SÉRIES E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

resumos e exercícios resolvidos – parte 3 de 3

1 Definições, propriedades e exemplos básicos

1.1 Definições e propriedades

Uma **equação diferencial** é uma equação que envolve uma função e suas derivadas:

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Uma **equação diferencial ordinária (EDO)** é aquela em que a função depende apenas de uma variável independente. Por exemplo, $y'' - 13y' + 10y = x - \cos x$ é uma EDO. Uma **equação diferencial parcial (EDP)** é aquela em que a função depende de duas ou mais variáveis. Por exemplo, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ é uma EDP.

A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada da equação. Por exemplo,

- $y' - x^5 y + x^6 = 0$ é uma equação diferencial de 1^a ordem
- $x^5 y''' + x^2 y'' - 4xy = e^x$ é uma equação diferencial de 3^a ordem
- $(y'')^3 - 3y'y = x^{10} + \cos x + 2$ é uma equação diferencial de 2^a ordem

Uma **solução** de uma equação diferencial é uma função $y = f(x)$ que satisfaz a equação identicamente para todo valor da variável independente x. Por exemplo, $y = \cos x$ é uma solução da equação diferencial $y'' + y = 0$. No entanto, $y = e^x$ não é solução dessa equação porque $y'' + y = 2e^x \neq 0$.

O conjunto de todas as soluções de uma equação diferencial é denominada **solução geral** da equação. Geralmente, a solução geral é uma combinação linear de funções que são soluções da equação. Por exemplo, $y = \cos 5x$ e $y = \operatorname{sen} 5x$ são soluções da equação $y'' + 25y = 0$ e é possível mostrar que a solução geral é uma combinação linear dessas funções: $y = C_1 \cos 5x + C_2 \operatorname{sen} 5x$, onde C_1 e C_2 são constantes genéricas.

Uma equação diferencial juntamente com condições auxiliares sobre a função e suas derivadas para determinado valor da variável independente constitui um **problema de valor inicial**. Por exemplo, $y'' + 2y' = e^x$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 1$ é um problema de valor inicial.

A **forma padrão** de uma equação diferencial de primeira ordem é $y' = f(x, y)$ e a **forma diferencial** é $M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$. É possível transformar uma forma na outra se utilizarmos a relação $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Por exemplo, a equação $x^3 y' - y^2 = 0$ possui a seguinte forma padrão: $y' = \frac{y^2}{x^3}$ que é o mesmo que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2}{x^3}$. Logo, sua forma diferencial é $x^3\,\mathrm{d}y - y^2\,\mathrm{d}x = 0$.

1.2 Equações Diferenciais de Primeira Ordem Separáveis

Uma equação diferencial de primeira ordem separável é da forma $A(x)\,\mathrm{d}x + B(y)\,\mathrm{d}y = 0$ ou da forma $y' = g(x)h(y)$. Sua solução é dada implicitamente por $\int A(x)\,\mathrm{d}x + \int B(y)\,\mathrm{d}y = C$, onde C é uma constante arbitrária. Por exemplo, $4x^3\,\mathrm{d}x + \cos y\,\mathrm{d}y = 0$ é uma equação separável, cuja solução é dada por $\int 4x^3\,\mathrm{d}x + \int \cos y\,\mathrm{d}y = C$, ou seja, $x^4 + \operatorname{sen} y = C$.

1.3 Equações Diferenciais de Primeira Ordem Lineares

São equações da forma $y' + p(x)y = q(x)$. Por exemplo, $y' - 2xy = x$ é uma equação linear de primeira ordem.

Para resolver esse tipo de equação, multiplicamos os dois lados da equação por $I(x) = e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ que é denominado *fator integrante*. Depois, calculamos outra integral para obter a solução da equação dada como sendo igual a

$$y = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right].$$

1.4 Equações Diferenciais de Primeira Ordem Exatas

Uma equação diferencial $M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ é exata se $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$. Por exemplo, $3x^2\operatorname{sen}(y^2) + 2x^3y\cos(y^2) = 0$ é uma equação exata.

A solução desse tipo de equação é dada implicitamente por uma equação $g(x,y) = C$, C constante, que pode ser obtida através do cálculo de uma integral na variável x, outra em y:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

1.5 Equações Diferenciais Homogêneas Lineares de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes

É toda equação da forma $ay'' + by' + cy = 0$ onde a, b, c são constantes reais e $a \neq 0$. A esse tipo de equação corresponde uma equação do 2^o grau $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ que é denominada equação característica. Por exemplo, $3y'' + 7y' - 18 = 0$ é uma equação diferencial homogênea linear de segunda ordem com coeficientes constantes cuja equação característica é $3\lambda^2 + 7\lambda - 18 = 0$.

A solução geral desse tipo de equação diferencial é obtida através das raízes λ_1 e λ_2 da equação característica. Devemos considerar três casos:

- Caso 1: Se λ_1 e λ_2 são reais e distintos, então a solução geral é $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$, onde C_1 e C_2 são constantes.

- Caso 2: Se λ_1 e λ_2 são reais e iguais, então a solução geral é $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2xe^{\lambda_1 x}$, onde C_1 e C_2 são constantes.

- Caso 3: Se $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$ forem números complexos, $i = \sqrt{-1}$, então a solução geral é $y = C_1e^{ax}\cos bx + C_2e^{ax}\operatorname{sen} bx$, onde C_1 e C_2 são constantes.

Observação 1: *A unidade imaginária i é a raiz quadrada de -1. Como consequência disso, podemos calcular as potências $i^1 = i$, $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ e, a partir daí, as potências se repetem de 4 em 4: $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$, $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$, $i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$, $i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$, ... Resumindo, as potências de i, $a_k = i^k$, formam a seguinte sequência:*

$$(i, -1, -i, 1, \quad i, -1, -i, 1, \quad i, -1, -i, 1, \quad i, -1, -i, 1, \quad i, -1, -i, 1, \quad i, -1, -i, 1, \dots)$$

Do estudo das séries de potências, sabemos que a série de MacLaurin da função exponencial é

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

Substituindo $x = i\theta$ nessa série, obtemos:

$$e^{i\theta} = 1 + x + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \frac{(i\theta)^8}{8!} + \dots$$

$$\Rightarrow e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \frac{i^7\theta^7}{7!} + \frac{i^8\theta^8}{8!} + \ldots$$

$$\Rightarrow e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^8}{8!} + \ldots$$

$$\Rightarrow e^{i\theta} = \Bigg(\underbrace{1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} + \ldots}_{\cos\theta}\Bigg) + i\Bigg(\underbrace{\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots}_{\operatorname{sen}\theta}\Bigg)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}\ ,$$

para todo número real θ, e daí, obtemos também que

$$e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a(\cos b + \operatorname{sen} b).$$

E assim, ficamos sabendo como calcular qualquer exponencial em que o expoente seja um número complexo, como por exemplo:

- $e^{3+5i} = e^3(\cos 5 + i\operatorname{sen} 5)$ *(OBS.: a unidade padrão de medida de ângulos é o* **radiano***)*
- $e^{\frac{\pi i}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $e^{(2-9i)x} = e^{2x}(\cos 9x + i\operatorname{sen} 9x)$, *etc.*

Observação 2: Se a equação caracteística de uma equação diferencial homogênea linear com coeficientes constantes possuir raízes complexas $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$, então a solução geral (ou parte dela) pode ser escrita na forma

$$c_1e^{ax}\cos bx + c_2e^{ax}\operatorname{sen} bx$$

o que é equivalente a escrevê-la na forma de combinação linear de exponencias complexas

$$C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} = C_1e^{(a+bi)x} + C_2e^{(a-bi)x}.$$

1.6 Equações Diferenciais Homogêneas Lineares de Ordem n com Coeficientes Constantes

É uma equação da forma $a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$ onde a_j é constante com $j = 0, 1, \cdots, n$ e $a_n \neq 0$. A equação característica dessa equação é definida por $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$.

Por exemplo, $y^{(4)} - 3y''' + 2y'' - 5y = 0$ é uma equação diferencial homogênea linear de 4^a ordem com coeficientes constantes cuja equação característica é $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2 - 5 = 0$

A solução geral desse tipo de equação diferencial é obtida através das raízes $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ da equação característica. Devemos considerar os seguintes casos:

- Caso 1: Se λ_k for uma raiz real simples (não repetida), então a essa raiz corresponde uma parcela do tipo $C_ke^{\lambda_k x}$ da solução geral.
- Caso 2: Se λ_k for uma raiz real de multiplicidade m (ou seja, aparece repetida m vezes), então a essa raiz corresponde uma combinação linear das funções $e^{\lambda_k x}$, $xe^{\lambda_k x}$, $x^2e^{\lambda_k x}$, $\cdots$, $x^{m-1}e^{\lambda_k x}$.
- Caso 3: A cada par de raízes complexas $a + bi$ e $a - bi$ sem repetição, corresponde uma combinação linear das funções $e^{ax}\cos bx$ e $e^{ax}\operatorname{sen} bx$.

- Caso 4: Se $a + bi$ e $a - bi$ for um par de raízes complexas repetidas m vezes, então a esse par de raízes corresponde uma combinação linear das funções $e^{ax}\cos bx$, $xe^{ax}\cos bx$, $\cdots$, $x^{m-1}e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\operatorname{sen} bx$, $xe^{ax}\operatorname{sen} bx$, $\cdots$, $x^{m-1}e^{ax}\operatorname{sen} bx$.

Por exemplo, se as raízes da equação característica de uma equação diferencial linear homogênea de coeficientes constantes de ordem 8 forem $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -3$, $\lambda_4 = -3$, $\lambda_5 = -2 + 5i$, $\lambda_6 = -2 - 5i$, $\lambda_7 = 4 + i$, $\lambda_8 = 4 - i$, então a solução geral dessa equação é

$$y = C_1e^{4x} + C_2e^{-3x} + C_3xe^{-3x} + C_4x^2e^{-3x} + C_5e^{-2x}\cos 5x + C_6e^{-2x}\operatorname{sen} 5x + C_7e^{4x}\cos x + C_8e^{4x}\operatorname{sen} x.$$

2 Exercícios resolvidos

1) Determine a solução da equação $y'\operatorname{tg} x = y - 1$.

Solução: Dividindo por $\operatorname{tg} x$, obtemos: $y' = \frac{y}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, ou seja, $y' - \operatorname{cotg} xy = -\operatorname{cotg} x$ que é uma equação no formato $y' + p(x)y = q(x)$. Logo, é linear de primeira ordem. O fator integrante é

$$I(x) = e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} = e^{\int(-\operatorname{cotg} x)\,\mathrm{d}x} = e^{-\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x} = e^{-\ln \operatorname{sen} x} = e^{\ln(\operatorname{sen} x)^{-1}} = (\operatorname{sen} x)^{-1} = \operatorname{cossec} x.$$

Multiplicando a equação por $\operatorname{cossec} x$, obtemos $\operatorname{cossec} xy' - \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} xy = -\operatorname{cotg} x \operatorname{cossec} x$ que é equivalente a $(y \operatorname{cossec} x)' = -\operatorname{cotg} x \operatorname{cossec} x \Rightarrow y \operatorname{cossec} x = \int(-\operatorname{cotg} x \operatorname{cossec} x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow y \operatorname{cossec} x = \operatorname{cossec} x + C \Rightarrow y = \frac{\operatorname{cossec} x + C}{\operatorname{cossec} x} \Rightarrow y = 1 + \frac{C}{\operatorname{cossec} x} \Rightarrow \boxed{y = 1 + C\operatorname{sen} x}$, onde C é uma constante.

Observação: Podemos verificar se a resolução está mesmo correta substituindo $y = 1 + C\operatorname{sen} x$ na equação dada: $y'\operatorname{tg} x = y - 1 \Rightarrow (C\cos x)\operatorname{tg} x = (1 + C\operatorname{sen} x) - 1 \Rightarrow C\cancel{\cos x}\frac{\operatorname{sen} x}{\cancel{\cos x}} = C\operatorname{sen} x$ que é uma sentença verdadeira.

2) Resolva $x\ln x\,\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x$.

Solução: Dividindo a equação por y, e também por $x\ln x$, obtemos:

$$x\ln x\,\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$$

que é uma equação de variáveis separáveis. Integrando dos dois lados da equação:

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \ln y = \ln\ln x + c \Rightarrow y = e^{\ln\ln x + c} \Rightarrow y = e^{\ln\ln x}\cdot e^c \Rightarrow y = \ln x \cdot C.$$

Portanto, a solução encontrada é $\boxed{y = C\ln x}$, onde C é uma constante.

Observação: Verificando se a solução encontrada está correta. Primeiramente, escrevendo a equação na forma padrão: $x\ln x\,\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x\ln x}$, ou seja, $y' = \frac{y}{x\ln x}$. Agora, é só substituir a solução encontrada:

$$y' = \frac{y}{x\ln x} \Rightarrow (C\ln x)' = \frac{C\ln x}{x\ln x} \Rightarrow \frac{C}{x} = \frac{C\cancel{\ln x}}{x\cancel{\ln x}}$$

que é uma sentença verdadeira.

3) Dê exemplo de uma equação diferencial linear homogênea e coeficientes constantes que possua as funções $y = e^{-x}$, $y = e^{3x}$ e $y = e^{5x}$ como soluções particulares.

Solução: Essas soluções são da forma $y = e^{\lambda_k x}$, $\lambda_k \in \{-1,\ 3,\ 5\}$. Essas são raízes da equação $(\lambda - (-1))(\lambda - 3)(\lambda - 5) = 0$ que é o mesmo que $(\lambda + 1)(\lambda^2 - 8\lambda + 15) = 0$, ou seja,

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 7\lambda + 15 = 0.$$

Essa última equação pode ser pensada como sendo a equação característica de uma equação diferencial linear homogênea de coeficientes constantes que é

$$y''' - 7y'' + 7y' + 15y = 0$$

e esse é o exemplo procurado.

4) Dê exemplo de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem e coeficientes constantes que admita as soluções particulares $y = e^{2x}$ e $y = e^{-5x}$.

Solução: À função $y = e^{2x}$ corresponde um fator $(\lambda - 2)$ da equação característica, e à função $y = e^{-5x}$ corresponde $(\lambda - (-5)) = (\lambda + 5)$. Portanto, a equação característica é $(\lambda - 2)(\lambda + 5) = 0$ que equivale a $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$. A partir daí, chegamos à conclusão de que a equação diferencial procurada é $y'' + 3y' - 10y = 0$.

5) Dê exemplo de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem e coeficientes constantes que admita as soluções particulares $y = e^{-5x}\cos 2x$ e $y = e^{-5x}\operatorname{sen} 2x$.

Solução: Ao par de funções $e^{-5x}\cos 2x$ e $e^{-5x}\operatorname{sen} 2x$ corresponde as raízes $\lambda_1 = -5 + 2i$ e $\lambda_2 = -5 - 2i$ da equação característica. Logo, a equação característica é $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$, ou seja, $(\lambda - (-5 + 2i))(\lambda - (-5 - 2i)) = 0$ que é equivalente a $((\underbrace{\lambda + 5}_{(a}) - \underbrace{2i}_{-b)})((\underbrace{\lambda + 5}_{(a}) + \underbrace{2i}_{+b)}) = 0$ $\Rightarrow \underbrace{(\lambda + 5)^2 - (2i)^2}_{a^2 - b^2} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 10\lambda + 25 \underbrace{-4i^2}_{+4} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 10\lambda + 29 = 0$. Concluímos assim que a equação diferencial procurada é $y'' + 10y' + 29y = 0$.

6) Dê exemplo de uma equação diferencial linear homogênea de quarta ordem e coeficientes constantes que possua a solução geral

$$y = C_1 e^x \cos 3x + C_2 e^x \operatorname{sen} 3x + C_3 e^{-4x} \cos x + C_4 e^{-4x} \operatorname{sen} x,$$

com C_1, C_2, C_3, C_4 constantes genéricas.

Solução: Podemos associar às funções $e^x \cos 3x$ e $e^x \operatorname{sen} 3x$ as raízes complexas $\lambda_1 = 1 + 3i$ e $\lambda_2 = 1 - 3i$ de uma equação característica e associar às funções $e^{-4x}\cos x$ e $e^{-4x}\operatorname{sen} x$ as raízes $\lambda_3 = -4 + i$ e $\lambda_4 = -4 - i$. Esses valores λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4 são raízes da equação $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4) = 0$, ou seja,

$$(\lambda - 1 - 3i)(\lambda - 1 + 3i)(\lambda + 4 - i)(\lambda + 4 + i) = 0.$$

Efetuando todos os produtos indicados e levando em consideração que $i^2 = -1$, obtemos que a equação anterior é o mesmo que

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 10)(\lambda^2 + 8\lambda + 17) = 0$$

que é equivalente a

$$\lambda^4 + 16\lambda^3 + 98\lambda^2 + 272\lambda + 289 = 0.$$

Essa última equação pode ser interpretada como sendo a equação característica da seguinte equação diferencial linear homogênea de coeficientes constantes

$$y^{(4)} + 16y''' + 98y'' + 272y' + 289y = 0,$$

que é o exemplo procurado.

Observação: Se $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$, então $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \lambda_1\lambda - \lambda_2\lambda + \lambda_1\lambda_2 = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = \lambda 2 - (a + \cancel{bi} + a - \cancel{bi})\lambda + (a + bi)(a - bi) = \lambda^2 - 2a\lambda + (a^2 + \cancel{abi} - \cancel{abi} - b^2 i^2) = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - (-1)b^2 = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2$. Portanto,

$$\boxed{(\lambda - a - bi)(\lambda - a + bi) = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2}.$$

Por exemplo, $(\lambda - 1 - 3i)(\lambda - 1 + 3i) = \lambda^2 - (2 \cdot 1)\lambda + (1^2 + 3^2) = \lambda^2 - 2\lambda + 10$.

3 Mais exercícios resolvidos (da 3^a lista de exercícios)

33-h) Verifique se a função $y = x^{-2} \ln x$ é solução da equação diferencial $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$.

Solução: Calculamos as derivadas primeira e segunda:

- $y' = -2x^{-3} \ln x + x^{-2} \cdot \frac{1}{x} = -2x^{-3} \ln x + x^{-3} = x^{-3}(1 - 2 \ln x)$
- $y'' = -3x^{-4}(1 - 2 \ln x) + x^{-3}(-\frac{2}{x}) = -3x^{-4}(1 - 2 \ln x) - 2x^{-4} = x^{-4}(-5 + 6 \ln x)$

Substituímos y, y' e y'' na equação dada e simplificamos:

- $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0 \Rightarrow x^2 \cdot x^{-4}(-5 + 6 \ln x) + 5x \cdot x^{-3}(1 - 2 \ln x) + 4x^{-2} \ln x = 0$

  $\Rightarrow \cancel{-5x^{-2}} + \cancel{6x^{-2} \ln x} + \cancel{5x^{-2}} - \cancel{10x^{-2} \ln x} + \cancel{4x^{-2} \ln x} = 0 \Rightarrow \quad 0 = 0$

que é uma sentença verdadeira. Logo, y é solução da equação diferencial dada.

38) A função $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^2 e^x$ é solução de uma equação diferencial. Determine os valores das constantes C_1 e C_2 de modo que $y(1) = 1$ e $y'(1) = -1$.

Solução: Calculamos a derivada y' e os valores de $y(1)$ e $y'(1)$:

- $y' = C_1 e^x + C_2(e^x + xe^x) + (2xe^x + x^2 e^x)$,
- $y(1) = eC_1 + eC_2 + e = 1$,

- $y'(1) = eC_1 + 2eC_2 + 3e = -1$.

Da primeira equação, obtemos: $C_1 = \frac{1}{e} - C_2 - 1$. Daí, substituímos esse valor na segunda equação: $e(\frac{1}{e} - C_2 - 1) + 2eC_2 + 3e = -1$, ou seja, $1 - eC_2 - e + 2eC_2 + 3e = -1$. Concluímos assim que $C_2 = \frac{-2-2e}{e} = \frac{-2(e+1)}{e}$ e que $C_1 = \frac{1}{e} + \frac{2(e+1)}{e} - 1 = \frac{1+2e+2-e}{e} = \frac{e+3}{e}$.

42-d) Resolva o problema de valor inicial: $y' = \dfrac{x^2y - y}{y+1}$, $y(3) = -1$.

Solução: Substituindo y' por $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, temos $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x^2y - y}{y+1} = (x^2-1)\cdot\dfrac{y}{y+1} \Rightarrow \frac{y+1}{y}\,\mathrm{d}y = (x^2-1)\,\mathrm{d}x$ $\Rightarrow (1 + \frac{1}{y})\,\mathrm{d}y - (x^2-1)\,\mathrm{d}x = 0$ que é uma equação de primeira ordem com variáveis separáveis. Calculamos a integral indefinida dos dois membros dessa equação e obtemos $\int(1+\frac{1}{y})\,\mathrm{d}y - \int(x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = C$, onde C é qualquer constante. Calculamos as integrais que aparecem na equação e obtemos $(y + \ln|y|) - (\frac{x^3}{3} - x) = C$ e, por fim, substituímos $x = 3$ e $y = -1$ nessa última equação: $-1 + \ln|-1| - (\frac{3^3}{3} - 3) = C$, ou seja, $C = -1 + 0 - 9 + 3 = -7$. Portanto, a solução procurada é dada implicitamente pela equação $\boxed{y + \ln|y| - \frac{x^3}{3} + x = -7}$.

44-c) Mostre que $I(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ é um fator integrante da equação $y\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}x = 0$ e resolva-a.

Solução: Multiplicando a equação dada pelo fator integrante, obtemos:

$$\underbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}_{N(x,y)}\,\mathrm{d}y + \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{M(x,y)}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Sejam $M = \frac{x}{x^2+y^2}$ e $N = \frac{y}{x^2+y^2}$. Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, temos $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ e isso mostra que $I(x,y)$ é um fator integrante e que a equação obtida depois da multiplicação por I é exata. Vamos determinar sua solução que é definida implicitamente pela equação $g(x,y) = 0$, onde $\frac{\partial g}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = N$.

Temos que

$$g(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + h(y).$$

Daí, derivando com relação a y, obtemos $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right) + h'(y) = N = \frac{y}{x^2+y^2}$. Logo, $h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = C =$ constante. Portanto, $g(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C$ e daí a solução da equação diferencial é $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C = 0$ que é o mesmo que $\ln(x^2+y^2) = -2C$ que equivale a $x^2+y^2 = e^{-2C} = c$. Desse modo, a solução da equação diferencial é dada implicitamente por $x^2+y^2 = c$, onde c é uma constante genérica.

47-j) Resolver a equação $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$.

Solução: A equação característica dessa equação é: $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$. O termo constante dessa equação é -2 e os divisores dele são $\{1, -1, 2, -2\}$. Essas são as possíveis **raízes inteiras** dessa equação. Por substituição direta na equação, obtemos que as raízes são $1, -1$ e 2. Daí, concluímos que a solução geral da equação diferencial é

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x},$$

com C_1, C_2, C_3 constantes.

Observação: A partir dessa solução geral, podemos calcular facilmente as derivadas $y' = C_1e^x - C_2e^{-x} + 2C_3e^{2x}$, $y'' = C_1e^x + C_2e^{-x} + 4C_3e^{2x}$ e $y''' = C_1e^x - C_2e^{-x} + 8C_3e^{2x}$ que podem ser substituídas na equação diferencial dada: $y''' - 2y'' + y' - 2y = C_1e^x - C_2e^{-x} + 8C_3e^{2x} - 2(C_1e^x + C_2e^{-x} + 4C_3e^{2x}) + (C_1e^x - C_2e^{-x} + 2C_3e^{2x}) - 2(C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}) = 0$. Simplificando, obtemos $0 = 0$, o que é verdadeiro. Logo, a solução geral encontrada está correta.

48) Determine a solução geral $y(x)$ de uma equação diferencial de sexta ordem linear homogênea, com coeficientes reais, sabendo que uma solução é $x^2e^{7x}\cos 5x$. Qual é a equação diferencial a que esta questão se refere?

Solução: Com esse tipo de equação, se $x^2e^{7x}\cos 5x$ for solução, então também são soluções: $x^2e^{7x}\,\mathrm{sen}\,5x$, $xe^{7x}\cos 5x$, $xe^{7x}\,\mathrm{sen}\,5x$, $e^{7x}\cos 5x$ e $e^{7x}\,\mathrm{sen}\,5x$. Logo, essas 6 soluções (linearmente independentes) formam a solução geral da equação diferencial linear homogênea de 6^a ordem dada:

$$y = C_1x^2e^{7x}\cos 5x + C_2x^2e^{7x}\,\mathrm{sen}\,5x + C_3xe^{7x}\cos 5x + C_4xe^{7x}\cos 5x + C_5e^{7x}\cos 5x + C_6e^{7x}\cos 5x,$$

onde C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 e C_6 são quaisquer constantes.

Agora, para saber qual é a equação diferencial a que o problema se refere, observamos inicialmente que podemos associar a cada uma das seis soluções listadas uma raiz da sua equação característica:

$$\lambda_1 = 7 + 5i,\ \lambda_2 = 7 - 5i,\ \lambda_3 = 7 + 5i,\ \lambda_4 = 7 - 5i,\ \lambda_5 = 7 + 5i,\ \lambda_6 = 7 - 5i.$$

Concluímos então que a equação característica é dada por

$$\underbrace{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}_{\lambda^2 - 14\lambda + 74}\underbrace{(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)}_{\lambda^2 - 14\lambda + 74}\underbrace{(\lambda - \lambda_5)(\lambda - \lambda_6)}_{\lambda^2 - 14\lambda + 74} = 0,$$

ou seja,

$$\lambda^6 - 42\lambda^5 + 810\lambda^4 - 8960\lambda^3 + 59940\lambda^2 - 229992\lambda + 405224 = 0.$$

a equação diferencial linear homogênea de sexta ordem procurada é

$$y^{(6)} - 42y^{(5)} + 810y^{(4)} - 8960y''' + 59940y'' - 229992y' + 405224y = 0.$$

49) Resolva $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 4\dfrac{d^3y}{dx^3} - 5\dfrac{d^2y}{dx^2} + 36\dfrac{dy}{dx} - 36y = 0$ sabendo que uma solução é xe^{2x}.

Solução: Sendo xe^{2x} uma solução, temos que e^{2x} também é solução; logo, a equação característica

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 5\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$$

admite a raiz dupla (repetida) $\lambda = 2$. Isso significa que $p(\lambda)$ é divisível por $(\lambda - 2)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$. Efetuando essa divisão, obtemos como quociente $\lambda^2 - 9$.

$$\begin{array}{r|l}
\cancel{\lambda^4} + \cancel{-4\lambda^3} - 5\lambda^2 + 36\lambda - 36 & \lambda^2 - 4\lambda + 4 \\ \cline{2-2}
\cancel{-\lambda^4} + \cancel{4\lambda^3} - 4\lambda^2 & \lambda^2 - 9 \\ \cline{1-1}
\cancel{-9\lambda^2} + \cancel{36\lambda} - \cancel{36} & \\
\cancel{9\lambda^2} \cancel{-36\lambda} + \cancel{36} & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Resolvendo a equação $\lambda^2 - 9 = 0$, obtemos $\lambda = \pm 3$. Concluímos assim que as raízes da equação característica são $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$ e $\lambda_4 = -3$ e que a solução geral da equação diferencial é

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{-3x},$$

onde C_1, C_2, C_3 e C_4 são quaisquer constantes .

50) Encontre a solução geral da equação

$$\frac{d^6y}{dx^6} + \frac{d^5y}{dx^5} - 13\frac{d^4y}{dx^4} - 17\frac{d^3y}{dx^3} - 52\frac{d^2y}{dx^2} + 16\frac{dy}{dx} + 64y = 0$$

sabendo que uma solução particular é $11e^{\frac{-x}{2}}\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{15}x}{2})$.

Solução: Como $11e^{\frac{-x}{2}}\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{15}x}{2})$ é solução particular, temos que $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2}$ é raiz da sua equação característica. Daí, temos que $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{15}}{2}$ também é raiz dessa mesma equação.

Nesse caso, a equação caractística é $p(\lambda) = \lambda^6 + \lambda^5 - 13\lambda^4 - 17\lambda^3 - 52\lambda^2 + 16\lambda + 64 = 0$. Como λ_1 e λ_2 são raízes de $p(\lambda) = 0$, temos que $p(\lambda)$ é divisível por $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$. Como $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \cancel{i\frac{\sqrt{15}}{2}} - \frac{1}{2} - \cancel{i\frac{\sqrt{15}}{2}} = -1$ e $\lambda_1\lambda_2 = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2})(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{15}}{2}) = (-\frac{1}{2})^2 - (i\frac{\sqrt{15}}{2})^2 = \frac{1}{4} - (-1)\frac{15}{4} = \frac{16}{4} = 4$ temos que $p(\lambda)$ é divisível por $\lambda^2 + \lambda + 4$. Efetuamos a divisão a seguir e obtemos um quociente igual a $\lambda^4 - 17\lambda^2 + 16$.

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{\lambda^6} + \cancel{\lambda^5} - 13\lambda^4 - 17\lambda^3 - 52\lambda^2 + 16\lambda + 64 & \lambda^2 + \lambda + 4 \\
\hline
\cancel{-\lambda^6} - \cancel{\lambda^5} - 4\lambda^4 & \lambda^4 - 17\lambda^2 + 16 \\
\cancel{-17\lambda^4} - \cancel{17\lambda^3} - 52\lambda^2 & \\
\cancel{17\lambda^4} + \cancel{17\lambda^3} + 68\lambda^2 & \\
\cancel{16\lambda^2} + \cancel{16\lambda} + \cancel{64} & \\
\cancel{-16\lambda^2} - \cancel{16\lambda} - \cancel{64} & \\
0 &
\end{array}$$

Por fim, determinamos as raízes da equação biquadrada $\lambda^4 - 17\lambda^2 + 16 = 0$. Para isso, fazemos uma mudança de variável $\lambda^2 = \alpha$ e obtemos a equação do segundo grau: $\alpha^2 - 17\alpha + 16 = 0$ cujas raízes são $\alpha = 1$ ou $\alpha = 16$. Logo, $\lambda^2 = 1$ ou $\lambda^2 = 16$ e, a partir daí, obtemos $\lambda = \pm 1$ ou $\lambda = \pm 4$. Uma vez obtidas todas as raízes da equação característica $p(\lambda) = 0$, podemos escrever a solução geral da equação diferencial dada:

$$y = C_1 e^{x} + C^2 e^{-x} + C_3 e^{4x} + C_4 e^{-4x} + C_5 e^{\frac{-x}{2}}\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{15}x}{2}) + C_6 e^{\frac{-x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{15}x}{2}),$$

onde C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 e C_6 são constantes genéricas.