SÉRIES E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS
2^a LISTA DE EXERCÍCIOS – FEVEREIRO/2020

14) Determine o raio de convergência R e o intervalo de convergência I de cada série:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$ d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{2^k} x^k$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^2} x^k$ f) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{\ln k}$ g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}$ h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k x^{k+1}}{k+1}$

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{\sqrt{k}}$ j) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ k) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!} x^k$ l) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k(\ln k)^2}$

m) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k (x+5)^k$ n) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{2^k}$ o) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(x+1)^k}{k}$ p) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-4)^k}{(k+1)^2}$

q) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(x+1)^{2k+1}}{k^2+4}$ r) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^k (x+1)^{2k}}{(2k+3)!}$ s) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k+1)!}{k^3} (x-1)^{5k}$ t) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x-3)^k}{2^{3k}}$

15) Determine o domínio da função

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)}{(2k-2)!} x^k$$

16) Suponha que a função f seja representada pela seguinte série de potências:

$$f(x) = 1 - \frac{x-5}{3} + \frac{(x-5)^2}{3^2} - \frac{(x-5)^3}{3^3} + \cdots + \frac{(-1)^k (x-5)^k}{3^k} + \ldots$$

Determine o domínio de f e calcule $f(3)$ e $f(6)$.

17) Suponha que a função g seja representada pela seguinte série de potências:

$$g(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \cdots + (-1)^k \frac{x^k}{2^k} + \ldots$$

Determine o domínio de g e calcule $g(0)$ e $g(1)$.

18) Usando a fórmula da soma de uma série geométrica $\frac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, com $|x| < 1$, obtenha uma série de potências de x para representar cada uma das seguintes funções. Em cada caso, especifique o conjunto de valores de x onde a representação é válida.

a) $\dfrac{1}{3-x}$ b) $\dfrac{1}{x+2}$ c) $\dfrac{5}{2-3x}$ d) $\dfrac{1}{6-x-x^2}$ e) $x^3 \operatorname{arctg} x$ f) $x^2 \ln(5-x)$

g) $\dfrac{1}{(1-x)^3}$ h) $\dfrac{1}{x^4-1}$ i) $\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ j) $\ln(1-x)$ k) $\dfrac{x}{x^2-3x+2}$ l) $\operatorname{arctg}(x-2)$

19) Usando a série de MacLaurin de e^x, calcule o valor da soma $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! 2^k}$.

20) Usando um desenvolvimento em série de potências de x para $\dfrac{1}{(1-x)^2}$, mostre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2$.

21) Encontre uma série de potências para representar a função $\dfrac{e^x - 1}{x}$ e, derivando termo a termo, mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$.

22) Encontre uma série de potências para representar a função $x^2 e^{-x}$ e, derivando termo a termo, mostre que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2) 2^{n+1}}{n!} = 8$.

23) Integrando de $x = 0$ até $x = 1$ uma série de potências representando a função xe^x, mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{1}{2}$.

24) Encontre a série de MacLaurin de cada uma das funções:

a) $f(x) = e^{-x^2}$	b) $f(x) = e^{x+4}$	c) $f(x) = x \cos x$	d) $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x$
e) $f(x) = x^3 \operatorname{sen} x$	f) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$	g) $f(x) = \cos 3x$	h) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$
i) $f(x) = \cos^2 5x$	j) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$	k) $f(x) = \cosh x$	l) $f(x) = \operatorname{senh} 4x$
m) $f(x) = \operatorname{arcsen} x$	n) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$	o) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{1+x}}$	p)$f(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^3)\, dt$
q) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{64+t^6}\, dt$	r) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}}\, dt$	s) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8+x}}$	t) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{arctg}(t^4)\, dt$

25) Obtenha o desenvolvimento em série de Taylor em torno de $x = 2$ da função $f(x) = \sqrt{x^3}$. *Sugestão:* $x = 2 + (x - 2)$

26) Obtenha o desenvolvimento em série de Taylor em torno de $x = 3$ da função $f(x) = e^x$. *Sugestão:* $x = 3 + (x - 3)$

27) Obtenha o desenvolvimento em série de Taylor em torno de $x = \frac{\pi}{4}$ da função $f(x) = \cos x$. *Sugestão:* $x = \frac{\pi}{4} + (x - \frac{\pi}{4})$

28) Usando a fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

e os 5 primeiros termos do desenvolvimento em série de $\operatorname{arctg} x$, obtenha uma aproximação para o valor de π. Use 8 casas decimais em todos os cálculos.

29) A partir do desenvolvimento em série de e^x, calcule o valor de $e^{-1/2}$ com um erro menor do que $\varepsilon = 10^{-6}$.

30) Determine a série de MacLaurin de $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$ e calcule $f^{(100)}(0)$ e $f^{(101)}(0)$.

31) Sendo $f(x) = x^2 \cos x$, calcule $f^{(2017)}(0)$ e $f^{(2018)}(0)$.

32) A partir dos 4 primeiros termos do desenvolvimento em série da função arco-tangente, obtenha um valor aproximado para a integral $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x}\, dx$.

RESPOSTAS DA 2^a LISTA DE EXERCÍCIOS

14) a) $R = 1$, $I = [-1, 1[$ b) $R = \frac{1}{3}$, $I =]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$ c) $R = \infty$, $I = \mathbb{R}$ d) $R = 0$, $I = \{0\}$
e) $R = \frac{1}{5}$, $I = [-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$ f) $R = 1$, $I = [-1, 1[$ g) $R = 1$, $I = [-1, 1]$ h) $R = \frac{1}{2}$, $I =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
i) $R = 1$, $I =]-1, 1]$ j) $R = \infty$, $I = \mathbb{R}$ k) $R = \infty$, $I = \mathbb{R}$ l) $R = 1$, $I = [-1, 1]$
m) $R = \frac{4}{3}$, $I =]-\frac{19}{3}, -\frac{11}{3}[$ n) $R = 2$, $I =]1, 5[$ o) $R = 1$, $I =]-2, 0]$ p) $R = 1$, $I = [3, 5]$
q) $R = 1$, $I = [-2, 0]$ r) $R = \infty$, $I = \mathbb{R}$ s) $R = 0$, $I = \{1\}$ t) $R = 4$, $I =]-\frac{5}{2}, \frac{11}{2}[$

15) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

16) $\mathrm{Dom}(f) =]2, 8[$, $f(3) = 3$, $f(6) = \frac{3}{4}$

17) $\mathrm{Dom}(g) =]-2, 2[$, $g(0) = 1$, $g(1) = \frac{2}{3}$

18) a) $\frac{1}{3-x} = \frac{1}{3(1-\frac{x}{3})} = \frac{1}{3} + \frac{x}{3^2} + \frac{x^2}{3^3} + \frac{x^3}{3^4} + \frac{x^4}{3^5} + \ldots$, se $|x| < 3$
b) $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2(1+\frac{x}{2})} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^3} - \frac{x^3}{2^4} + \frac{x^4}{2^5} - \ldots$, se $|x| < 2$
c) $\frac{5}{2-3x} = \frac{5}{2(1-\frac{3x}{2})} = \frac{5}{2} + \frac{5\cdot 3x}{2^2} + \frac{5\cdot 3^2x^2}{2^3} + \frac{5\cdot 3^3x^3}{2^4} + \frac{5\cdot 3^4x^4}{2^5} + \ldots$, se $|x| < \frac{2}{3}$
d) $\frac{1}{6-x-x^2} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3(1+\frac{x}{3})} + \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})}\right) = \frac{1}{6} + \frac{x}{36} + \frac{7x^2}{216} + \frac{13x^3}{1296} + \frac{55x^4}{7776} + \frac{133x^5}{46656} + \ldots$, se $|x| < 2$
e) $x^3 \operatorname{arctg} x = x^4 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{5} - \frac{x^{10}}{7} + \frac{x^{12}}{9} - \ldots$, se $|x| < 1$
f) $x^2 \ln(5-x) = -x^2\int_0^x \frac{1}{5-x}\,\mathrm{d}x + x^2\ln 5 = x^2 \ln 5 - \frac{x^3}{1\cdot 5} - \frac{x^4}{2\cdot 5^2} - \frac{x^5}{3\cdot 5^3} - \frac{x^6}{4\cdot 5^4} - \frac{x^7}{5\cdot 5^5}\ldots$, se $|x| < 5$
g) $\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + \ldots$, se $|x| < 1$
h) $\frac{-1}{1-x^4} = -1 - x^4 - x^8 - x^{12} - x^{16} - x^{20} - \ldots$, se $|x| < 1$
i) $\frac{x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = 1 - 2x^3 + 3x^5 - 4x^7 + 5x^9 - 6x^{11} + \ldots$, se $|x| < 1$
j) $\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \ldots$, se $|x| < 1$
k) $\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{-1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{1}{1-x} = \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{4} + \frac{7x^3}{8} + \frac{15x^4}{16} + \frac{31x^5}{32} + \ldots$, se $|x| < 1$
l) $\operatorname{arctg}(x-2) = (x-2) - \frac{(x-2)^3}{3} + \frac{(x-2)^5}{5} - \frac{(x-2)^7}{7} - \ldots$, se $1 < x < 3$

19) $e^{-1/2}$

20) A partir da série geométrica $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ calcule sua derivada, substitua $x = 2$ e divida por 2.

21) $\frac{d}{dx}(\frac{e^x-1}{x}) = \frac{d}{dx}(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + \ldots) \Rightarrow \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!}x + \frac{3}{4!}x^2 + \frac{4}{5!}x^3 + \ldots$ Daí, é só substituir $x = 1$.

22) $\frac{d}{dx}(x^2e^{-x}) = \frac{d}{dx}(x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^6}{4!} + \ldots) \Rightarrow (2xe^{-x} - x^2e^{-x}) - (2x - 3x^2) = \frac{4}{2!}x^3 - \frac{5}{3!}x^4 + \frac{6}{4!}x^5 + \ldots$ Daí, é só substituir $x = 2$.

23) $\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^3}{2!}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^4}{3!}\,\mathrm{d}x + \ldots \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{1!\cdot 3} + \frac{1}{2!\cdot 4} + \frac{1}{3!\cdot 5} + \ldots}_{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n+2)}}$

24) a) $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \ldots$
b) $e^{x+4} = e^4 + e^4x + \frac{e^4x^2}{2!} + \frac{e^4x^3}{3!} + \frac{e^4x^4}{4!} + \frac{e^4x^5}{5!}\ldots$

c) $x\cos x = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + \frac{x^9}{8!} - \frac{x^{11}}{10!} + \dots$
d) $x^2 \operatorname{arctg} x = x^3 - \frac{x^5}{3} + \frac{x^7}{5} - \frac{x^9}{7} + \frac{x^{11}}{9} - \frac{x^{13}}{11} + \dots$
e) $x^3 \operatorname{sen} x = x^4 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \frac{x^{10}}{7!} + \frac{x^{12}}{9!} - \dots$
f) $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \frac{x^{10}}{11!} + \dots$
g) $\cos 3x = 1 - \frac{3^2x^2}{2!} + \frac{3^4x^4}{4!} - \frac{3^6x^6}{6!} + \frac{3^8x^8}{8!} - \frac{3^{10}x^{10}}{10!} + \dots$
h) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3x^4}{4!} + \frac{2^5x^6}{6!} - \frac{2^7x^8}{8!} + \frac{2^9x^{10}}{10!} - \frac{2^{11}x^{12}}{12!} + \dots$
i) $\cos^2 5x = 1 - \frac{50x^2}{2!} + \frac{5000x^4}{4!} - \frac{500000x^6}{6!} + \frac{50000000x^8}{8!} - \frac{5000000000x^{10}}{10!} + \dots$
j) $\frac{\operatorname{arctg} 2x}{x} = 2 - \frac{8x^2}{3} + \frac{32x^4}{5} - \frac{128x^6}{7} + \frac{512x^8}{9} - \frac{2048x^{10}}{11} + \dots$
k) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!} + \dots$
l) $\operatorname{senh} 4x = 4x + \frac{4^3x^3}{3!} + \frac{4^5x^5}{5!} + \frac{4^7x^7}{7!} + \frac{4^9x^9}{9!} + \frac{4^{11}x^{11}}{11!} + \dots$
m) $\operatorname{arcsen} x = x + \frac{1x^3}{3\cdot 2^1\cdot 1!} + \frac{1\cdot 3x^5}{5\cdot 2^2\cdot 2!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{7\cdot 2^3\cdot 3!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7x^9}{9\cdot 2^4\cdot 4!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9x^{11}}{11\cdot 2^5\cdot 5!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11x^{13}}{13\cdot 2^6\cdot 6!} + \dots$
n) $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{3^2\cdot 2!} + \frac{2\cdot 5x^3}{3^3\cdot 3!}x^3 - \frac{2\cdot 5\cdot 8x^4}{3^4\cdot 4!} + \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11x^5}{3^5\cdot 5!} - \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdot 14x^7}{3^7\cdot 7!} + \dots$
o) $\frac{1}{\sqrt[5]{1+x}} = 1 - \frac{x}{5} + \frac{1\cdot 6x^2}{5^2\cdot 2!} - \frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot x^3}{5^3\cdot 3!} + \frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot 16x^4}{5^4\cdot 4!} - \frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot 16\cdot 21x^5}{5^5\cdot 5!} + \dots$
p) $\int_0^x \operatorname{sen}(t^3)\,\mathrm{d}t = \frac{x^4}{4} - \frac{x^{10}}{10\cdot 3!} + \frac{x^{16}}{16\cdot 5!} - \frac{x^{22}}{22\cdot 7!} + \frac{x^{28}}{28\cdot 9!} - \dots$
q) $\int_0^x \frac{1}{64+t^6}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{64} - \frac{x^7}{64\cdot 7\cdot 2^6} + \frac{x^{13}}{64\cdot 13\cdot 2^{12}} - \frac{x^{19}}{64\cdot 19\cdot 2^{18}} + \frac{x^{25}}{64\cdot 25\cdot 2^{24}} - \dots$
r) $\int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t = x - \frac{x^3}{3\cdot 4^1\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 4^2\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 4^3\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4^4\cdot 4!} - \frac{x^{11}}{11\cdot 4^5\cdot 5!} + \dots$
s) $\frac{1}{\sqrt[3]{8+x}} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\cdot 24\cdot 1!} + \frac{1\cdot 4x^2}{2\cdot 24^2\cdot 2!} - \frac{1\cdot 4\cdot 7x^3}{2\cdot 24^3\cdot 3!} + \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10x^4}{2\cdot 24^4\cdot 4!} - \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot 13x^5}{2\cdot 24^5\cdot 5!} + \dots$
t) $\int_0^x \operatorname{arctg}(t^4)\,\mathrm{d}t = \frac{x^5}{5\cdot 1} - \frac{x^{13}}{13\cdot 3} + \frac{x^{21}}{21\cdot 5} - \frac{x^{29}}{29\cdot 7} + \frac{x^{37}}{37\cdot 9} - \dots$

25) $\sqrt{x^3} = \sqrt{8} + \frac{3\sqrt{8}}{2^2}(x-2) + \frac{3\cdot 1\cdot\sqrt{8}}{2!\cdot 2^3}(x-2)^2 + \frac{3\cdot 1\cdot(-1)\cdot\sqrt{8}}{3!\cdot 2^4}(x-2)^3 + \dots$

26) $e^x = e^3 + e^3(x-3) + \frac{e^3}{2!}(x-3)^2 + \frac{e^3}{3!}(x-3)^3 + \frac{e^3}{4!}(x-3)^4 + \dots$

27) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2!} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^4}{4!} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^5}{5!} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^6}{6!} + \dots$

28) $3,14159268$

29) $1,64872127$

30) $f^{(100)}(0) = 0,\ \ f^{(101)}(0) = 101!$

31) $f^{(2017)}(0) = 0,\ \ f^{(2018)}(0) = 4070306$

32) $0,12415085$