SÉRIES E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

resumos e exercícios resolvidos – parte 1 de 3

1 Definições, propriedades e exemplos básicos

1.1 Definições e propriedades

Uma sequência de números reais é uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ na qual o valor $f(k)$ costuma ser denotado na forma u_k (ou a_k). Nesse caso, o número $u_k = f(k)$ é o termo geral da sequência. Se existir e for finito o limite $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = \lim\limits_{k\to\infty} f(k)$, a sequência é chamada convergente. Se esse limite não existir ou não for finito, então a sequência é divergente.

A soma dos termos de uma sequência $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ é denominada uma série numérica e costuma ser denotada por $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$. A soma parcial de uma série é denotada por $S_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$. Se o limite da sequência das somas parciais $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ existir e for finito, então a série é chamada convergente. Se $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ não existir ou não for finito, a série recebe o nome de divergente.

- A convergência ou divergência de uma série não se altera se acrescentarmos ou retirarmos um número finito de termos: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ e $\sum\limits_{k=r}^{\infty} u_k$, $r \geq 1$, são ambas convergentes ou ambas divergentes.
- A convergência ou divergência também não se altera se multiplicarmos ou dividirmos a série por uma constante não nula.

Diversos testes de convergência são apresentados de forma resumida em uma tabela na última página deste texto.

1.2 Algumas séries conhecidas

As séries do tipo $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots$ são chamadas *séries geométricas* e são convergentes para $S = \frac{a}{1-r}$ se $|r| < 1$ e são divergentes se $|r| \geq 1$. Em particular, temos os seguintes exemplos:

- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots$ que é divergente ($r = 2$).
- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{k-1}} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{2^5} + \ldots$ que é convergente ($r = \frac{1}{2}$). Sua soma é igual a $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.
- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1} = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{3^5} + \ldots$ que é convergente ($r = \frac{1}{3}$). Sua soma é igual a $S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{2}{7}\right)^k = \frac{2}{7} - \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^3 - \left(\frac{2}{7}\right)^4 + \left(\frac{2}{7}\right)^5 - \dots$ que é convergente ($r = -\frac{2}{7}$).
  Sua soma é igual a $S = \frac{\frac{2}{7}}{1+\frac{2}{7}} = \frac{2}{9}$.

As séries do tipo $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ são chamadas *p-séries* (ou *séries p*) e são convergentes se $p > 1$ e divergentes se $p \leq 1$. Em particular, quando $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$, $p = \frac{1}{2}$ e $p = \frac{1}{3}$ obtemos os seguintes exemplos:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ que é a *série harmônica* e é divergente ($p = 1$).

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$ que é convergente ($p = 2$).

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots$ que é convergente ($p = 3$).

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots$ que é divergente ($p = \frac{1}{2}$).

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \dots$ que é divergente ($p = \frac{1}{3}$).

2 Exercícios resolvidos

1) Escreva os 5 primeiros termos da sequência recorrente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definida por

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{k+1} = \frac{1}{1+x_k}.$$

Sabendo que essa sequência é convergente, determine seu limite.

Solução: Substituindo $k = 1, 2, 3, 4$ em x_{k+1}, obtemos:

- $k = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{1+x_1} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

- $k = 2 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{1+x_2} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$

- $k = 3 \Rightarrow x_4 = \frac{1}{1+x_3} = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{5}{8}$

- $k = 4 \Rightarrow x_5 = \frac{1}{1+x_4} = \frac{1}{1+\frac{5}{8}} = \frac{8}{13}$

Desse modo, obtivemos que a sequência possui os seguintes termos:

$$(\frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{3}{5}, \ \frac{5}{8}, \ \frac{8}{13}, \ \dots)$$

Supondo $\lim_{k\to\infty} x_k = L$, temos $\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = L$. Calculando limites, obtemos $\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{1+x_k}\right)$, ou seja, $L = \frac{1}{1+L}$. Resolvendo essa equação anterior, encontramos

$$L(1+L) = 1 \Rightarrow L^2 + L - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Concluímos então que a sequência converge para $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

2) Escreva os 6 primeiros termos da sequência recorrente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definida por

$$x_1 = 1, \quad x_{k+1} = \frac{2x_k}{3} + \frac{7}{3x_k^2},$$

e sabendo que essa sequência é convergente, determine seu limite.

Solução: Substituindo $k = 1, 2, 3, 4, 5$ em x_{k+1}, obtemos:

- $k = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{2x_1}{3} + \frac{7}{3x_1^2} = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = \frac{9}{3} = 3$
- $k = 2 \Rightarrow x_3 = \frac{2x_2}{3} + \frac{7}{3x_2^2} = \frac{2\cdot 3}{3} + \frac{7}{3\cdot 3^2} = \frac{61}{27} = 2,259259$
- $k = 3 \Rightarrow x_4 = \frac{2x_3}{3} + \frac{7}{3x_3^2} = \frac{2\cdot 2,259259}{3} + \frac{7}{3\cdot 2,259259^2} = 1,963307$
- $k = 4 \Rightarrow x_5 = \frac{2x_4}{3} + \frac{7}{3x_4^2} = \frac{2\cdot 1,963307}{3} + \frac{7}{3\cdot 1,963307^2} = 1,914212$
- $k = 5 \Rightarrow x_6 = \frac{2x_5}{3} + \frac{7}{3x_5^2} = \frac{2\cdot 1,914212}{3} + \frac{7}{3\cdot 1,914212^2} = 1,912932$

Desse modo, obtivemos que a sequência possui os seguintes termos:

$$(1, \quad 3, \quad 2,259259, \quad 1,963307, \quad 1,914212, \quad 1,912932, \quad \cdots)$$

Supondo $\lim_{k\to\infty} x_k = L$, temos $\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = L$ o que implica $L = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2x_k}{3} + \frac{7}{3x_k^2}\right)$, ou seja, $L = \frac{2L}{3} + \frac{7}{3L^2}$. Resolvendo essa equação anterior, encontramos

$$L - \frac{2L}{3} = \frac{7}{3L^2} \Rightarrow \frac{L}{\cancel{3}} = \frac{7}{\cancel{3}L^2} \Rightarrow L^3 = 7 \Rightarrow L = \sqrt[3]{7}$$

Concluímos então que a sequência converge para $\sqrt[3]{7}$. Assim, o sexto termo encontrado da sequência, o $1,912932$ é uma aproximação para $\sqrt[3]{7}$ e foi obtido usando-se apenas operações aritméticas básicas como adição, multiplicação e divisão.

Observação: *Em geral, a sequência* $x_1 = 1$, $x_{k+1} = \frac{(n-1)x_k}{n} + \frac{a}{nx_k^{n-1}}$ *converge para* $\sqrt[n]{a}$ *e pode ser usada em um eficiente algoritmo para calcular qualquer raiz enésima usando-se apenas as operações aritméticas básicas.*

3) Calcule a soma da série convergente $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$.

Solução: O termo geral pode ser escrito na forma

$$\frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{2^n}{6^n} + \frac{3^n}{6^n} = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n}.$$

Daí, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ o que significa que a soma da série é equivalente à soma das séries geométricas $\sum \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$ e $\sum \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$. Portanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

4) Calcule a soma da série convergente $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 9k + 20}$.

Solução: Resolvendo a equação $k^2 + 9k + 20 = 0$, obtemos $k = -4$ ou $k = -5$. Isso significa que $k^2 + 9k + 20$ pode ser escrito na forma $k^2 + 9k + 20 = (k - (-4))(k - (-5)) = (k + 4)(k + 5)$. Por causa disso, vamos separar a fração $\frac{1}{k^2+9k+20}$ em frações mais simples (*frações parciais*):

$$\frac{1}{k^2 + 9k + 20} = \frac{A}{k + 4} + \frac{B}{k + 5}.$$

Multiplicando-se essa última igualdade por $(k + 4)(k + 5)$, obtemos $1 = A(k + 5) + B(k + 4)$. Substituindo agora dois valores particulares para k, por exemplo $k = 1$ e $k = 2$, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 6A + 5B &= 1 \\ 7A + 6B &= 1 \end{cases}$$

que ao ser resolvido fornece os seguintes valores: $A = 1$ e $B = -1$. Concluímos então que

$$a_k = \frac{1}{k^2 + 9k + 20} = \frac{1}{k + 4} - \frac{1}{k + 5}.$$

Fazendo $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, obtemos:

- $k = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$
- $k = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$
- $k = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$
- $\vdots \qquad \vdots$
- $k = n \Rightarrow a_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}$

Somando-se todas essas n igualdades anteriores, obtemos:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{5} - \cancel{\frac{1}{6}} + \cancel{\frac{1}{6}} - \cancel{\frac{1}{7}} + \cancel{\frac{1}{7}} - \cancel{\frac{1}{8}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n + 4}} - \frac{1}{n + 5},$$

ou seja, $S_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{n+5}$. Assim, concluímos que a soma da série é

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{n + 5} \right) = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}.$$

5) Calcule a soma da série convergente $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)}{\ln(k+1)\ln(k+2)}$.

Solução: Usando a propriedade $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$, temos

$$a_k = \frac{\ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)}{\ln(k+1)\ln(k+2)} = \frac{\ln(k+2) - \ln(k+1)}{\ln(k+1)\ln(k+2)} = \frac{\cancel{\ln(k+2)}}{\ln(k+1)\cancel{\ln(k+2)}} - \frac{\cancel{\ln(k+1)}}{\cancel{\ln(k+1)}\ln(k+2)}$$
$$= \frac{1}{\ln(k+1)} - \frac{1}{\ln(k+2)}.$$

Fazendo $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, obtemos:

- $k = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}$
- $k = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4}$
- $k = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5}$
- $\vdots \qquad \vdots$
- $k = n \Rightarrow a_n = \frac{1}{\ln(n+1)} - \frac{1}{\ln(n+2)}$

A partir daí, obtemos:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{\ln 2} - \cancel{\frac{1}{\ln 3}} + \cancel{\frac{1}{\ln 3}} - \cancel{\frac{1}{\ln 4}} + \cancel{\frac{1}{\ln 4}} - \cancel{\frac{1}{\ln 5}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{\ln(n+1)}} - \frac{1}{\ln(n+2)},$$

ou seja, $S_n = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+2)}$. Dessa forma, concluímos que a soma da série é

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+2)}\right) = \frac{1}{\ln 2} - 0 = \frac{1}{\ln 2}.$$

6) Determine os valores de p para os quais a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$ é convergente.

Solução: Seja $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$. Como $\int f(x)\,dx$ pode ser calculada sem dificuldade, podemos usar o *Teste da Integral* para resolver esse problema. Usando a substituição $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx$, calculamos a seguinte integral indefinida:

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx = \int \frac{1}{u^p}\,du = \int u^{-p}\,du = \begin{cases} \frac{u^{-p+1}}{-p+1} & \text{, se } \ p \neq 1 \\ \ln u & \text{, se } \ p = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(\ln x)^{-p+1}}{-p+1} & \text{, se } \ p \neq 1 \\ \ln(\ln x) & \text{, se } \ p = 1 \end{cases}$$

A partir daí, substituindo-se $x = M$ e $x = 2$, obtemos

$$\int_2^M f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{(\ln M)^{-p+1} - (\ln 2)^{-p+1}}{-p+1} & \text{, se } \ p \neq 1 \\ \ln(\ln M) - \ln(\ln 2) & \text{, se } \ p = 1 \end{cases}$$

Por fim, vamos calcular $\displaystyle\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_2^M f(x)\,dx$ separando em três casos: $p = 1$, $p < 1$ e $p > 1$.

- Se $p = 1$, então $\displaystyle\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} [\ln(\ln M) - \ln(\ln 2)] = +\infty$ e, nesse caso, a série diverge.

- Se $p < 1$, então $-p+1>0$ e $\displaystyle\int_2^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty}\left[\frac{(\ln M)^{\overbrace{-p+1}^{>0}} - (\ln 2)^{-p+1}}{-p+1}\right] = +\infty$ e, nesse caso, a série também diverge.

- Se $p > 1$, então $-p+1<0$ e $\displaystyle\int_2^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty}\left[\frac{(\ln M)^{\overbrace{-p+1}^{<0}} - (\ln 2)^{-p+1}}{-p+1}\right] = \frac{0-(\ln 2)^{-p+1}}{-p+1} = \frac{(\ln 2)^{-p+1}}{p-1}$ e, nesse caso, a série converge.

Conclusão: a série $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^p}$ converge se, e somente se, $\boxed{p>1}$.

7) Determine os valores de x para os quais a série

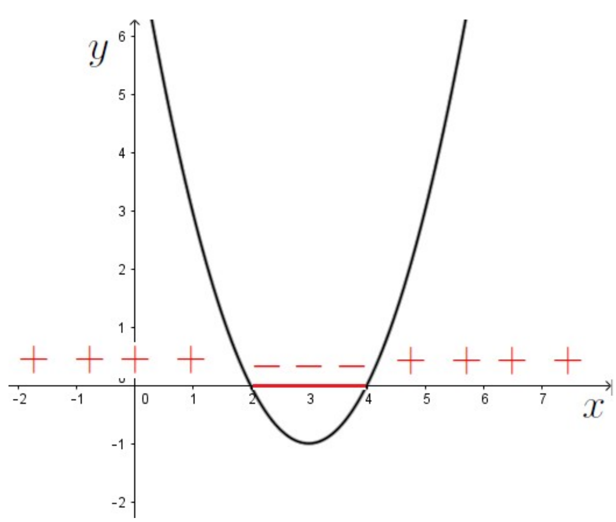
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(x-3)^{2k-2} = 1-(x-3)^2+(x-3)^4-(x-3)^6+(x-3)^8-\cdots+(-1)^{n+1}(x-3)^{2n-2}+\cdots$$

é convergente e calcule sua soma.

Solução: (1) Esse tipo de exercício normalmente se resolve usando o *Teste da Razão*. Como esse teste se aplica a séries de termos positivos, devemos usar a função módulo no seu termo geral:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{k\to\infty}\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \lim_{k\to\infty}\frac{|(-1)^{k+2}(x-3)^{2(k+1)-2}|}{|(-1)^{k+1}(x-3)^{2k-2}|} = \lim_{k\to\infty}\frac{|(x-3)^{2k}|}{|(x-3)^{2k-2}|} \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{\cancel{|(x-3)^{2k}|}}{\cancel{|(x-3)^{2k}}(x-3)^{-2}|} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{(x-3)^{-2}}\right| = \lim_{k\to\infty}|(x-3)^2| = \lim_{k\to\infty}(x-3)^2 = (x-3)^2. \end{aligned}$$

(2) Daí, obtemos do Teste da Razão que se $L<1$ a série converge. Como $L<1$ implica $(x-3)^2<1$, devemos resolver essa inequação na variável x. Como $(x-3)^2<1$ é equivalente a $x^2-6x+9<1$, ou seja, $x^2-6x+8<0$, observando o gráfico da função $f(x)=x^2-6x+8$, concluímos que a solução da inequação é $2<x<4$. Esse intervalo corresponde aos pontos do gráfico da função que estão abaixo do eixo dos x.



Sendo assim, a série converge se $2 < x < 4$.

(3) Como o Teste da Razão é inconclusivo quando $L = 1$, devemos analisar esse caso separadamente. Como $L = 1$ é equivalente a $(x-3)^2 = 1$, resolvendo essa equação do 2^o grau obtemos as raízes $x = 2$ ou $x = 4$. Substituindo $x = 2$ na série, obtemos $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ que é divergente. Substituindo $x = 4$ obtemos a mesma série divergente $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$.

Conclusão: a série dada converge apenas para x no intervalo $2 < x < 4$.

(4) A razão entre dois termos consecutivos da série dada é sempre igual a $r = \frac{u_{k+1}}{u_k} = -(x-3)^2$. Logo, ela é uma série geométrica de razão r e sua soma é igual a

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1+(x-3)^2} = \frac{1}{x^2-6x+10}.$$

8) Determine os valores de x para os quais a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2k-2}}{(2k-2)!} = 1 + \frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{(x+1)^4}{4!} + \frac{(x+1)^6}{6!} + \frac{(x-1)^8}{8!} + \cdots + \frac{(x+1)^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots$$

é convergente.

Solução: Vamos usar o *Teste da Razão*. Neste caso, não há necessidade de módulo no termo geral da série porque não tem termos negativos.

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{\frac{(x+1)^{2(k+1)-2}}{(2(k+1)-2)!}}{\frac{(x+1)^{2k-2}}{(2k-2)!}} \right] = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{(x+1)^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{(2k-2)!}{(x+1)^{2k-2}} \right]$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left[\frac{\cancel{(x+1)^{2k}}}{(2k)(2k-1)\cancel{(2k-2)!}} \cdot \frac{\cancel{(2k-2)!}}{\cancel{(x+1)^{2k}}(x+1)^{-2}} \right] = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{1}{(2k)(2k-1)(x+1)^{-2}} \right]$$

$$= (x+1)^2 \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(2k)(2k-1)} = (x+1)^2 \cdot 0 = 0.$$

Daí, obtemos $L = 0$ que é menor do que 1, independentemente do valor de x. Isso significa que para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$ a série converge.

9) Usando um teste de convergência apropriado, verifique se as seguintes séries são convergentes ou divergentes.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (k-1)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{k-1}\right)$

Solução:

$$\lim_{k\to\infty} (k-1)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{k-1}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{k-1}\right)}{\frac{1}{(k-1)^2}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{k-1}\right)}{\frac{1}{(k-1)}} \right)^2$$

$$= \left(\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{k-1}\right)}{\frac{1}{(k-1)}} \right)^2 = \left(\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \right)^2 = 1^2 = 1,$$

onde $\theta = \frac{1}{k-1}$. Como o limite quando $k \to \infty$ deu um resultado diferente de 0, temos pelo *Teste da Divergência* que a série é divergente.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k^6 - 5k^3 + 10k^2 - 17k + 7}{2k^6 + 30k^3 + 11k^2 + k + 3}$

Solução:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{8k^6 - 5k^3 + 10k^2 - 17k + 7}{2k^6 + 30k^3 + 11k^2 + k + 3} = \lim_{k\to\infty} \frac{8k^6}{2k^6} = \lim_{k\to\infty} \frac{8}{2} = \lim_{k\to\infty} 4 = 4 \neq 0.$$

Logo, pelo *Teste da Divergência*, a série é divergente.

Observação: Em um limite do tipo $\displaystyle\lim_{k\to\pm\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}$ onde $P(k)$ e $Q(k)$ são polinômios, os termos com os menores graus podem ser desprezados.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k^5 - 5k^3 + 10k^2 - 17k + 7}{2k^6 + 30k^3 + 11k^2 + k + 3}$

Solução: Como $\lim_{k\to\infty} \frac{8k^5-5k^3+10k^2-17k+7}{2k^6+30k^3+11k^2+k+3} = \lim_{k\to\infty} \frac{8k^5}{2k^6} = \lim_{k\to\infty} \frac{8}{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{4}{k} = 0$, temos que o Teste da Divergência não se aplica neste caso. Portanto, vamos usar outro teste.

Desprezando-se os termos de menor grau no numerador e no denominador da fração que é o termo geral da série, construímos uma outra série $\sum \frac{8k^5}{2k^6} = \sum \frac{4}{k} = 4 \sum \frac{1}{k}$ que sabemos que é divergente (porque é a série harmônica multiplicada por 4).

Comparando no limite a série dada com $\sum \frac{4}{k}$, obtemos:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left(\frac{8k^5-5k^3+10k^2-17k+7}{2k^6+30k^3+11k^2+k+3}\right)}{\left(\frac{4}{k}\right)} = \lim_{k\to\infty} \frac{8k^6 - 5k^4 + 10k^3 - 17k^2 + 7k}{8k^6 + 120k^3 + 44k^2 + 4k + 12} = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{8k^6}}{\cancel{8k^6}} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1 \neq 0.$$

Logo, pelo *Teste da Comparação no Limite*, a série dada é divergente.

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k^4 - 5k^3 + 10k^2 - 17k + 7}{2k^6 + 30k^3 + 11k^2 + k + 3}$

Solução: Como $\lim_{k\to\infty} \frac{8k^4-5k^3+10k^2-17k+7}{2k^6+30k^3+11k^2+k+3} = \lim_{k\to\infty} \frac{8k^4}{2k^6} = \lim_{k\to\infty} \frac{8}{2k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{4}{k^2} = 0$, temos que o Teste da Divergência não se aplica.

Desprezando-se os termos de menor grau no numerador e no denominador da fração construímos uma série $\sum \frac{8k^4}{2k^6} = \sum \frac{4}{k^2} = 4 \sum \frac{1}{k^2}$ que é convergente (porque é 4 vezes a p-série, $p = 2$).

Comparando no limite a série dada com $\sum \frac{4}{k^2}$, obtemos:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left(\frac{8k^5-5k^3+10k^2-17k+7}{2k^6+30k^3+11k^2+k+3}\right)}{\left(\frac{4}{k^2}\right)} = \lim_{k\to\infty} \frac{8k^6 - 5k^5 + 10k^4 - 17k^3 + 7k^2}{8k^6 + 120k^3 + 44k^2 + 4k + 12} = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{8k^6}}{\cancel{8k^6}} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1 \neq 0.$$

Logo, pelo *Teste da Comparação no Limite*, a série dada é convergente.

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2k+3)}{4k^2+12k+10}$

Solução: Seja $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(2x+3)}{4x^2+12x+10}$. Se $\int f(x)\,dx$ for simples de se calcular, então podemos usar o *Teste da Integral*.

Fazendo $u = \operatorname{arctg}(2x+3)$, temos $du = \frac{2}{1+(2x+3)^2}\,dx = \frac{2}{4x^2+12x+10}\,dx$, e assim calculamos a integral indefinida $\displaystyle\int f(x)\,dx$ usando uma substituição de x por u:

$$\int \frac{\operatorname{arctg}(2x+3)}{4x^2+12x+10}\,dx = \int u\,\frac{du}{2} = \frac{u^2}{4} = \frac{(\operatorname{arctg}(2x+3))^2}{4}.$$

A partir daí, calculamos a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ através de um limite:

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2x+3)}{4x^2+12x+10}\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} \frac{\operatorname{arctg}(2x+3)}{4x^2+12x+10}\,dx = \lim_{M\to\infty} \left[\frac{(\operatorname{arctg}(2M+3))^2}{4} - \frac{(\operatorname{arctg} 5)^2}{4}\right]$$
$$= \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{4} - \frac{(\operatorname{arctg} 5)^2}{4} = \frac{\pi^2 - 4(\operatorname{arctg} 5)^2}{16},$$

que é um valor finito o que implica que a integral imprópria é convergente.

Logo, pelo *Teste da Integral*, a série dada também é convergente.

Observação: É muito comum nesse tipo de exercício utilizarmos a seguinte propriedade: $\displaystyle\lim_{\theta\to\infty} \operatorname{arctg}(\theta) = \frac{\pi}{2}$.

f) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)[\ln(\ln k)]^5}$

Solução: Seja $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)[\ln(\ln x)]^5}$. Usando a substituição $u = \ln(\ln x)$, temos $du = \frac{1}{x(\ln x)}\,dx$ e daí

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x(\ln x)[\ln(\ln x)]^5}\,dx = \int \frac{1}{u^5}\,du = \int u^{-5}\,du = \frac{u^{-4}}{(-4)} = \frac{-1}{4u^4} = \frac{-1}{4[\ln(\ln x)]^4},$$

o que implica

$$\int_3^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_3^{M} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \left[\overbrace{\frac{-1}{4[\ln(\ln M)]^4}}^{\to 0} + \frac{1}{4[\ln(\ln 3)]^4}\right] = 0 + \frac{1}{[\ln(\ln 3)]^4} = \frac{1}{[\ln(\ln 3)]^4},$$

que é uma integral imprópria convergente. Logo, pelo *Teste da Integral*, a série dada também é convergente.

g) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3\operatorname{sen} k + 5\cos k^2}{k^4}$

Solução: Como $|a+b| \le |a| + |b|$, $|\operatorname{sen} k| \le 1$ e $|\cos k^2| \le 1$, temos:

$$|3\operatorname{sen} k + 5\cos k^2| \le |3\operatorname{sen} k| + |5\cos k^2| = 3|\operatorname{sen} k| + 5|\cos k^2| \le 3\cdot 1 + 5\cdot 1 = 8.$$

Por isso, $\left|\frac{3\,\mathrm{sen}\,k+5\cos k^2}{k^4}\right| \leq \frac{8}{k^4}$ e como $\sum \frac{8}{k^4} = 8\sum \frac{1}{k^4}$ é convergente (p-série com $p=4$), pelo *Teste da Comparação*, temos que $\sum \left|\frac{3\,\mathrm{sen}\,k+5\cos k^2}{k^4}\right|$ também o é. Assim, a série dada é *absolutamente convergente* o que implica que é convergente.

h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{3^{3k}(k!)^2}$

Solução: É muito comum usarmos o *Teste da Razão* nas séries cujos termos gerais possuírem algum fatorial. Sendo $u_k = \frac{(2k)!}{3^{3k}(k!)^2}$, vamos calcular $\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k}$ e compará-lo com 1.

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{\frac{(2(k+1))!}{3^{3(k+1)}((k+1)!)^2}}{\frac{(2k)!}{3^{3k}(k!)^2}}\right] = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{(2k+2)!}{3^{3k+3}((k+1)!)^2} \cdot \frac{3^{3k}(k!)^2}{(2k)!}\right]$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left[\frac{(2k+2)(2k+1)\cancel{(2k)!}}{\cancel{3^{3k}} \cdot 3^3 \cdot (k+1)^2\cancel{(k!)^2}} \cdot \frac{\cancel{3^{3k}}\cancel{(k!)^2}}{\cancel{(2k)!}}\right] = \lim_{k\to\infty} \frac{4k^2+6k+2}{27k^2+54k+27} = \lim_{k\to\infty} \frac{4\cancel{k^2}}{27\cancel{k^2}} = \frac{4}{27} < 1.$$

Portanto, pelo *Teste da Razão*, a série dada é convergente.

Observação: Nesse tipo de exercício, na hora de simplificar a fração que aparece no limite, as igualdades seguintes podem ser de alguma ajuda:

- $N! = N(N-1)! = N(N-1)(N-2)! = N(N-1)(N-2)(N-3)!$ etc.
- $(N+1)! = (N+1)N! = (N+1)N(N-1)! = (N+1)N(N-1)(N-2)!$ etc.
- $(N+2)! = (N+2)(N+1)! = (N+2)(N+1)N! = (N+2)(N+1)N(N-1)!$ etc.

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k)!}{5^k}$

Solução: Como essa série possui termos positivos e negativos (é alternada), para usarmos o Teste da Razão, devemos usar a função módulo. Seja $u_k = \frac{(-1)^k(2k)!}{5^k}$. Vamos calcular o limite da razão $\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|}$:

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{k+1}(2(k+1))!}{5^{k+1}}\right|}{\left|\frac{(-1)^k(2k)!}{5^k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{(2k+2)!}{5^{k+1}} \cdot \frac{5^k}{(2k)!}\right]$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left[\frac{(2k+2)(2k+1)\cancel{(2k)!}}{\cancel{5^k} \cdot 5} \cdot \frac{\cancel{5^k}}{\cancel{(2k)!}}\right] = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)(2k+1)}{5} = +\infty.$$

Logo, pelo *Teste da Razão*, a série dada é divergente.

j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^2+1}}$

Solução: Seja $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Observamos as seguintes propriedades:

- $f(x) > 0$ para todo x
- $f'(x) = \frac{-x}{(\sqrt{x^2+1})^3} < 0$ para todo $x > 0$ o que implica que a função é decrescente se x for positivo.
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

Pelo *Teste da Série Alternada,* concluímos que a série dada, $\sum(-1)^k f(k)$, é convergente.

Observação: Se for acrescentado uma função módulo no termo geral dessa série, ou seja, se considerarmos a série $\sum |(-1)^k f(k)| = \sum f(k) = \sum \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$, então podemos comparar no limite essa última série com a série harmônica $\sum \frac{1}{k}$ (divergente):

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\sqrt{k^2+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\sqrt{k^2(1+\frac{1}{k^2})}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k}}{\cancel{k}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1.$$

Logo, $\sum \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ é divergente e, consequentemente, a série alternada $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^2+1}}$ é *condicionalmente convergente.*

10) Calcule a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[2n+1]{x} - \sqrt[2n-1]{x}) = (\sqrt[3]{x} - x) + (\sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{x}) + (\sqrt[7]{x} - \sqrt[5]{x}) + (\sqrt[9]{x} - \sqrt[7]{x}) + \dots$$

Solução: A soma parcial dos n primeiros termos dessa série é dada por

$$S_n = (\cancel{\sqrt[3]{x}} - x) + (\cancel{\sqrt[5]{x}} - \cancel{\sqrt[3]{x}}) + (\cancel{\sqrt[7]{x}} - \cancel{\sqrt[5]{x}}) + \dots + (\sqrt[2n+1]{x} - \cancel{\sqrt[2n-1]{x}}) = \sqrt[2n+1]{x} - x.$$

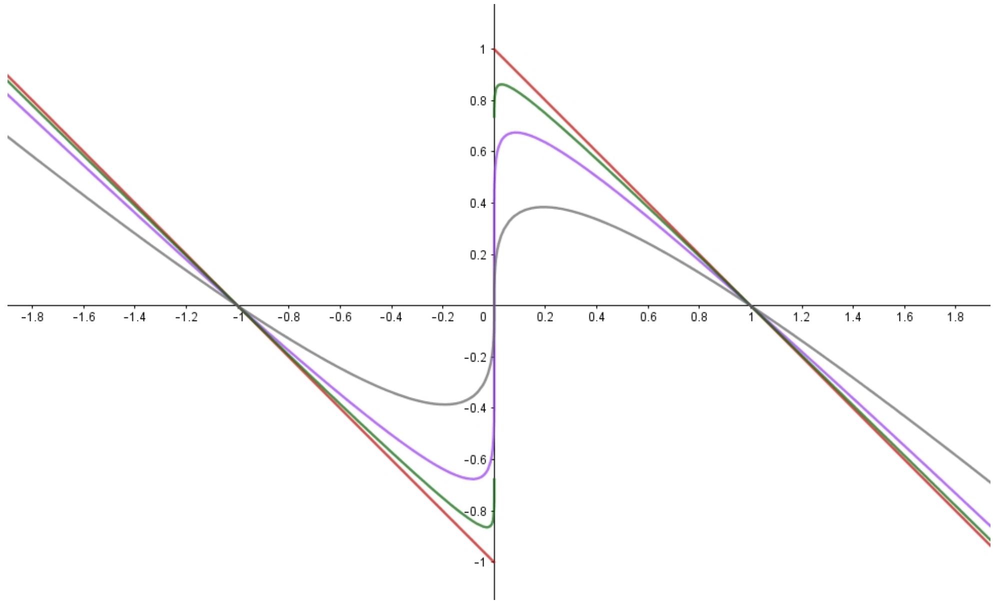
Consideramos agora três casos: $x = 0$, $x > 0$ e $x < 0$.

- se $x = 0$, então $S_n = 0$, e daí $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$
- se $x > 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x) = 1 - x$
- se $x < 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-|x|^{\frac{1}{2n+1}} - x) = -1 - x$

Concluímos assim que

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[2n+1]{x} - \sqrt[2n-1]{x}) = \begin{cases} -1-x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1-x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Observação: Neste exemplo, temos uma sequência de funções contínuas $S_n(x)$ convergindo para um função descontínua $S(x)$. No gráfico a seguir, estão representadas $S(x)$, $S_1(x)$, $S_4(x)$ e $S_{15}(x)$.


1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.8
-1.6
-1.4
-1.2
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8

Resumo dos testes de convergência

Nome	**Enunciado**	**Comentário**
Teste da divergência	Se $\lim\limits_{k\to\infty} u_k \neq 0$, então $\sum u_k$ é divergente	Exemplo: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-3k+1}{2k^2+k+7}$ diverge. Se $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$, então $\sum u_k$ pode ser convergente ou divergente.
Teste da Integral	Se $\sum f(k)$ for uma série de termos positivos em que f uma função contínua e decrescente em um intervalo $[a,\infty[$, então $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ e $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ambas convergem ou ambas divergem.	Exemplo: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ é divergente. Esse teste se aplica quando a série $\sum f(k)$ tem termos positivos e é fácil calcular a integral de $f(x)$.
Teste da Razão	Seja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ uma série de termos positivos e $L = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k}$. Então a série converge se $L < 1$ e diverge se $L > 1$ ou $L = \infty$. Se $L = 1$, o teste é inconclusivo.	Exemplo: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ é convergente. Esse teste se aplica quando u_k envolve algum fatorial ou potências de expoente k.
Teste da Comparação	Sejam $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ séries de termos não negativos tais que $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$, $a_3 \leq b_3$, $\ldots$, $a_k \leq b_k$, $\ldots$. Se $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, então $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, e se $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge, então $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge.	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^4+k^2+1}$ converge porque $\frac{k}{k^4+k^2+1} \leq \frac{k}{k^4} = \frac{1}{k^3}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, e $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ converge. Esse teste se aplica apenas a séries de termos não negativos e nem sempre é fácil de ser aplicado.
Teste da Comparação no Limite	Sejam $\sum a_k$ e $\sum b_k$ séries de termos positivos e $L = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$. Se $0 < L < \infty$, então ambas convergem ou ambas divergem.	Exemplo: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^4+5k^3+k-1}{k^6+k^2+5k+2}$ converge porque pode ser comparada com a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{k^6} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.
Teste da Série Alternada	Se $a_k > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, então a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ converge se $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \ldots$ e $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.	Exemplo: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+5}}$ converge. Esse teste também vale para a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots$
Teste da Raiz (opcional)	Seja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ uma série de termos positivos e $L = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k}$. Então a série converge se $L < 1$ e diverge se $L > 1$ ou $L = +\infty$. Se $L = 1$, o teste é inconclusivo.	Exemplo: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k+3}{5k-1}\right)^k$ é convergente. Esse teste se aplica quando u_k envolve alguma potência de expoente k.