi \in \mathcal{F}$ é escrito como

$$\Psi = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \Psi_{M_j} \tag{3.6}$$

com $0 \leq \lambda_j \leq 1$, para todo $j = 1, ..., s$, $s \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{s} \lambda_j = 1$$

e

$$\Psi_{M_j} \in \mathcal{G}, \text{ para todo } j = 1, ..., s.$$

Note que

$$-\lambda R(\varphi, x)^p \leq -R\left(\varphi, \lambda^{\frac{1}{p\beta}} x\right)^p \tag{3.7}$$

para todo $0 \leq \lambda \leq 1$. De fato, como

$$R(\varphi, \eta x) \leq \eta^\beta R(\varphi, x)$$

temos

$$\eta^{p\beta} R(\varphi, x)^p \geq R(\varphi, \eta x)^p, \tag{3.8}$$

para todo $0 \leq \eta \leq 1$. Se $0 \leq \lambda \leq 1$, temos

$$0 \leq \lambda^{\frac{1}{p\beta}} \leq 1$$

e, fazendo $\eta = \lambda^{\frac{1}{\beta p}}$ em (3.8), temos

$$\left(\lambda^{\frac{1}{p\beta}}\right)^{p\beta} R(\varphi, x)^p \geq R\left(\varphi, \lambda^{\frac{1}{p\beta}} x\right)^p.$$

Daí,

$$\lambda R(\varphi, x)^p \geq R\left(\varphi, \lambda^{\frac{1}{p\beta}} x\right)^p$$

e, multiplicando os dois lados por (-1), segue (3.7).

Note também que

$$\Psi \leq \Psi_{M_0} \tag{3.9}$$

com

$$M_0 = \bigcup_{j=1}^{s} \left\{ \lambda_j^{\frac{1}{p\beta}} x;\ x \in M_j \right\}.$$

De fato, para cada $\Psi \in \mathcal{F}$ escrito sob a forma (3.6), temos

$$\begin{aligned}
\Psi(\varphi) &= \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \Psi_{M_j}(\varphi) \\
&= \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \sum_{x \in M_j} \left(\|f(x)\|^{\frac{p\beta}{\alpha}} - C_1 R(\varphi, x)^p \right) \\
&= \sum_{j=1}^{s} \sum_{x \in M_j} \left(\lambda_j \|f(x)\|^{\frac{p\beta}{\alpha}} - \lambda_j C_1 R(\varphi, x)^p \right) \\
&\overset{(3.7)}{\leq} \sum_{j=1}^{s} \sum_{x \in M_j} \left(\left\| \lambda_j^{\frac{\alpha}{p\beta}} f(x) \right\|^{\frac{p\beta}{\alpha}} - C_1 R\left(\varphi, \lambda_j^{\frac{1}{p\beta}} x \right)^p \right) \\
&\overset{(**)}{\leq} \sum_{j=1}^{s} \sum_{x \in M_j} \left(\left\| f\left(\lambda_j^{\frac{1}{p\beta}} x \right) \right\|^{\frac{p\beta}{\alpha}} - C_1 R\left(\varphi, \lambda_j^{\frac{1}{p\beta}} x \right)^p \right) \\
&= \sum_{j=1}^{s} \sum_{y \in \left\{ \lambda_j^{1/p\beta} x; x \in M_j \right\}} \left(\|f(y)\|^{\frac{p\beta}{\alpha}} - C_1 R(\varphi, y)^p \right) \\
&= \sum_{y \in \left\{ \lambda_1^{1/p\beta} x; x \in M_1 \right\}} \left(\|f(y)\|^{\frac{p\beta}{\alpha}} - C_1 R(\varphi, y)^p \right) + \cdots + \\
&+ \sum_{y \in \left\{ \lambda_s^{1/p\beta} x; x \in M_s \right\}} \left(\|f(y)\|^{\frac{p\beta}{\alpha}} - C_1 R(\varphi, y)^p \right) \\
&= \sum_{y \in M_0} \left(\|f(y)\|^{\frac{p\beta}{\alpha}} - C_1 R(\varphi, y)^p \right) \\
&= \Psi_{M_0}(\varphi),
\end{aligned}$$

onde em $(**)$ usamos a subhomogeneidade de f. Como K é compacto e R_x é contínua, temos

$$\sup_{\varphi \in K} \sum_{x \in M_0} R(\varphi, x)^p = \sum_{x \in M_0} R(\varphi_{M_0}, x)^p \tag{3.10}$$

para algum $\varphi_{M_0} \in K$. Assim, usando (3.5) e (3.10) obtemos

$$\Psi_{M_0}(\varphi_{M_0}) = \sum_{x \in M_0} \left(\|f(x)\|^{\frac{p\beta}{\alpha}} - C_1 R(\varphi_{M_0}, x)^p \right) \leq 0. \tag{3.11}$$

Logo, de (3.9) e (3.11), temos

$$\Psi\left(\varphi_{M_0}\right) \leq 0. \tag{3.12}$$

Seja

$$\mathcal{P} = \{h \in C(K) \,; h(\varphi) > 0 \text{ para todo } \varphi \in K\}.$$

Note que o Lema 1.2.1 garante que $\mathcal{P}$ é aberto; além disso $\mathcal{P}$ é não-vazio pois toda função positiva pertence a $\mathcal{P}$. Também é fácil ver que $\mathcal{P}$ é convexo.

Da definição de $\mathcal{P}$ e de (3.12) segue que

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{F} = \varnothing.$$

Assim, pelo Teorema 4.2.8 (Hahn-Banach, Forma Geométrica) com $A = \mathcal{P}$, $B = \mathcal{F}$ e $E = C(K)$, existem $\mu_1 \in C(K)^*$ e $L > 0$ tais que

$$\mu_1(g) \leq L < \mu_1(h)$$

para todo $g \in \mathcal{F}$ e $h \in \mathcal{P}$. Como $f(0) = 0$, temos

$$0 = \Psi_{\{0\}} \in \mathcal{F}.$$

Assim,

$$0 = \mu_1(0) \leq L.$$

Daí,

$$\mu_1(h) > L \geq \mu_1(0) = 0 \tag{3.13}$$

para todo $h \in \mathcal{P}$, isto é,

$$\mu_1(h) > 0 \tag{3.14}$$

para todo $h \in \mathcal{P}$. Usando a continuidade de μ_1, concluímos que $\mu_1(h) \geq 0$ sempre que $h \geq 0$. De fato, se $h \in C(K)$ e $h \geq 0$, considere (para cada k natural), $h_k = h + \frac{1}{k}$. Então $h_k \in \mathcal{P}$ e

$$\|h_k - h\|_{C(K)} = \frac{1}{k}.$$

Assim,

$$h_k \to h$$

em $C(K)$. Como μ_1 é contínua, segue de (3.14) que

$$\mu_1(h) = \lim_{k\to\infty} \mu_1(h_k) \geq 0$$

sempre que $h \geq 0$. Usando a continuidade de μ_1, temos que $L = 0$. De fato, como $0 \in \mathcal{F}$, temos

$$\mu_1\left(\frac{1}{k}\right) > L \geq \mu_1(0) = 0 \tag{3.15}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e daí

$$L \leq \lim_{k\to\infty} \mu_1 \left(\frac{1}{k}\right) = \mu_1 (0) = 0. \tag{3.16}$$

De (3.15) e (3.16) segue que

$$L = 0.$$

Seja $\mu \in C(K)^*$ dado por

$$\mu(\varphi) = \frac{\mu_1(\varphi)}{\mu_1(1)}.$$

Perceba que μ está bem definida, pois $\mu_1(1) > 0$. Assim, $\mu(1) = 1$ e $\mu(\varphi) \geq 0$ sempre que $\varphi \geq 0$. De ([2, Theorem 4.3.10]) podemos encontrar uma medida (também denotada por μ) de probabilidade (positiva) nos borelianos de K tal que

$$\mu(r) = \int_K r(\varphi)\, d\mu(\varphi)$$

para todo $r \in C(K)$. Logo

$$\int_K g(\varphi)\, d\mu(\varphi) = \mu(g) \leq 0$$

para cada $g \in \mathcal{F}$, pois

$$\mu(g) = \frac{\mu_1(g)}{\mu_1(1)} \leq \frac{L}{\mu_1(1)} = 0.$$

Para cada $x \in E$, temos $\Psi_{\{x\}} \in \mathcal{F}$ e obtemos

$$\int_K \Psi_{\{x\}}(\varphi)\, d\mu(\varphi) \leq 0.$$

Daí

$$\int_K \left(\|f(x)\|^{\frac{p\beta}{\alpha}} - C_1 R(\varphi, x)^p\right) d\mu(\varphi) \leq 0$$

e segue que

$$\int_K \|f(x)\|^{\frac{p\beta}{\alpha}}\, d\mu(\varphi) - C_1 \int_K R(\varphi, x)^p\, d\mu(\varphi) \leq 0$$

e, como μ é uma medida de probabilidade, concluímos facilmente que

$$\|f(x)\|^{\frac{p\beta}{\alpha}} \leq C_1 \int_K R(\varphi, x)^p\, d\mu(\varphi).$$

Logo

$$\|f(x)\| \leq C\left(\int_K R(\varphi, x)^p\, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{\alpha}{p\beta}}$$

com $C = C_1^{\frac{\alpha}{p\beta}}$.$\square$

3.2 Aplicações da versão abstrata do TDP

Nessa seção veremos como a versão abstrata do TDP fornece demonstrações elegantes de TDP existentes em diferentes contextos.

3.2.1 O TDP linear e o TDP para aplicações subhomogêneas

Note que o TDP linear é um caso particular do TDP abstrato pois, se f é linear, é também 1-subhomogênea e, tomando $\alpha = \beta = 1$, $R(\varphi, x) = |\varphi(x)|$ e $K = B_{E^*}$ com a topologia fraca estrela, o resultado segue. O TDP para aplicações α-subhomogêneas é também um caso particular do TDP abstrato; basta escolher $\alpha = \beta$ e $R(\varphi, x) = |\varphi(x)|$ e $K = B_{E^*}$ com a topologia fraca estrela.

3.2.2 O TDP para aplicações p-semi-integrais

Definição 3.2.1 *Seja $p \geq 1$. A aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ é p-semi-integral se existir $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|T(x_{1,j}, ..., x_{n,j})\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\sup_{\varphi_l \in B_{E_l^*},\ l=1,...,n} \sum_{j=1}^{m} |\varphi_1(x_{1,j}) \cdots \varphi_n(x_{n,j})|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, $x_{l,j} \in E_l$ com $l = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m$.

O espaço das aplicações p-semi-integrais $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ é denotado por $\mathcal{L}_{si,p}(E_1, ..., E_n; F)$.

O seguinte teorema de dominação foi provado em [11]. Vamos demonstrá-lo através de uma aplicação relativamente simples da versão abstrata do TDP, como indicado em [9]:

Teorema 3.2.2 *$T \in \mathcal{L}_{si,p}(E_1, ..., E_n; F)$ se, e somente se, existem $C \geq 0$ e uma medida de probabilidade μ na sigma-álgebra de Borel $\mathcal{B}\left(B_{E_1^*} \times \cdots \times B_{E_n^*}\right)$ de $B_{E_1^*} \times \cdots \times B_{E_n^*}$ com o produto das topologias fracas-estrelas $\sigma(E_l^*, E_l)$, $l = 1, ..., n$, tais que*

$$\|T(x_1, ..., x_n)\| \leq C \left(\int_{B_{E_1^*} \times \cdots \times B_{E_n^*}} |\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)|^p \, d\mu(\varphi_1, ..., \varphi_n)\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $x_j \in E_j$ e $j = 1, ..., n$.

Demonstração. Suponha $T \in \mathcal{L}_{si,p}(E_1, ..., E_n; F)$. Pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki temos que $K = B_{E_1^*} \times \cdots \times B_{E_n^*}$ é compacto. Defina

$$R : K \times (E_1 \times \cdots \times E_n) \longrightarrow [0, \infty)$$

por

$$R((\varphi_1, ...\varphi_n), (x_1, ..., x_n)) = |\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)|.$$

Pela definição de aplicação p-semi integral, temos que R satisfaz (3.3) com $\beta = \alpha = n$.

Note que, se $x = (x_1, ..., x_n)$, temos

$$\begin{gathered} R_x : K \longrightarrow [0, \infty) \\ R_x(\varphi_1, ...\varphi_n) = |\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)| \end{gathered}$$

é contínua. De fato, seja $\left(\varphi_1^{(\lambda)}, ..., \varphi_n^{(\lambda)}\right)$ uma rede convergindo para $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ em K. Então, como estamos lidando com a topologia produto, segue que

$$\begin{gathered} \varphi_1^{(\lambda)} \longrightarrow \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n^{(\lambda)} \longrightarrow \varphi_n. \end{gathered}$$

Logo

$$\varphi_1^{(\lambda)}(x_1) \cdots \varphi_n^{(\lambda)}(x_n) \longrightarrow \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n),$$

e R_x é contínua. Note também que para $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ e $x = (x_1, ..., x_n)$, temos

$$\begin{aligned} R(\varphi, \lambda x) &= R((\varphi_1, ..., \varphi_n), \lambda(x_1, ..., x_n)) \\ &= R((\varphi_1, ..., \varphi_n), (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)) \\ &= |\lambda|^n |\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)| \\ &= |\lambda|^n R(\varphi, x). \end{aligned}$$

Logo R satisfaz a condição (3.2) (lembre que $\beta = n$). Mas T é n-linear, e por conseguinte α-subhomogênea (lembre que $\alpha = n$). Pelo Teorema da Dominação de Pietsch Abstrato existem $C \geq 0$ e uma medida de probabilidade μ na sigma-álgebra de Borel $\mathcal{B}\left(B_{E_1^*} \times \cdots \times B_{E_n^*}\right)$ tais que

$$\|T(x_1, ..., x_n)\| \leq C \left(\int_{B_{E_1^*} \times \cdots \times B_{E_n^*}} |\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)|^p \, d\mu(\varphi_1, ..., \varphi_n) \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $(x_1, ..., x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

A outra implicação é simples e segue a demonstração original.

□

3.2.3 O TDP para aplicações fortemente p-somantes

Na presente seção usaremos a teoria de produtos tensoriais em espaços de Banach. Se $A \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$, então existe um espaço de Banach, denotado por $E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_m$

(cujos elementos são chamados de tensores, dentre os quais estão elementos denotados por $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$, chamados de tensores elementares), e uma aplicação linear

$$A_L : E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_m \longrightarrow F$$

tais que

$$A_L(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) = A(x_1, ..., x_m).$$

A aplicação que associa naturalmente $E_1 \times \cdots \times E_m$ com $E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_m$ será denotada por P, isto é,

$$P(x_1, ..., x_m) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_m.$$

A partir das propriedades algébricas de produto tensorial prva-se facilmente que A é m-linear. O seguinte diagrama ilustra o que foi escrito acima:

$$\begin{tikzcd}
E_1 \times \cdots \times E_m \arrow[r, "A\ (m-linear)"] \arrow[d, "P\ (m-linear)"'] & F \\
E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_m \arrow[ur, "A_L\ (linear)"'] &
\end{tikzcd}$$

A aplicação A_L é chamada de linearização de A. Sabe-se ainda que $\|A_L\| = \|A\|$ e a relação

$$\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F) = \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_m; F)$$

é uma isometria. Em particular, se $F = \mathbb{K}$, temos a identificação (isometria)

$$\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; \mathbb{K}) = (E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_m)^*. \tag{3.17}$$

Para detalhes sobre a teoria de produtos tensoriais em espaços de Banach, indicamos [12, 26].

Definição 3.2.3 *Uma aplicação m-linear $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$ é fortemente p-somante se existir uma constante $C \geq 0$ tal que para quaisquer $x_1^{(i)}, ..., x_n^{(i)} \in E_i$ $(i = 1, ..., m)$ e $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \left\| T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(m)} \right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\phi \in B_{\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; \mathbb{K})}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \phi\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(m)} \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O seguinte teorema de dominação aparece em [14]:

Teorema 3.2.4 *(V. Dimant) Seja $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) T é fortemente p-somante.

(ii) Existem uma medida de probabilidade μ em $B_{\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;\mathbb{K})}$ com a topologia fraca estrela, e uma constante $C \geq 0$ tais que

$$\|T(x_1,...,x_m)\| \leq C \left(\int_{B_{\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;\mathbb{K})}} |\phi(x_1,...,x_m)|^p \, d\mu(\phi) \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $(x_1,...,x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$.

No teorema acima há uma identificação implícita. Quando se menciona que $B_{\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;\mathbb{K})}$ está munido da topologia fraca estrela, a identificação de $\mathcal{L}(E_1,...,E_m;\mathbb{K})$ com o dual do produto tensorial injetivo está implícita, e por isso é possível fazer referência à topologia fraca-estrela. Para demonstrarmos o teorema anterior usando a versão abstrata do TDP, procederemos de forma direta, sem usar a identificação; acreditamos que dessa forma a demonstração se torna mais acessível a um público mais amplo.

Teorema 3.2.5 *$T \in \mathcal{L}(E_1,...,E_m;F)$ é fortemente p-somante se, e somente se, existem uma medida de probabilidade μ e uma constante $C \geq 0$ em $B_{(E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_m)^*}$, com a topologia fraca estrela, tais que para todo $(x_1,...,x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$, temos*

$$\|T(x_1,...,x_m)\| \leq C \left(\int_{B_{(E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_m)^*}} |\varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.18}$$

Demonstração.($\Rightarrow$) Seja $K = B_{(E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_m)^*}$ com a topologia fraca estrela. Defina

$$R : K \times (E_1 \times \cdots \times E_m) \longrightarrow [0,\infty)$$

por

$$R(\varphi,(x_1,...,x_m)) = |\varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m)|$$

Pela definição de aplicação fortemente somante, temos que R satisfaz (3.3) com $\beta = \alpha = n$ (lembre-se da isometria (3.17))

Para $x = (x_1,...,x_m)$ é claro que

$$\begin{gathered} R_x : K \longrightarrow [0,\infty) \\ R_x(\varphi) = |\varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m)| \end{gathered}$$

é contínua, pois estamos lidando com a topologia fraca-estrela em K. Note também que para $\varphi \in K$ e $x = (x_1,...,x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$, temos

$$\begin{aligned} R(\varphi,\lambda x) &= R(\varphi,\lambda(x_1,...,x_m)) \\ &= R(\varphi,(\lambda x_1,...,\lambda x_m)) \\ &= |\varphi(\lambda x_1 \otimes \cdots \otimes \lambda x_m)| \\ &= |\lambda|^n |\varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m)| \\ &= |\lambda|^n R(\varphi,x). \end{aligned}$$

Logo R satisfaz a condição (3.2) (lembre que $\beta = n$). Como T é n-linear, também é α-subhomogênea (lembre que $\alpha = n$). Pelo Teorema da Dominação de Pietsch Abstrato existem uma constante $C \geq 0$ e uma medida de probabilidade μ nos borelianos de $B_{(E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_m)^*}$ tais que para todo $(x_1, ..., x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$, temos

$$\|T(x_1, ..., x_m)\| \leq C \left(\int_{B_{(E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_m)^*}} |\varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

($\Leftarrow$) Se vale (3.18), então

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \left\| T\left(x_1^{(j)}, ..., x_m^{(j)}\right) \right\|^p &\leq C^p \sup_{\varphi \in B_{(E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_m)^*}} \sum_{j=1}^{n} \left| \varphi\left(x_1^{(j)} \otimes \cdots \otimes x_m^{(j)}\right) \right|^p \\ &= C^p \sup_{\varphi \in B_{\mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; \mathbb{K})}} \sum_{j=1}^{n} \left| \varphi\left(x_1^{(j)}, ..., x_m^{(j)}\right) \right|^p. \end{aligned}$$

Portanto $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$ é fortemente p-somante. $\square$

Capítulo 4

Resultados auxiliares

4.1 Conjuntos convexos e a envoltória convexa

Definição 4.1.1 *Seja E um espaço vetorial. Um subconjuto $A \subset E$ é dito convexo se sempre que $x, y \in A$, o ″segmento fechado″*

$$\{z = ax + (1-a)\,y; 0 \leq a \leq 1\}$$

estiver contido em A.

É facil ver que interseção de conjuntos convexos é ainda um conjunto convexo.

Lema 4.1.2 *C é um convexo em um espaço vetorial se, e somente se, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in C$ sempre que $x_1, ..., x_n \in C$ e $0 \leq \lambda_1, ..., \lambda_n \leq 1$ satisfazem*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Demonstração. ($\Longleftarrow$) Basta tomar $n = 2$.

($\Longrightarrow$) Suponhamos agora que C seja convexo e vamos mostrar que, para todo n natural, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in C$ sempre que $0 \leq \lambda_i \leq 1$ e $x_i \in C$ para todo $i, ..., n$ e

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Vamos usar indução em n. Para $n = 1$ e 2 o resultado é claro. Admita o resultado verdadeiro para $n-1$ e vamos mostrar para n, com $\lambda_n \neq 1$. Se $\lambda_n = 1$ o resultado é obviamente válido. Note que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + \lambda_n x_n = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1}) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i x_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1}} \right) + \lambda_n x_n.$$

Fazendo $k_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1}}$, temos que $\sum_{i=1}^{n-1} k_i = 1$. Pela hipótese de indução segue que

$$\sum_{i=1}^{n-1} k_i x_i \in C.$$

Portanto

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n-1} k_i x_i + (1-\alpha)\, x_n$$

onde $\alpha = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1}$ e $0 \leq \alpha \leq 1$. Logo, como $\sum_{i=1}^{n-1} k_i x_i \in C$ e $x_n \in C$ temos

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in C.$$

□

Definição 4.1.3 *Se A é um subconjunto de um espaço vetorial E, o conjunto $conv(A)$ chamado de envoltória convexa de A, é a interseção de todos os convexos que contêm A.*

Lema 4.1.4 *Se A é um subconjunto de um espaço vetorial, então*

$$conv(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i ; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \ \textit{com}\ 0 \leq \lambda_i \leq 1, x_i \in A, i = 1, ..., n \ \textit{e}\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Demonstração. Seja

$$X = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i ; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \text{ com } 0 \leq \lambda_i \leq 1, x_i \in A, i = 1, ..., n \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Note que $A \subset X$. De fato, tomando $n = 1$, temos que

$$\sum_{i=1}^{1} \lambda_i = 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{1} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 = x_1.$$

Vamos mostrar que X é convexo. Sejam $x, y \in X$ tais que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in X$$
$$y = \sum_{i=1}^{m} \eta_i y_i \in X.$$

Note que podemos sempre supor $m = n$ (completamos com zero, se necessário). Note que se $a \in [0,1]$, então

$$\begin{aligned} ax + (1-a)\,y &= a\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) + (1-a)\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i y_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a\lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{n} (1-a)\,\eta_i y_i \end{aligned}$$

Para mostrar que $ax + (1-a)\,y \in X$, devemos ter

$$\sum_{i=1}^{n} a\lambda_i + \sum_{i=1}^{n} (1-a)\,\eta_i = 1.$$

Mas isso é verdade, pois

$$\sum_{i=1}^{n} a\lambda_i + \sum_{i=1}^{n} (1-a)\,\eta_i = a\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + (1-a)\sum_{i=1}^{n} \eta_i = 1.$$

Como X é convexo e $A \subset X$, segue que

$$conv(A) \subset X. \tag{4.1}$$

Por outro lado, se C é convexo, pelo Lema 4.1.2, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in C$$

para todo $x_i \in C$ e

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Logo, se C contém A, temos,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in C \text{ para todo } x_i \in A \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Portanto

$$X \subset C.$$

Como essa inclusão é válida para todo C convexo que contém A, segue que

$$X \subset conv\,(A)\,. \tag{4.2}$$

De (4.1) e (4.2) segue que

$$X = conv(A).$$

□

4.2 Uma forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach

Nesta seção E será sempre um espaço de Banach sobre o corpo dos reais. Relembremos o Teorema de Hahn-Banach:

Teorema 4.2.1 (Teorema de Hahn-Banach) *Seja $p : E \to \mathbb{R}$ uma aplicação que satisfaz*

$$p(ax) = ap(x) \text{ para todo } a > 0 \text{ e todo } x \in E \tag{4.3}$$

e

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \text{ para quaisquer } x, y \in E.$$

Se $G \subset E$ é um subespaço vetorial e $g : G \to \mathbb{R}$ é uma aplicação linear tal que

$$g(x) \leq p(x) \text{ para todo } x \text{ em } G,$$

então existe um funcional linear $T : E \to \mathbb{R}$ que estende g e que satisfaz

$$T(x) \leq p(x) \text{ para todo } x \text{ em } E.$$

Nosso objetivo será provar uma conseqüência do Teorema de Hahn-Banach, que é chamada de forma geométrica. A rigor, há mais de uma forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach; o resultado que apresentaremos não aparece muito freqüentemente na literatura, e por isso faremos os detalhes. Observe que a forma geométrica que apresentaremos é ligeiramente diferente das formas geométricas que aparecem em [10]

Definição 4.2.2 *Seja $C \subset E$ um conjunto convexo, aberto, com $0 \in C$. A aplicação*

$$p : E \to \mathbb{R}$$
$$p(x) = \inf \left\{ a > 0; \frac{x}{a} \in C \right\}$$

é chamada de funcional de Minkowski de C.

Lema 4.2.3 *Sejam E espaço vetorial e $C \subset E$. Seja $A = \left\{ a > 0; \frac{bx}{a} \in C \right\}$ e $B = \left\{ a > 0; \frac{x}{a} \in C \right\}$. Então*

$$\inf A = b \inf B.$$

Demonstração. Se $\alpha \in A$ então $\frac{\alpha}{b} \in B$. Se $\alpha \in B$ então $\alpha b \in A$. Logo $\alpha \in A \iff \frac{\alpha}{b} \in B$ e portanto $\inf A = b \inf B$.$\square$

Proposição 4.2.4 *O funcional de Minkowski possui as seguintes propriedades:*

(i) $p(bx) = bp(x)$ *para todo* $b > 0$ *e todo* $x \in E$.

(ii) $C = \{x \in E; p(x) < 1\}$.

(iii) *Existe* $M > 0$ *tal que*

$$0 \leq p(x) \leq M \|x\|$$

para todo x *em* E.

(iv) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ *para quaisquer* $x, y \in E$.

Demonstração. (i) Note que

$$\begin{aligned} p(bx) &= \inf \left\{ a > 0; \frac{bx}{a} \in C \right\} \\ &\stackrel{\text{Lema 4.2.3}}{=} b \inf \left\{ a > 0; \frac{x}{a} \in C \right\} \\ &= bp(x). \end{aligned}$$

(ii) Seja $x \in C$. Como C é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $(1+\epsilon)x \in C$, ou seja,

$$\frac{x}{\left(\frac{1}{1+\epsilon}\right)} \in C.$$

Logo

$$p(x) \leq \frac{1}{1+\epsilon} < 1.$$

Reciprocamente, seja $x \in E$ tal que

$$p(x) < 1.$$

Da definição de $p(x)$ existe $0 < \alpha < 1$ tal que $\alpha^{-1}x \in C$. Mas

$$x = \alpha\left(\alpha^{-1}x\right) + (1-\alpha)\,0 \in C,$$

pois C é convexo e $0 \in C$.

(iii) Seja $r > 0$ tal que $B(0; r) \subset C$. Vejamos que

$$p(x) \leq \frac{1}{r}\|x\|$$

para todo x em E.

De fato, suponhamos que $p(x_0) > \frac{1}{r}\|x_0\|$ para algum x_0 em E. Seja $\alpha > 0$ tal que

$$\frac{1}{r}\|x_0\| < \alpha < p(x_0).$$

Então $\frac{\|x_0\|}{\alpha} < r$, e isto acarreta que

$$\frac{x_0}{\alpha} \in B(0;r) \subset C.$$

Portanto $p(x_0) \leq \alpha$ (contradição). Logo

$$p(x) \leq \frac{1}{r}\|x\|$$

para todo x em E. Tomando $M = \frac{1}{r}$ segue o resultado.

(iv) Sejam $x, y \in E$ e $\epsilon > 0$. Note que

$$p\left(\frac{x}{p(x)+\epsilon}\right) \overset{(i)}{=} \frac{p(x)}{p(x)+\epsilon} < 1 \overset{(ii)}{\Longrightarrow} \frac{x}{p(x)+\epsilon} \in C.$$

Analogamente, temos que

$$\frac{y}{p(y)+\epsilon} \in C.$$

Como C é convexo, temos

$$t\frac{x}{p(x)+\epsilon} + (1-t)\frac{y}{p(y)+\epsilon} \in C$$

para todo $t \in [0,1]$. Temos

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\epsilon} &= \frac{x}{p(x)+p(y)+2\epsilon} + \frac{y}{p(x)+p(y)+2\epsilon} \\
&= \frac{p(x)+\epsilon}{p(x)+p(y)+2\epsilon}\left(\frac{x}{p(x)+\epsilon}\right) + \\
&+ \left[\frac{p(x)+p(y)+2\epsilon-p(x)-\epsilon}{p(x)+p(y)+2\epsilon}\right]\left(\frac{y}{p(y)+\epsilon}\right) \\
&= \frac{p(x)+\epsilon}{p(x)+p(y)+2\epsilon}\left(\frac{x}{p(x)+\epsilon}\right) + \\
&+ \left[1-\left(\frac{p(x)+\epsilon}{p(x)+p(y)+2\epsilon}\right)\right]\left(\frac{y}{p(y)+\epsilon}\right) \\
&= t\left(\frac{x}{p(x)+\epsilon}\right) + (1-t)\left(\frac{y}{p(y)+\epsilon}\right) \in C,
\end{aligned}$$

com

$$t = \frac{p(x)+\epsilon}{p(x)+p(y)+2\epsilon}.$$

Portanto

$$\left(\frac{1}{p(x)+p(y)+2\epsilon}\right)p(x+y) \overset{(i)}{=} p\left(\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\epsilon}\right) \overset{(ii)}{<} 1.$$

Assim,

$$p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\epsilon$$

para todo x, y em E. Como ϵ é arbitrário, segue que

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

para todo x, y em E.$\square$

Lema 4.2.5 *Se $C \subset E$ é convexo então para todo $z_0 \in D$ o conjunto $D = \{x - z_0; x \in C\}$ é convexo.*

Lema 4.2.6 *Seja $C \subset E$ um convexo aberto não-vazio, $C \neq E$, e seja $x_0 \in E \setminus C$. Então existe $f \in E^*$ tal que $f(x) < f(x_0)$ para todo x em C.*

Demonstração. Se $0 \notin C$, escolha $z_0 \in C$ e considere

$$D = \{x - z_0; x \in C\} \text{ e } y_0 = x_0 - z_0.$$

Temos $y_0 \notin D$ e como $0 \in D$ e D é convexo (pelo Lema 4.2.5), podemos definir o funcional de Minkowski

$$p(x) = \inf\left\{a > 0; \frac{x}{a} \in D\right\}.$$

Defina $G = [y_0]$ e $g(ty_0) = t$ para todo real t. Note que

$$g(x) \leq p(x)$$

para todo x em G. De fato, se $t > 0$, como $x_0 \notin D$, segue da Proposição 4.2.4 (ii) que

$$p(x_0) \geq 1 \text{ e } g(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0).$$

Se $t \leq 0$, então

$$p(tx_0) \geq 0 \geq t = g(tx_0).$$

Logo $g(x) \leq p(x)$ para todo x em G. Assim, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $f : E \to \mathbb{R}$, linear, tal que $f(x) = g(x)$ para todo x em G e

$$f(x) \leq p(x)$$

para todo x em E . Pela Proposição 4.2.4 (iii), existe $M > 0$ tal que

$$f(x) \leq p(x) \leq M\|x\| \text{ para todo } x \in E,$$

e isso garante que f é contínua. Por (ii) da Proposição 4.2.4 temos

$$p(y) < 1$$

para todo $y \in D$; segue então que

$$f(y) \leq p(y) < 1$$

e

$$f(y) < 1 = g(y_0) = f(y_0) = f(x_0 - z_0)$$

para todo $y \in D$. Pela definição de D, temos

$$f(x - z_0) < f(x_0 - z_0)$$

para todo x em C e, conseqüentemente,

$$f(x) < f(x_0)$$

para todo x em C.□

A seguir ∂B denota a fronteira de B e $int(B)$ denota o interior de B. Lembre-se que $\overline{B} = int(B) \cup \partial B$. A notação B^C denota o complementar de B.

Lema 4.2.7 *Se A é um aberto com $A \subset B$, B fechado, então $A \subset int(B)$.*

Demonstração. De fato, se A não estiver contido no $int(B)$, então existe $a \in A \cap \partial B$. Logo, em toda vizinhança de a, existem pontos de B e de B^C. Logo em toda vizinhança de a, existem pontos de A^C pois $A \subset B \Rightarrow B^C \subset A^C$. Como $a \in A$, e pelo que acabamos de provar, segue que toda vizinhança de a possui pontos de A e de A^C. Portanto $a \in \partial A$ (Absurdo), pois A é aberto, ou seja, $A \cap \partial A = \phi$.□

Teorema 4.2.8 *(Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach) Sejam A e B convexos não-vazios e disjuntos em um espaço de Banach real X. Se A é aberto, existem $c \in \mathbb{R}$ e $f \in X^*$ tais que*

$$f(b) \leq c < f(a),$$

para todo $a \in A$ e todo $b \in B$

Demonstração. Seja

$$C = B - A := \{b - a; b \in B \text{ e } a \in A\}.$$

Note que C é aberto, pois

$$C = \bigcup_{b \in B} (\{b\} - A).$$

Perceba ainda que C é convexo, pois se $0 < t < 1$, temos

$$t(b_1 - a_1) + (1 - t)(b_2 - a_2) = (tb_1 + (1 - t)b_2) - (ta_1 + (1 - t)a_2) \in B - A.$$

Assim, C é aberto, convexo e $0 \notin C$, pois $A \cap B = \phi$. Pelo Lema 4.2.6, existe $f \in X^*$ tal que

$$f(x) < f(0)$$

para todo x em C. Logo

$$f(b-a) < f(0)$$

para todo $a \in A$ e $b \in B$; assim

$$f(b) < f(a)$$

para todo $a \in A$ e $b \in B$. Daí,

$$\sup_{b \in B} f(b) \leq \inf_{a \in A} f(a)$$

e escolhemos $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{b \in B} f(b) \leq c \leq \inf_{a \in A} f(a)$$

Note que

$$f^{-1}(A) \subset [c, \infty)$$

Como $[c, \infty)$ é fechado, $f^{-1}(A)$ é aberto, pelo Lema 4.2.7 segue que

$$f^{-1}(A) \subset (c, \infty)$$

e portanto,

$$f(b) \leq c < f(a) \text{ para todo } a \in A \text{ e } b \in B.$$

$\square$

4.3 Caracterização das seqüências fracamente p-somáveis em $E_1 \times \cdots \times E_n$

Lema 4.3.1 *Se $E_1, ..., E_n$ são espaços de Banach, então $\underbrace{(E_1 \times \cdots \times E_n)^*}_{\text{norma do máximo}}$ é isomorfo a $\underbrace{E_1^* \times \cdots \times E_n^*}_{\text{norma da soma}}$ pela aplicação*

$$\Psi : E_1^* \times \cdots \times E_n^* \longrightarrow (E_1 \times \cdots \times E_n)^*$$

dada por

$$(\varphi_1, ..., \varphi_n) \rightarrow \mu, \text{ com } \mu(x_1, ..., x_n) = \varphi_1(x_1) + \cdots + \varphi_n(x_n).$$

Demonstração. Note que Ψ está bem definida. De fato, μ é linear (e claro) é contínua, pois

$$\begin{aligned} \|\mu\| &= \sup_{\|(x_1,...,x_n)\| \leq 1} |\varphi_1(x_1) + \cdots + \varphi_n(x_n)| \qquad (4.4) \\ &\leq \sup_{\|x_1\| \leq 1} |\varphi_1(x_1)| + \cdots + \sup_{\|x_n\| \leq 1} |\varphi_n(x_n)| \\ &= \|\varphi_1\| + \cdots + \|\varphi_n\| \\ &= \|(\varphi_1, ..., \varphi_n)\|_{soma} < \infty. \end{aligned}$$

Note que Ψ é injetiva. De fato, suponha que $(\varphi_1, ..., \varphi_n) \in \ker \Psi$. Então

$$\Psi(\varphi_1, ..., \varphi_n) \equiv 0$$

Assim

$$\varphi_1(x_1) + \cdots + \varphi_n(x_n) = 0,$$

para todo $x \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Tome $(x_1, 0, ..., 0)$, $x_1 \in E_1$. Daí

$$\varphi_1(x_1) = 0 \Rightarrow \varphi_1 \equiv 0.$$

De maneira análoga, segue que $\varphi_j \equiv 0$, $j = 1, ..., n$. Portanto Ψ é injetiva. É fácil ver que Ψ é linear. Segue ainda de (4.4) que

$$\|\Psi(\varphi_1, ..., \varphi_n)\| = \|\mu\| \leq \|(\varphi_1, ..., \varphi_n)\|_{soma}$$

e Ψ é contínua. Usando o Teorema da Aplicação Aberta, só nos resta provar que Ψ é sobrejetiva.

Se $\mu \in (E_1 \times \cdots \times E_n)^*$, defina

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \mu(x, 0, ..., 0) \\
&. \\
&. \\
&. \\
\varphi_n(x) &= \mu(0, ..., 0, x).
\end{aligned}$$

Note que $\varphi_j \in E_j^*$ para cada $j = 1, .., n$ pois cada φ_j é linear e

$$\begin{aligned}
\|\varphi_j\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|\mu(0, 0, ..., x, .., 0, 0)\| \\
&\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|\mu\| \|0, 0, ..., x, .., 0, 0\| \\
&= \|\mu\|.
\end{aligned}$$

Assim, $(\varphi_1, ..., \varphi_n) \in E_1^* \times \cdots \times E_n^*$ e

$$\begin{aligned}
\Psi(\varphi_1, ..., \varphi_n)(x_1, ..., x_n) &= \varphi_1(x_1) + \cdots + \varphi_n(x_n) \\
&= \mu(x_1, 0, ..., 0) + \cdots + \mu(0, ..., 0, x_n) \\
&= \mu(x_1, ..., x_n).
\end{aligned}$$

Logo

$$\Psi(\varphi_1, ..., \varphi_n) = \mu$$

e segue a sobrejetividade.$\square$

Lema 4.3.2 *Sejam $E_1, ..., E_n$ espaços de Banach e considere $E_1 \times \cdots \times E_n$ com a norma do máximo. Então a aplicação*

$$\Phi : \left(l_p^w (E_1) \times \cdots \times l_p^w (E_n)\right) \longrightarrow l_p^w (E_1 \times \cdots \times E_n)$$

dada por

$$\Phi \left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} \right) = \left(x_j^{(1)}, ..., x_1^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}$$

é um isomorfismo algébrico.

Demonstração. Note que Φ está bem definida. De fato, se

$$\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w (E_k), \ k = 1, ..., n$$

e

$$\mu \in (E_1 \times \cdots \times E_n)^*,$$

do Lema 4.3.1 segue que

$$\mu = \Psi (\varphi_1, ..., \varphi_n)$$

com $\varphi_k \in E_k^*$, $k = 1, ..., n$. Assim

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \mu \left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)} \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \Psi (\varphi_1, ..., \varphi_n) \left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)} \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \varphi_1 \left(x_j^{(1)} \right) + \cdots + \varphi_n \left(x_j^{(n)} \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \varphi_1 \left(x_j^{(1)} \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \varphi_n \left(x_j^{(n)} \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \end{aligned}$$

Logo

$$\Phi \left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} \right) \in l_p^w (E_1 \times \cdots \times E_n).$$

Não é difícil provar que Φ é linear. Vamos mostrar que Φ é injetiva e sobrejetiva.

Note que

$$\begin{aligned} \Phi \left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} \right) &= \Phi \left(\left(y_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(y_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} \right) \\ &\Longrightarrow \left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} = \left(y_j^{(1)}, ..., y_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} \\ &\Longrightarrow \left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right) = \left(y_j^{(1)}, ..., y_j^{(n)}\right) \end{aligned}$$

em $E_1 \times \cdots \times E_n$, para cada j. Assim,

$$\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} = \left(y_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}$$

em $l_p^w(E_k)$ para cada k natural; portanto

$$\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) = \left(\left(y_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(y_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)$$

e segue a injetividade. Para verificar a sobrejetividade, considere

$$\left(x_j^{(1)}, ..., x_1^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w\left(E_1 \times \cdots \times E_n\right).$$

Para $k = 1, ..., n$ considere $\varphi_k \in E_k^*$ e tome

$$\mu_k = \Psi\left(0, 0, ...\varphi_k, 0, ..., 0\right) \in \left(E_1 \times \cdots \times E_n\right)^*.$$

Assim,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi_k\left(x_j^{(k)}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\mu_k\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Logo

$$\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w\left(E_k\right)$$

para todo $k = 1, ..., n$. Portanto

$$\Phi\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) = \left(x_j^{(1)}, ..., x_1^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}$$

e Φ é sobrejetiva.$\square$

Referências Bibliográficas

[1] R. Alencar e M. C. Matos, Some classes of multilinear mappings between Banach spaces, Pub. Dep. An. Mat. Univ. Complut. Madrid, 12 (1989).

[2] R. Ash, Measure, Integration, and Functional Analysis, Academic Press, Inc., 1972.

[3] J. Barbosa, A. T. Bernardino, A. Nunes, D. Pellegrino e J. Santos, A new proof of Pietsch Domination Theorem for subhomogeneous mappings, II Enama, 2008.

[4] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, On dominated polynomials between Banach spaces, II Enama, a aparecer.

[5] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, On dominated polynomials between Banach spaces, arXiv:0809.4496.

[6] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, A nonlinear Pietsch Domination Theorem, a aparecer em Monatshefte für Mathematik.

[7] G. Botelho, H.-A. Braunss, H. Junek e D. Pellegrino, Inclusions and coincidences for multiple summing multilinear mappings, Proceedings of the American Mathematical Society **137** (2009), 991-1000.

[8] G. Botelho, C. Michels e D. Pellegrino, New inclusion and coincidence theorems for summing multilinear mappings, Arxiv: 0810.0947, 2008.

[9] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, On dominated polynomials between Banach spaces, ArXiv:0809.4496, 2008.

[10] H. Brezis, Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications, Masson, Paris, 1987.

[11] E. Çaliskan e D.M. Pellegrino, On the multilinear generalizations of the concept of absolutely summing operators, Rocky Mountain Journal of Mathematics **37** (2007), 1137-1154.

[12] A. Defant e K. Floret, Tensor Norms and Operator Ideals, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1993.

[13] J. Diestel, H. Jarchow e A. Tonge, Absolutely Summing Operators, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge, 1995.

[14] V. Dimant, Strongly p-summing multilinear operators, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **278** (2003), 182-193.

[15] S. Geiss, Ideale multilinearer Abbildungen, Diplomarbeit, 1985.

[16] H. Junek, M. C. Matos e D. Pellegrino, Inclusion theorems for absolutely summing holomorphic mappings, Proceedings of the American Mathematical Society **136** (2008), 3983-3991.

[17] K. Lermer, The Grothendieck-Pietsch domination principle for nonlinear summing integral operators, Studia Mathematica. 129 (1998), 97-112.

[18] J. Lindenstrauss e A. Pełczyński, absolutely summing operators in L_p spaces and their applications, Studia Mathematica **29** (1968), 276-326.

[19] M. C. Matos, Nonlinear absolutely summing mappings, Mathematische Nachrichten **258** (2003), 71-89.

[20] M. C. Matos e D. Pellegrino, Fully summing mappings between Banach spaces. Studia Mathematica **178** (2007), 47-61.

[21] M. C. Matos, Absolutely summing holomorphic mapping, Anais da Academia Brasileira de Ciência **68** (1996), 1-13.

[22] B. Mitjagin e A. Pełczyński, Nuclear operators and approximative dimension, Proc. of ICM, Moscow (1966), 366-372.

[23] D. Pérez-García, Operadores multilineales absolutamente sumantes, Tese de Doutorado, Universidad Complutense de Madrid, 2003.

[24] A. Pietsch, Absolut p–summierende Abbildungen in normieten Räumen, Studia Mathematica **28** (1967), 333- 353.

[25] A. Pietsch, Ideals of multilinear functionals, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in theoretical Physics, 185-199, Teubner-Texte, Leipzig, 1983.

[26] R. Ryan, Introduction to tensor products of Banach Spaces, Springer Verlag, 2002.

[27] B. Schneider, On absolutely p-summing and related multilinear mappings, Wiss. Z. Brandenburg. Landeshochsch. 35 (1991), 105–117.