SÉRIES E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS
1^a LISTA DE EXERCÍCIOS – OUTUBRO/2019

1) Verifique se cada uma das sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a seguir são convergentes e calcule seus limites.

a) $a_n = \frac{5n-2}{n+4}$ b) $a_n = \frac{2n^2-7n-4}{n^2+2n+1}$ c) $a_n = \frac{2n-1}{n^3+4n+2}$ d) $a_n = (2-\frac{1}{2^n})(5+\frac{1}{3^n})$

e) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$ f) $a_n = (\frac{1}{4})^{n+2}$ g) $a_n = \frac{n^2+1}{5n+4}$ h) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{sen}(7n^2-3n+2)$

i) $a_n = \left(\frac{2n-5}{2n+5}\right)^n$ j) $a_n = n\operatorname{sen}\frac{1}{n}$ k) $a_n = 8^{\frac{1}{n}} + (\frac{1}{8})^n$ l) $a_n = \sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}$

m) $a_n = \operatorname{arctg}(3n+8)$ n) $a_n = (3^n+5^n)^{1/n}$ o) $a_n = \frac{(\ln n)^5}{\sqrt{n}}$ p) $a_n = \frac{(10/11)^n}{(9/10)^n+(11/12)^n}$

2) Escreva os 5 primeiros termos de cada uma das seguintes sequências $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e determine seus limites.

a) $x_1 = \sqrt{3}, \quad x_{k+1} = \sqrt{3x_k}$ b) $x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{k+1} = \dfrac{1}{1+x_k}$ c) $x_1 = 1, \quad x_{k+1} = \dfrac{x_k}{10}$

d) $x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{k+1} = \sqrt{2+x_k}$ e) $x_1 = 1, \quad x_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_k + \dfrac{2}{x_k}\right)$ f) $x_1 = 0, \quad x_{k+1} = x_k + 4$

3) Verifique se cada série a seguir é convergente ou divergente. Se for convergente, determine sua soma.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}3^k$ c) $\displaystyle\sum_{k=6}^{+\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^{k-4}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{7}{6^{k+1}}$

e) $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty}5^{3k}7^{2-k}$ f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+2}}\right)$ g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{k-1}$ h) $\displaystyle\sum_{k=100}^{+\infty}\frac{1}{k-5}$

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+3)(k+4)}$ j) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{9k^2+3k-2}$ k) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}$ l) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\ln\frac{k}{k+1}$

m) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$ n) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(5^{k+1}-5^k)$ o) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$ p) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^2+3k-7}{k^2+k+4}$

q) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{5^k}-\frac{1}{k(k+1)}\right]$ r) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ s) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k^2\operatorname{sen}^2(\frac{1}{k})$ t) $\displaystyle\sum_{k=10}^{+\infty}\cos k\pi$

4) Verifique se as seguintes séries são convergentes ou divergentes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5}{n^3}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty}n^{-2/3}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-2/3}$ f) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n^\pi}$ g) $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{2015}{\sqrt[5]{n^7}}$

5) Suponha que a série $\sum u_k$ seja convergente e que $\sum v_k$ seja divergente. Mostre que as séries $\sum(u_k+v_k)$ e $\sum(u_k-v_k)$ são divergentes.

6) a) Dê exemplo de duas séries $\sum u_k$ e $\sum v_k$ divergentes tais que $\sum(u_k+v_k)$ seja convergente.

b) Dê exemplo de duas séries $\sum u_k$ e $\sum v_k$ divergentes tais que $\sum(u_k+v_k)$ seja divergente.

7) Use o *Teste da Integral* para decidir se as seguintes séries são convergentes ou divergentes:

a) $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)\ln(n-3)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2e^{-n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sec^2 n$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{7n+2}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{(7n+2)^2}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^4+1}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^3}$ k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\operatorname{arctg} n}}{n^2+1}$ l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n+2)}{n^2+4n+5}$

8) Determine os valores de p para os quais as seguintes séries são convergentes:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+3}{(k^2+3k+5)^p}$ b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$ c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)[\ln(\ln k)]^p}$.

9) Use o *Teste da Razão* para decidir se as seguintes séries são convergentes ou divergentes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{3^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)^2}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{n3^{n-1}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{4^n}$ f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln n}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2(n+2)!}{n!3^{2n}}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n5^n}{(2n+3)\ln(n+1)}$

10) Use o *Teste da Comparação* para decidir se as seguintes séries são convergentes ou divergentes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+10}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-2}{n^4+5}$ c) $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-2}$ d) $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{n+3}{n^2-2n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{n^{3/2}}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n4^n}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{n+3}{n^4+3}}$ h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^2+5}}$

11) Use o *Teste da Comparação por Limite* para decidir se as seguintes séries são convergentes ou divergentes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-2}{n^3-n^2+3}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{n+2}{n^2+3}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n(n+4)}{(n+1)(n-1)(n-2)}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3+5^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{\sqrt{n}4^n}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n$

12) Verifique se as seguintes séries são divergentes, condicionalmente convergentes ou absolutamente convergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} \frac{n!}{2^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} \frac{n}{n^3+1}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} \sqrt[n]{10}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} \frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{2^n n! n}$

13) Determine os valores de x para os quais a série

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(x-1)^{2k-2} = 1+(x-1)^2+(x-1)^4+(x-1)^6+(x-1)^8+\cdots+(x-1)^{2n-2}+\cdots$$

é convergente e calcule sua soma.

14) Determines os valores de x para os quais a série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^{2k-2}}{(2k-2)!} = 1+\frac{(x+1)^2}{2!}+\frac{(x+1)^4}{4!}+\frac{(x+1)^6}{6!}+\frac{(x-1)^8}{8!}+\cdots+\frac{(x+1)^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots$$

é convergente.

RESPOSTAS DA 1^a LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Todas são convergentes, com exceção apenas do item (g).

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 10$
e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ g) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-5}$ j) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ k) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ l) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
m) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\pi}{2}$ n) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$ o) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ p) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

2) Todas são convergentes, com exceção apenas do item (f).

a) $(3^{\frac{1}{2}},\ 3^{\frac{3}{4}},\ 3^{\frac{7}{8}},\ 3^{\frac{15}{16}},\ 3^{\frac{31}{32}},\ \cdots),\quad \lim\limits_{k\to\infty} x_k = 3$

b) $(1/2,\ 2/3,\ 3/5,\ 5/8,\ 8/13,\ \cdots),\ \lim\limits_{k\to\infty} x_k = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

c) $(1,\ 1/10,\ 1/100,\ 1/1000,\ 1/10000, \cdots),\quad \lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$

d) $(\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}},\ ,\ \cdots),$
$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 2$

e) $(1,\ 3/2,\ 17/12,\ 577/408,\ 665857/470832,\ \cdots),\quad \lim\limits_{k\to\infty} x_k = \sqrt{2}$

f) $(0,\ 4,\ 8,\ 16,\ 20,\ \cdots),\quad \lim\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$

3) São divergentes: b, e, h, l, m, n, p, r, s, t

a) $S = 1/2$, c) $S = 9/40$, d) $S = 1/6$, f) $S = 3/4$, g) $S = \pi/(\pi - e)$,
i) $S = 1/4$, j) $S = 1/15$ k) $S = 1$, o) $S = 3/2$ q) $S = -3/4$

4) São convergentes: a, d, f, g; são divergentes: b, c, e.

5) *Sugestão: mostre que se $\sum(u_k \pm v_k)$ fosse convergente, então $\sum v_k$ também seria convergente.*

6) a) $u_k = \frac{1}{k}$, $v_k = -\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$ — *outro exemplo:* a) $u_k = (-1)^k$, $v_k = (-1)^{k+1}$
b) $u_k = \frac{1}{k}$, $v_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$

7) São convergentes: b, c, f, g, j, k, l; são divergentes: a, d, e, h, i.

8) a) $p > 1$ b) $p > 1$ c) $p > 1$

9) São convergentes: a, b, d, e, g ; são divergentes: c, f, h .

10) São convergentes: a, b, e, f, g ; são divergentes: c, d, h .

11) São convergentes: a, d, h ; são divergentes: b, c, e, f, g .

12) São divergentes: b, e, h; São absolutamente convergentes: c, d, f, g; é condicionalmente convergente: a.

13) Se $0 < x < 2$ a série converge e sua soma é igual a $S = \dfrac{1}{2x - x^2}$.

14) É convergente para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

Primeira prova no dia 5 de dezembro de 2019