SÉRIES E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

resumos e exercícios resolvidos – parte 2 de 3

1 Resumos

1.1 Séries de MacLaurin e de Taylor

Série de MacLaurin:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Série de Taylor em torno de $x = a$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

1.2 Séries de potências básicas

Algumas séries de MacLaurin básicas estão listadas a seguir. Essas séries podem ser usadas para obtenção de outras séries através de operações ou substituições realizadas com seus termos.

- Série geométrica: $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \ldots,$ se $|x| < 1$
- Exponencial: $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots,$ se $x \in \mathbb{R}$
- Seno: $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$ se $x \in \mathbb{R}$
- Cosseno: $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$ se $x \in \mathbb{R}$
- Arco-tangente: $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$ se $|x| < 1$
- Logaritmo natural: $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots,$ se $|x| < 1$
- Série binomial: $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}x^4 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{5!}x^5 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!} + \ldots,$ se $|x| < 1$

1.3 Raio e intervalo de convergência e operações com séries

O raio de convergência R de uma série de potências $\displaystyle\sum_{k=s}^{\infty} c_k(x-a)^k$ pode ser calculado pela fórmula

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$$

e, nesse caso, o intervalo de convergência é um intervalo fechado $[a-R,\, a+R]$, ou um intervalo aberto $]a-R,\, a+R[$, ou um intervalo semi-fechado do tipo $[a-R,\, a+R[$ ou $]a-R,\, a+R]$.

Observação: Se a série de potências for $\sum_{k=s}^{\infty} c_k (x-a)^{mk}$, então seu raio de convergência é dado pela fórmula

$$R = \sqrt[m]{\lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|}.$$

No entanto, o caso que aparece com maior frequência é o caso $m = 1$, ou seja, o caso da fórmula anterior para R .

Diversas operações podem ser realizadas com uma série de potências. Por exemplo, dada uma série, podemos calcular derivadas ou calcular integrais de todos seus termos que o raio de convergência se mantém inalterado.

2 Exercícios da 2^a lista de exercícios

15) Determine o domínio da função

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{(2k-2)!} x^k$$

Solução: Seja $u_k = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{(2k-2)!} x^k$. Então $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)\cdot(2(k+1)-1)}{(2(k+1)-2)!} x^{k+1}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{(2k-2)!} x^k}$, ou seja,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)\cdot(2k+1)}{(2k)!} \cdot \frac{(2k-2)!}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)} x = \frac{(2k+1)x}{(2k)(2k-1)} = \frac{(2k+1)x}{4k^2-2k}.$$

Como $\rho = \lim_{k\to\infty} |\frac{u_{k+1}}{u_k}| = |x| \lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{4k^2-2k} = 0 < 1$, temos que a série dada converge para todo valor de x, ou seja, o domínio da função é $\mathbb{R}$.

Observação: *Determinar o domínio de uma função definida por uma série de potências é o mesmo que determinar o intervalo de convergência da série e, nesse caso, o raio de convergência também pode ser calculado pela fórmula*

$$R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{(2k-2)!}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)\cdot(2(k+1)-1)}{(2(k+1)-2)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{4k^2-2k}{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{4k^2}{2k} = \lim_{k\to\infty} 2k = \infty.$$

20) Usando um desenvolvimento em série de potências de x para $\frac{1}{(1-x)^2}$, mostre que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = 2.$

Solução: Supondo $|x| < 1$ e derivando termo a termo a série geométrica $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots$, obtemos:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots$$

Substituindo $x = \frac{1}{2}$ na série anterior:

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 + 4 \cdot (\frac{1}{2})^3 + 5 \cdot (\frac{1}{2})^4 + \dots$$

que equivale a

$$4 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 + 4 \cdot (\frac{1}{2})^3 + 5 \cdot (\frac{1}{2})^4 + \dots$$

Dividindo todos os termos por 2, obtemos finalmente que

$$2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}.$$

Observação: *podemos substituir x por qualquer valor do intervalo aberto $]-1,\ 1[$, mas somente $x = \frac{1}{2}$ leva ao resultado desejado.*

21) Encontre uma série de potências para representar a função $\dfrac{e^x - 1}{x}$ e, derivando termo a termo, mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$.

Solução: Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$ Subtraindo 1 dos dois membros e dividindo por x, obtemos:

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + \dots$$

Derivando termo a termo:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \frac{e^x \cdot x - (e^x - 1) \cdot 1}{x^2} = 0 + \frac{1}{2!} + \frac{2x}{3!} + \frac{3x^2}{4!} + \frac{4x^3}{5!} + \dots$$

Escolhendo $x = 1$, obtemos finalmente:

$$\frac{e^1 \cdot 1 - (e^1 - 1) \cdot 1}{1^2} = 1 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

Observação: *Podemos escolher qualquer valor não nulo para x. Cada valor escolhido, leva a um resultado diferente. Por tentativa, podemos observar que somente $x = 1$ leva ao resultado desejado.*

22) Encontre uma série de potências para representar a função $x^2 e^{-x}$ e, derivando termo a termo, mostre que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+2) 2^{n+1}}{n!} = 8$.

Solução: A partir de $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots,\ \forall x \in \mathbb{R}$, multiplicando por x^2 obtemos:

$$x^2 e^{-x} = x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^6}{4!} - \dots$$

Derivando dos dois lados da equação com relação a x, obtemos:

$$2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 2x - 3x^2 + \frac{4x^3}{2!} - \frac{5x^4}{3!} + \frac{6x^5}{4!} - \dots$$

Para obter o resultado mostrado no enunciado da questão, devemos substituir x por 2 na série anterior:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot e^{-2} - 2^2e^{-2}}_{=0} = \underbrace{2 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2}_{=-8} + \underbrace{\frac{4 \cdot 2^3}{2!} - \frac{5 \cdot 2^4}{3!} + \frac{6 \cdot 2^5}{4!} - \dots}_{=\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+2)2^{n+1}}{n!}}$$

que implica

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+2)2^{n+1}}{n!} = \frac{4 \cdot 2^3}{2!} - \frac{5 \cdot 2^4}{3!} + \frac{6 \cdot 2^5}{4!} - \frac{7 \cdot 2^6}{5!} + \dots = 8.$$

23) Integrando de $x = 0$ até $x = 1$ uma série de potências representando a função xe^x, mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{1}{2}$.

Solução: Como $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$, temos

$$xe^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} \dots$$

Calculando a integral de 0 a 1 de todos os termos da série anterior:

$$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 xdx + \int_0^1 x^2dx + \int_0^1 \frac{x^3}{2!}dx + \int_0^1 \frac{x^4}{3!}dx + \int_0^1 \frac{x^5}{4!}dx + \dots,$$

ou seja,

$$[xe^x - e^x]_0^1 = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{1! \cdot 3} + \frac{1}{2! \cdot 4} + \frac{1}{3! \cdot 5} + \frac{1}{4! \cdot 6} + \dots$$

que implica

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1! \cdot 3} + \frac{1}{2! \cdot 4} + \frac{1}{3! \cdot 5} + \frac{1}{4! \cdot 6} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$$

Observação: *$\int xe^x dx$ é calculada usando-se integração por partes com $u = x$, $dv = e^x dx$ e obtemos o seguinte: $\int xe^x dx = \int udv = uv - \int vdu = xe^x - e^x$.*

25) Obtenha o desenvolvimento em série de Taylor em torno de $x = 2$ da função $f(x) = \sqrt{x^3}$.
Sugestão: $x = 2 + (x - 2)$

Solução:

$$f(x) = \sqrt{x^3} = \sqrt{(2 + (x-2))^3} = \sqrt{2^3 \left(1 + \frac{x-2}{2}\right)^3} = \sqrt{8} \left(1 + \frac{x-2}{2}\right)^{3/2}$$

Usando o desenvolvimento da série binomial $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$ com $m = \frac{3}{2}$ e $\frac{x-2}{2}$ no lugar de x, temos:

$$f(x) = \sqrt{8}\left[1 + \frac{3}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right) + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)(\frac{3}{2}-2)}{3!}\left(\frac{x-2}{2}\right)^3 + \dots\right],$$

ou seja,

$$f(x) = \sqrt{8} + \frac{3\sqrt{8}}{2^2}(x-2) + \frac{3\cdot 1\cdot\sqrt{8}}{2!\cdot 2^3}(x-2)^2 + \frac{3\cdot 1\cdot(-1)\cdot\sqrt{8}}{3!\cdot 2^4}(x-2)^3 + \dots$$

26) Obtenha o desenvolvimento em série de Taylor em torno de $x = 3$ da função $f(x) = e^x$. *Sugestão:* $x = 3 + (x-3)$

Solução:

$$f(x) = e^x = e^{3+(x-3)} = e^3 \cdot e^{x-3} = e^3 \cdot \left(1 + (x-3) + \frac{(x-3)^2}{2!} + \frac{(x-3)^3}{3!} + \dots\right)$$

$$\Longrightarrow f(x) = e^3 + e^3(x-3) + \frac{e^3}{2!}(x-3)^2 + \frac{e^3}{3!}(x-3)^3 + \frac{e^3}{4!}(x-3)^4 + \dots$$

28) Usando a fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{239}$$

e os 5 primeiros termos do desenvolvimento em série de $\mathrm{arctg}\,x$, obtenha uma aproximação para o valor de π. Use 8 casas decimais em todos os cálculos.

Solução: A partir de $\mathrm{arctg}\,x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}$, obtemos:
$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{5}\right)^9\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{139}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{239}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{239}\right)^9\right)$,
ou seja, $\frac{\pi}{4} \approx 0,78539817 \Rightarrow \pi \approx 3,14159268$.

Observação: Esse valor aproximado de π está correto até a 7^a casa decimal e foi obtido usando-se apenas operações básicas com frações. Em 1706, esse tipo de cálculo foi utilizado com 70 termos da série para se calcular o valor de π com 100 casas decimais.

29) A partir do desenvolvimento em série de e^x, calcule o valor de $e^{1/2}$ com um erro menor do que $\varepsilon = 10^{-6}$.

Solução: Como $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$, temos $e^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \dots$ e $e^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{48} + \dots$. Observamos dessa forma que a série de $e^{-1/2}$ é alternada e por isso é mais fácil calcular o erro da aproximação com ela. Sendo assim, vamos calcular inicialmente $e^{-1/2}$ e, no final, usaremos que $e^{1/2} = \frac{1}{e^{-1/2}}$.

O módulo do termo geral do desenvolvimento em série de e^x com $x = -1/2$ é $\varepsilon(k) = \left|\frac{(-1/2)^k}{k!}\right|$. Calculando $\varepsilon(k)$ atribuindo diversos valores a $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ chegamos a $\varepsilon(8) = 9,68 \cdot 10^{-8} < 10^{-6}$. Portanto, devemos somar os 7 primeiros termos da série para obtermos um erro menor do que 10^{-6}.

$$e^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} - \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1}{2^4 \cdot 4!} - \frac{1}{2^5 \cdot 5!} + \frac{1}{2^6 \cdot 6!} - \frac{1}{2^7 \cdot 7!} = \frac{78257}{129024} = 0,60653056$$

Portanto, $e^{1/2} = \sqrt{e} = 1/0,60653056 = 1,64872127$.

30) Determine a série de MacLaurin de $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ e calcule $f^{(100)}(0)$ e $f^{(101)}(0)$.

Solução: A partir da série geométrica $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$, substituindo x por x^2 e, depois, multiplicando por x, obtemos o seguinte desenvolvimento em série de potências de x:

$$\frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + \dots$$

De um modo geral, o coeficiente de x^k na série de MacLaurin de $f(x)$ é igual a $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Portanto, se $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, então:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} 1 & \text{, se} \quad k \text{ for ímpar} \\ 0 & \text{, se} \quad k \text{ for par} \end{cases}$$

que é equivalente a

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} k! & \text{, se} \quad k \text{ for ímpar} \\ 0 & \text{, se} \quad k \text{ for par} \end{cases}$$

Concluímos assim que $f^{(100)}(0) = 0$ e $f^{(101)}(0) = 101!$.

3 Exercícios adicionais

A) A partir do desenvolvimento da série binomial da função $(1+x)^m$, obtenha os 6 primeiros termos do desenvolvimento em série das funções $F(x) = \sqrt[5]{32 + x^2}$ e $G(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt[5]{32 + t^2}\, dt$. Obtenha também o intervalo de convergência dessas séries.

Solução: Como $\sqrt[5]{32 + x^2} = \sqrt[5]{32(1 + \frac{x^2}{32})} = \sqrt[5]{32}\sqrt[5]{1 + \frac{x^2}{32}} = 2\sqrt[5]{1 + \frac{x^2}{32}} = 2(1 + \frac{x^2}{32})^{1/5}$, a série de $F(x)$ pode ser obtida fazendo-se $m = \frac{1}{5}$ e substituindo-se x por $\frac{x^2}{32}$ na série binomial:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \frac{m(m-1)(m-3)}{4!}x^4 + \cdots$$

$$\Rightarrow F(x) = 2\left[1 + \frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{32}\right) + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)}{2!}\left(\frac{x^2}{32}\right)^2 + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)(\frac{1}{5}-2)}{3!}\left(\frac{x^2}{32}\right)^3\right.$$
$$\left. + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)(\frac{1}{5}-2)(\frac{1}{5}-3)}{4!}\left(\frac{x^2}{32}\right)^4 + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)(\frac{1}{5}-2)(\frac{1}{5}-3)(\frac{1}{5}-4)}{5!}\left(\frac{x^2}{32}\right)^5 + \cdots\right]$$

$$F(x) = 2 + \frac{2\cdot 1}{5\cdot 32}x^2 - \frac{2\cdot 1\cdot 4}{2!\cdot 5^2\cdot 32^2}x^4 + \frac{2\cdot 1\cdot 4\cdot 9}{3!\cdot 5^3\cdot 32^3}x^6 - \frac{2\cdot 1\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{4!\cdot 5^4\cdot 32^4}x^8$$
$$+ \frac{2\cdot 1\cdot 4\cdot 9\cdot 14\cdot 19}{5!\cdot 5^5\cdot 32^5}x^{10} - \frac{2\cdot 1\cdot 4\cdot 9\cdot 14\cdot 19\cdot 24}{6!\cdot 5^6\cdot 32^6}x^{12} + \cdots$$

Calculando-se a integral no intervalo $[0,\, x]$ de todos os termos da série anterior, obtemos:

$$G(x) = \int_0^x F(t)\,dt = \int_0^x 2\,dt + \int_0^x \frac{2\cdot 1}{5\cdot 32}t^2\,dt - \int_0^x \frac{2\cdot 1\cdot 4}{2!\cdot 5^2\cdot 32^2}t^4\,dt + \int_0^x \frac{2\cdot 1\cdot 4\cdot 9}{3!\cdot 5^3\cdot 32^3}t^6\,dt$$
$$- \int_0^x \frac{2\cdot 1\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{4!\cdot 5^4\cdot 32^4}t^8\,dt + \int_0^x \frac{2\cdot 1\cdot 4\cdot 9\cdot 14\cdot 19}{5!\cdot 5^5\cdot 32^5}t^{10}\,dt - \cdots$$

$$G(x) = 2x + \frac{2\cdot 1}{5\cdot 32\cdot 3}x^3 - \frac{2\cdot 1\cdot 4}{2!\cdot 5^2\cdot 32^2\cdot 5}x^5 + \frac{2\cdot 1\cdot 4\cdot 9}{3!\cdot 5^3\cdot 32^3\cdot 7}x^7 - \frac{2\cdot 1\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{4!\cdot 5^4\cdot 32^4\cdot 9}x^9$$
$$+ \frac{2\cdot 1\cdot 4\cdot 9\cdot 14\cdot 19}{5!\cdot 5^5\cdot 32^5\cdot 11}x^{11} - \cdots$$

O intervalo de convergência é formado pelos valores de x que satisfazem a desigualdade $|\frac{x^2}{32}| < 1$ que equivale a $\frac{x^2}{32} < 1$, ou seja, $x^2 < 32$. A solução dessa inequação é $-\sqrt{32} < x < \sqrt{32}$. Logo, o intervalo de convergência das séries é o intervalo aberto $]-\sqrt{32},\, \sqrt{32}\,[$ que é o mesmo que $]-4\sqrt{2},\, 4\sqrt{2}\,[$.

Observação: *Simplificando-se as frações anteriores, obtemos:*

$$F(x) = 2 + \frac{1}{80}x^2 - \frac{1}{6400}x^4 + \frac{3}{1024000}x^6 - \frac{21}{327680000}x^8 + \frac{399}{262144000000}x^{10} - \cdots$$

e

$$G(x) = 2x + \frac{1}{240}x^3 - \frac{1}{32000}x^5 + \frac{3}{7168000}x^7 - \frac{7}{983040000}x^9 + \frac{399}{2883584000000}x^{11} - \cdots$$

No entanto, em geral, essa simplificação é desnecessária.

B) A partir da série geométrica, obtenha o desenvolvimento em série de potências de x da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 11x + 30}$ e determine seu raio de convergência.

Solução: As raízes da equação $x^2 + 11x + 30 = 0$ são $x = -5$ ou $x = -6$. Como consequência disso temos que o polinômio $x^2 + 11x + 30$ pode ser fatorado na forma $(x - (-5))(x - (-6))$, ou seja, $(x + 5)(x + 6)$ e que a fração $\frac{1}{x^2+11x+30}$ pode ser separada em frações parciais do seguinte modo:

$$\frac{1}{x^2 + 11x + 30} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x+6}.$$

A partir daí, obtemos $1 = A(x+6) + B(x+5)$ e atribuindo-se dois valores quaisquer para x (por exemplo, $x = -5$ e $x = -6$), obtemos os valores de A e B: $A = 1$ e $B = -1$. Obtemos dessa forma a seguinte separação em frações parciais:

$$\frac{1}{x^2 + 11x + 30} = \frac{1}{5+x} - \frac{1}{6+x} = \frac{1}{5(1+\frac{x}{5})} - \frac{1}{6(1+\frac{x}{6})}.$$

Utilizando agora a soma da série geométrica de razão $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$$

e substituindo x por $\frac{x}{5}$, depois por $\frac{x}{6}$, obtemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{1+\frac{x}{5}}\right] - \frac{1}{6}\left[\frac{1}{1+\frac{x}{6}}\right] \\ &= \frac{1}{5}\left[1 + \frac{x}{5} + \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{x}{5}\right)^3 + \left(\frac{x}{5}\right)^4 + \cdots\right] - \frac{1}{6}\left[1 + \frac{x}{6} + \left(\frac{x}{6}\right)^2 + \left(\frac{x}{6}\right)^3 + \left(\frac{x}{6}\right)^4 + \cdots\right] \\ &= \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2}\right)x + \left(\frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3}\right)x^2 + \left(\frac{1}{5^4} - \frac{1}{6^4}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^5}\right)x^4 + \left(\frac{1}{5^6} - \frac{1}{6^6}\right)x^5 + \cdots \\ &= \frac{1}{30} + \frac{(6^2 - 5^2)x}{30^2} + \frac{(6^3 - 5^3)x^2}{30^3} + \frac{(6^4 - 5^4)x^3}{30^4} + \frac{(6^5 - 5^5)x^4}{30^5} + \frac{(6^6 - 5^6)x^5}{30^6} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^{k+1} - 5^{k+1}}{30^{k+1}} x^k. \end{aligned}$$

Como na série geométrica devemos ter $|x| < 1$, nas duas séries anteriores devemos ter $|\frac{x}{5}| < 1$ e $|\frac{x}{6}| < 1$ que é o mesmo que $|x| < 5$ e $|x| < 6$. A **interseção** desses dois intervalos é o intervalo formado pelos x que satisfazem $|x| < 5$. Logo, o intervalo de convergência da série de $f(x)$ é $]-5, 5[$. Isso significa que o raio de convergência é igual a 5.

C) A partir do desenvolvimento em série da função seno de x, escreva os seis primeiros termos do desenvolvimento em série de $F(x) = \dfrac{5x - \operatorname{sen} 5x}{x^3}$.

Solução: Como $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$, temos

$$\operatorname{sen} 5x = 5x - \frac{(5x)^3}{3!} + \frac{(5x)^5}{5!} - \frac{(5x)^7}{7!} + \frac{(5x)^9}{9!} - \frac{(5x)^{11}}{11!} + \frac{(5x)^{13}}{13!} - \cdots,$$

e daí,

$$F(x) = \frac{5x - \operatorname{sen} 5x}{x^3} = \frac{\cancel{5x} - \left(\cancel{5x} - \frac{5^3x^3}{3!} + \frac{5^5x^5}{5!} - \frac{5^7x^7}{7!} + \frac{5^9x^9}{9!} - \frac{5^{11}x^{11}}{11!} + \frac{5^{13}x^{13}}{13!} - \cdots\right)}{x^3},$$

ou seja,

$$F(x) = \frac{5^3}{3!} - \frac{5^5x^2}{5!} + \frac{5^7x^4}{7!} - \frac{5^9x^6}{9!} - \frac{5^8x^{11}}{11!} + \frac{5^{10}x^{13}}{13!} - \cdots.$$

Observação: *o raio de convergência dessa série é infinito.*