SÉRIES E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS
3^a LISTA DE EXERCÍCIOS – MARÇO/2020

33) Verifique se a função $y = f(x)$ é solução da equação diferencial dada em cada um dos seguintes casos:

a) $y'' - y = 0, \quad y = e^x$

b) $y'' - y = 0, \quad y = \cosh x$

c) $y'' + 2y' - 3y = 0, \quad y = e^x$

d) $y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y = e^{-3x}$

e) $xy' - y = x^2, \; y = 3x + x^2$

f) $y' - 2xy = 1, \quad y = e^{x^2} \displaystyle\int_0^x e^{-s^2} ds + e^{x^2}$

g) $y^{(4)} + 4y''' + 3y = x, \quad y = e^{-x} + x/3$

h) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0, \quad y = x^{-2} \ln x$

34) Quais das seguintes funções são soluções da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3} \quad ?$$

a) $y = x$

b) $y = x^2$

c) $y = x^8$

d) $y = x^8 - x^4$

e) $y = \sqrt{x^8 - x^4}$

f) $y = \sqrt[4]{x^8 - x^4}$

35) Determine o valor de r de modo que $y = e^{rx}$ seja uma solução de $y''' - 3y'' + 2y' = 0$.

36) Sendo $t > 0$, determine r de modo que $y = t^r$ seja solução de $t^2y'' - 4ty' + 4y = 0$.

37) A função $y(x) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x + 1$ é solução de uma equação diferencial. Determine os valores das constantes C_1 e C_2 de modo que $y(\pi) = 0$ e $y'(\pi) = 0$.

38) A função $y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + x^2e^x$ é solução de uma equação diferencial. Determine os valores das constantes C_1 e C_2 de modo que $y(1) = 1$ e $y'(1) = -1$.

39) Escreva a equação $e^xy' + e^{2x}y = \operatorname{sen} x$ na forma padrão e na forma diferencial.

40) Escreva a equação $e^xy\,dx + (x-5)\,dy = 0$ na forma padrão.

41) Resolva as seguintes equações diferenciais:

a) $xdx + ydy = 0$

b) $y^4dx - xdy = 0$

c) $xdx - y^3dy = 0$

d) $(t+1)dt = \frac{1}{y^2}dy$

e) $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$

f) $\frac{dx}{dt} = x^2t^2$

g) $\frac{dy}{dt} = 3 + 5y$

h) $\frac{dy}{dx} = y^2$

i) $dx - \dfrac{1}{y^2 - 6y + 13}dy = 0$

j) $y' = \frac{xe^x}{2y}$

k) $y' = \frac{y}{x^2}$

l) $\frac{4}{y-3}dx - \frac{x}{y}dy = 0$

m) $(1 + e^{x^2})dy = 2xye^{x^2}dx$

n) $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$

o) $\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}$

p) $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$

q) $(y^3 + y)dx = (-y^2 + 1)xdy$

r) $y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$

s) $xy' = \sqrt{1 - y^2}$

t) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}$

42) Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

a) $\operatorname{sen} x\,dx + y\,dy = 0, \; y(0) = -2$

b) $(x^2 + 1)\,dx + \frac{1}{y}\,dy = 0, \; y(-1) = 1$

c) $xe^{x^2}\,dx + (y^5 - 1)\,dy = 0, \; y(0) = 0$

d) $y' = \dfrac{x^2y - y}{y+1}, \; y(3) = -1$

43) Mostre que cada equação a seguir é exata e determine sua solução.

a) $(y+2xy^3)\,dx+(1+3x^2y^2+x)\,dy=0$ b) $e^{x^3}(3x^2y-x^2)\,dx+e^{x^3}\,dy=0$

c) $3x^2y^2\,dx+(2x^3y+4y^3)\,dy=0$ d) $y\,dx+x\,dy=0$

e) $(y\operatorname{sen}x+xy\cos x)\,dx+(x\operatorname{sen}x+1)\,dy=0$ f) $-\frac{y^2}{t^2}\,dt+\frac{2y}{t}\,dy=0$

g) $-\frac{2y}{t^3}\,dt+\frac{1}{t^2}\,dy=0$ h) $(4t^3y^3-2ty)\,dt+(3t^4y^2-t^2)\,dy=0$

i) $2xe^{2t}\,dt+(1+e^{2t})\,dx=0$ j) $(\cos x+x\cos t)\,dt+(\operatorname{sen}t-t\operatorname{sen}x)\,dx=0$

44) Sendo k uma constante genérica, mostre que cada equação mostrada na tabela a seguir tem o fator integrante $I(x,y)$ e a solução que são apresentados a cada linha.

	Equação	Fator integrante	Solução
a)	$y\,dx-x\,dy\;=\;0$	$I(x,y)=-\dfrac{1}{x^2}$	$y=kx$
b)	$y\,dx-x\,dy\;=\;0$	$I(x,y)=\dfrac{1}{y^2}$	$x=ky$
c)	$y\,dx+x\,dy\;=\;0$	$I(x,y)=\dfrac{1}{xy}$	$xy=k$
d)	$y\,dy+x\,dx\;=\;0$	$I(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$	$x^2+y^2=e^k$
e)	$ay\,dx+bx\,dy\;=\;0$	$I(x,y)=x^{a-1}y^{b-1}$	$x^ay^b=k$

45) Determine um fator integrante apropriado e resolva cada uma das equações:

a) $2xy\,dx+y^2\,dy=0$ b) $dx-2xy\,dy=0$

c) $xy^2\,dx+x^2y\,dy=0$ d) $3x^2y^2\,dx+(2x^3y+x^3y^4)\,dy=0$

46) Resolva as seguintes equações:

a) $\frac{dy}{dx}+5y=0$ b) $\frac{dy}{dx}+2xy=0$ c) $\frac{dy}{dx}-x^2y=0$

d) $y'+3x^2y=0$ e) $y'-3x^4y=0$ f) $y'-7y=e^x$

g) $y'-7y=\operatorname{sen}2x$ h) $y'+2xy=2x^3,\;y(0)=1$ i) $y'+6xy=0,\;y(\pi)=5$

j) $y'+2y=32,\;y(0)=0$ k) $q'+q=4\cos 2t,\;q(0)=1$ l) $y'+\frac{2}{x}y=x,\;y(1)=0$

47) Resolva as seguintes equações:

a) $y''-y'-30y=0$ b) $y''-2y'+y=0$ c) $y''-7y=0$

d) $y''+2y'+2y=0$ e) $y''+6y'+9y=0$ f) $y''+2y'+3y=0$

g) $y''-3y'-5y=0$ h) $4y''+4y'+y=0$ i) $q''+q'+2q=0$

j) $y'''-2y''-y'+2y=0$ k) $y'''-y''-y'+y=0$ l) $y'''-3y''+3y'-y=0$

m) $y'''-y''+y'-y=0$ n) $y^{(4)}+2y''+y=0$ o) $y^{(4)}-y=0$

p) $y^{(4)}+2y'''-2y'-y=0$ q) $y^{(4)}+2y'''+3y''+2y'+y=0$ r) $q^{(4)}+q''-2q=0$

48) Determine a solução geral $y(x)$ de uma equação diferencial de sexta ordem linear homogênea, com coeficientes reais, sabendo que uma solução é $x^2e^{7x}\cos 5x$. Qual é a equação diferencial a que esta questão se refere?

49) Resolva $\dfrac{d^4y}{dx^4}-4\dfrac{d^3y}{dx^3}-5\dfrac{d^2y}{dx^2}+36\dfrac{dy}{dx}-36y=0$ sabendo que uma solução é xe^{2x}.

50) Encontre a solução geral da equação

$$\frac{d^6y}{dx^6}+\frac{d^5y}{dx^5}-13\frac{d^4y}{dx^4}-17\frac{d^3y}{dx^3}-52\frac{d^2y}{dx^2}+16\frac{dy}{dx}+64y=0$$

sabendo que uma solução particular é $11e^{\frac{-x}{2}}\operatorname{sen}(\dfrac{\sqrt{15}x}{2})$.

RESPOSTAS DA 3^a LISTA DE EXERCÍCIOS

33) Todas são soluções, exceto (d) **34)** A única que é solução é (f).

35) $r = 0$ ou $r = 1$ ou $r = 2$. **36)** $r = 1$ ou $r = 4$.

37) $C_1 = 0$ e $C_2 = 1$. **38)** $C_1 = \frac{e+3}{e}$ e $C_2 = \frac{-2(e+1)}{e}$.

39) Forma padrão: $y' = \frac{\operatorname{sen} x - e^{2x}y}{e^x}$; Forma diferencial: $(e^{2x}y - \operatorname{sen} x)dx + e^x dy = 0$.

40) Forma padrão: $y' = \frac{e^x y}{5-x}$.

41) O c que é usado em todas as respostas é uma constante genérica.

a) $x^2 + y^2 = c$ b) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{c - 3\ln x}}$ c) $y = \pm\sqrt[4]{2x^2 - c}$ d) $y = \frac{-2}{t^2+2t}$
e) $2\operatorname{tg} 2y = 2x + \operatorname{sen} 2x + c$ f) $-\frac{1}{x} = \frac{t^3}{3} + c$ g) $y = ce^{5t} - \frac{3}{5}$ h) $y = \frac{-1}{x+c}$
i) $y = 2\operatorname{tg}(2x - c) + 3$ j) $y = \pm\sqrt{(x-1)e^x + c}$ k) $y = ce^{-1/x}$ l) $\ln(x^4y^3) = y + c$
m) $y = c(1 + e^{x^2})$ n) $y = \frac{1}{c - \cos x}$ o) $\frac{y^2}{2} + e^y = \frac{x^2}{2} + e^{-x} + c$ p) $x = tc$
q) $xy^2 + x = cy$ r) $3y^2 = 2\ln(1 + x^3) + c$ s) $y = \operatorname{sen}(\ln x + c)$ t) $y^3 + 3y = x^3 + c$

42) a) $y = -\sqrt{2 + 2\cos x}$ b) $y = e^{-\frac{1}{3}(x^3+3x+4)}$ c) $3e^{x^2} + y^6 - 6y = 3$ d) $y + \ln|y| = \frac{x^3}{3} - x - 7$

43)
a) $xy + x^2y^3 + y = c$ b) $(3y - 1)e^{x^3} = 3c$
c) $x^3y^2 + y^4 = c$ d) $xy = c$
e) $(x \operatorname{sen} x + 1)y = c$ f) $y^2 = tc$
g) $y = ct^2$ h) $t^4y^3 - t^2y = c$
i) $xe^{2t} + x = c$ j) $t\cos x + x \operatorname{sen} t = c$

45) a) $2x^2 + y^2 = 2c$ b) $\ln x - y^2 = c$ c) $x^2y^2 = c$ d) $x^3y^2e^{y^3/3} = c$, c constante

46)
a) $y = ce^{-5x}$ b) $y = ce^{-x^2}$ c) $y = ce^{x^3/3}$
d) $y = ce^{-x^3}$ e) $y = ce^{3x^5/5}$ f) $y = -\frac{e^x}{6} + ce^{7x}$
g) $-\frac{1}{53}(7\operatorname{sen} 2x + 2\cos 2x)$ h) $y = x^2 - 1 + 2e^{-x^2}$ i) $y = 5e^{3(\pi^2 - x^2)}$
j) $y = 16(1 - e^{-2x})$ k) $q = \frac{4}{5}(2\operatorname{sen} 2t + \cos 2t) + \frac{e^{-t}}{5}$ l) $y = \frac{1}{4}(x^2 - \frac{1}{x^2})$

47) Os c_1, c_2, c_3, c_4 usados nas respostas são constantes genéricas.

a) $y = c_1e^{6x} + c_2e^{-5x}$ b) $y = c_1e^x + c_2xe^x$ c) $y = c_1e^{\sqrt{7}x} + c_2e^{-\sqrt{7}x}$
d) $y = c_1e^{-x}\cos x + c_2e^{-x}\operatorname{sen} x$ e) $y = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x}$ f) $y = c_1e^{-x}\cos\sqrt{2}x + c_2e^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2}x$
g) $y = c_1e^{\frac{3+\sqrt{29}}{2}x} + c_2e^{\frac{3-\sqrt{29}}{2}x}$ h) $y = c_1e^{\frac{x}{2}} + c_2xe^{-\frac{x}{2}}$ i) $q = c_1e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + c_2e^{-x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{7}}{2}x$
j) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + c_3e^x$ k) $y = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3xe^x$ l) $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x$
m) $y = c_1e^x + c_2\cos x + c_3\operatorname{sen} x$ n) $y = c_1\cos x + c_2x\cos x + c_3\operatorname{sen} x + c_4x\operatorname{sen} x$
o) $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\operatorname{sen} x$ p) $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + c_4e^{-x}$
q) $y = c_1e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2e^{-x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3xe^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4xe^{-x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$
r) $q = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos\sqrt{2}x + c_4\operatorname{sen}\sqrt{2}x$

48) A solução geral é $y(x) = c_1e^{7x}\cos 5x + c_2xe^{7x}\cos 5x + c_3x^2e^{7x}\cos 5x + c_4e^{7x}\operatorname{sen} 5x + c_5xe^{7x}\operatorname{sen} 5x + c_6x^2e^{7x}\operatorname{sen} 5x$ e a equação é $y^{(6)} - 42y^{(5)} + 810y^{(4)} - 8960y''' + 59940y'' - 229992y' + 405224y = 0$.

49) $y(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{3x} + c_4e^{-3x}$, onde c_1, c_2, c_3, c_4 são constantes.

50) $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{4x} + c_4e^{-4x} + c_5e^{\frac{-x}{2}}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{15}x}{2}) + c_6e^{\frac{-x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{15}x}{2})$, onde $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ são constantes genéricas.