Raízes quadrada e cúbica de um polinômio

Lenimar Nunes de Andrade
UFPB - João Pessoa, PB

1 de abril de 2011

1 Raiz quadrada de um polinômio

Consideremos $p(x)$ e $r(x)$ polinômios tais que $(r(x))^2 = p(x)$. Neste caso, dizemos que $r(x)$ é a raiz quadrada de $p(x)$ e denotamos isso por $r(x) = \sqrt{p(x)}$. Nem sempre um polinômio tem uma raiz quadrada que também é um polinômio; mas, se $p(x)$ tiver uma raiz quadrada $r(x)$, então $-r(x)$ também é uma outra raiz. Por exemplo, $\sqrt{4x^2 + 12x + 9} = 2x + 3$ ou $-2x - 3$.

O antigo algoritmo para o cálculo da raiz quadrada, bastante conhecido e divulgado antes da popularização do uso de calculadoras e computadores, possui uma versão similar para polinômios de uma ou várias variáveis. Esse algoritmo é baseado em identidade como

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b(b + 2a) + c(c + 2(a + b)) + d(d + 2(a + b + c))$$

e consiste nos seguintes passos:

- Ordenam-se os termos do polinômio de acordo com os expoentes de cada termo. A ordem pode ser, por exemplo, a decrescente dos expoentes.

- Calcula-se o primeiro termo a da raiz quadrada como sendo a raiz quadrada do primeiro termo do polinômio. Eleva-se ao quadrado essa raiz e subtrai-se do polinômio dado.

- Baixam-se os dois termos seguintes do polinômio e divide-se o primeiro desses termos pelo dobro do primeiro termo da raiz; o quociente dessa divisão b é o segundo termo da raiz quadrada.

- Multiplica-se o segundo termo b da raiz pela soma desse termo com o dobro do primeiro termo e o produto, denotado por $b(b+2a)$, é subtraído dos termos baixados no item anterior.

- Baixam-se mais termos do polinômio de modo a ficarem três termos e divide-se o primeiro desses termos pelo dobro do primeiro termo da raiz; o quociente dessa divisão c é o terceiro termo da raiz quadrada.

- Multiplica-se o terceiro termo c da raiz pela soma desse termo com o dobro dos dois primeiros termos encontrados na raiz e o produto, denotado por $c(c + 2(a + b))$, é subtraído dos termos baixados no item anterior.

- Continua-se o procedimento dos itens anteriores enquanto o maior grau dos termos baixados for maior ou igual ao grau da raiz.

O cálculo de raiz quadrada pode ser útil na resolução de outros problemas como fatoração de polinômios e determinação das raízes de equações polinomiais.

Exemplo 1.1 *Vamos calcular a raiz quadrada de* $p(x) = 9x^4 + 30x^3 + 13x^2 - 20x + 4$.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{9x^4 + 30x^3 + 13x^2 - 20x + 4} & 3x^2 + 5x - 2 \\
\hline
-9x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\hline
30x^3 + 13x^2 \qquad\qquad & (6x^2 + 5x) \cdot (5x) = 30x^3 + 25x^2 \\
-30x^3 - 25x^2 \qquad\qquad & (6x^2 + 10x - 2) \cdot (-2) = \\
\hline
-12x^2 - 20x + 4 & \qquad -12x^2 - 20x + 4 \\
12x^2 + 20x - 4 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Uma explicação para a construção desse diagrama é a seguinte:

- *A raiz de* $9x^4$ *é* $3x^2$ *e esse é o primeiro termo da raiz. Eleva-se* $3x^2$ *ao quadrado e subtrai-se de* $p(x)$. *Baixam-se os termos* $30x^3$ *e* $13x^2$.
- *Dividindo-se* $30x^3$ *pelo dobro de* $3x^2$, *obtém-se* $5x$ *que é o segundo termo da raiz.*
- *Calcula-se* $(2 \cdot (3x^2) + 5x) \cdot (5x)$ *e subtrai-se o produto de* $p(x)$.
- *Baixam-se os termos restantes do polinômio e divide-se* $-12x^2$ *por* $6x^2$. *O quociente é* -2 *e é o terceiro termo da raiz.*
- *Calcula-se* $[(2 \cdot (3x^2 + 5x) - 2) \cdot (-2)]$ *e subtrai-se de* $p(x)$ *e obtém-se resto nulo para a raiz.*

Portanto, $\sqrt{9x^4 + 30x^3 + 13x^2 - 20x + 4} = 3x^2 + 5x - 2$. *Um problema que pode ser considerado equivalente a esse é: "Fatore o polinômio* $9x^4 + 30x^3 + 13x^2 - 20x + 4$*" ou "Resolva a equação* $9x^4 + 30x^3 + 13x^2 - 20x + 4 = 0$*". Como* $9x^4 + 30x^3 + 13x^2 - 20x + 4 = (3x^2 + 5x - 2)^2$, *temos que as raízes dessa equação são* $\frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6}$, *ou seja,* $\frac{1}{3}$ *e* -2 *(raízes duplas).*

Exemplo 1.2 *Determinar a raiz quadrada de*

$$9x^6y^2 + 12x^4y^3 + 6x^4y - 6x^3y^2 + 4x^2y^4 + 4x^2y^2 + x^2 - 4xy^3 - 2xy + y^2.$$

Apesar do polinômio deste exemplo ter duas variáveis, ordenamos segundo as potências de x *e procedemos de modo semelhante ao exemplo anterior. A cada passo, baixamos uma quantidade de termos suficiente para efetuar a subtração dos produtos calculados à direita no diagrama.*

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{9x^6y^2 + 12x^4y^3 + 6x^4y - 6x^3y^2 + 4x^2y^4 + 4x^2y^2 + x^2 - 4xy^3 - 2xy + y^2} & 3x^3y + 2xy^2 + x - y \\
\hline
-9x^6y^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & (6x^3y + 2xy^2) \cdot (2xy^2) = 12x^4y^3 + 4x^2y^4 \\
\hline
12x^4y^3 + 6x^4y - 6x^3y^2 + 4x^2y^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & (6x^3y + 4xy^2 + x) \cdot x = 6x^4y + 4x^2y^2 + x^2 \\
-12x^4y^3 \qquad\qquad\qquad - 4x^2y^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\hline
6x^4y - 6x^3y^2 \qquad + 4x^2y^2 + x^2 \qquad\qquad\qquad & (6x^3y + 4xy^2 + 2x - y) \cdot (-y) = \\
-6x^4y \qquad\qquad\qquad - 4x^2y^2 - x^2 \qquad\qquad\qquad & \qquad -6x^3y^2 - 4xy^3 - 2xy + y^2 \\
\hline
-6x^3y^2 \qquad\qquad - 4xy^3 - 2xy + y^2 & \\
6x^3y^2 \qquad\qquad + 4xy^3 + 2xy - y^2 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Dessa forma, concluímos que a raiz quadrada é $3x^3y + 2xy^2 + x - y$.

Exemplo 1.3 *Verifique se o polinômio* $p(x) = 25x^4 + 10x^3 - 29x^2 - 6x + 5$ *pode ser fatorado como um produto de dois polinômios não constantes de coeficientes inteiros. Seguimos o mesmo roteiro descrito anteriormente e construímos o diagrama:*

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{25x^4 + 10x^3 - 29x^2 - 6x + 5} & 5x^2 + x - 3 \\ \cline{2-2}
-25x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & \\ \cline{1-1}
10x^3 - 29x^2 \qquad\quad & (10x^2 + x) \cdot x = 10x^3 + x^2 \\
-10x^3 \quad - x^2 \qquad\quad & \\ \cline{1-1}
-30x^2 - 6x + 5 & (10x^2 + 2x - 3) \cdot (-3) = \\
30x^2 + 6x - 9 & \qquad\qquad -30x^2 - 6x + 9 \\ \cline{1-1}
-4 &
\end{array}
$$

Obtemos dessa forma um resto igual a -4 *no cálculo da raiz quadrada de* $p(x)$*. Isso significa que* $p(x) = (5x^2 + x - 3)^2 + (-4) = ((5x^2 + x - 3) - 2)((5x^2 + x - 3) + 2)$*, ou seja,*

$$p(x) = (5x^2 + x - 5)(5x^2 + x - 1).$$

2 Raiz cúbica de um polinômio

Se $r(x)$ for um polinômio tal que $(r(x))^3 = p(x)$, dizemos que $r(x)$ é a raiz cúbica de $p(x)$ e denotamos isso por $r(x) = \sqrt[3]{p(x)}$. Um algoritmo para o cálculo da raiz cúbica de um polinômio $p(x)$ é baseado em identidade do tipo

$$
\begin{aligned}
(a + b + c + d)^3 = a^3 + b(b^2 + 3a^2 + 3ab) + c(c^2 + 3(a + b)^2 + 3(a + b)c) \\
+ d(d^2 + 3(a + b + c)^2 + 3(a + b + c)d)
\end{aligned}
$$

e está descrito a seguir.

- Ordenam-se os termos do polinômio de acordo com os expoentes de cada termo.
- Calcula-se a raiz cúbica a do primeiro termo, que será o primeiro termo da raiz do polinômio. Eleva-se esse primeiro termo ao cubo e subtrai-se do polinômio.
- Baixam-se os três termos seguintes do polinômio e divide-se o primeiro termo baixado por $3a^2$, o triplo do quadrado do termo já encontrado na raiz; o quociente dessa divisão b é o segundo termo da raiz.
- Calcula-se a soma dos seguintes produtos:

  1) b^3, o cubo do segundo termo da raiz;
  2) $3a^2b$, o triplo do quadrado do primeiro termo da raiz pelo segundo termo;
  3) $3ab^2$, o triplo do primeiro termo pelo quadrado do segundo termo;

  e subtrai-se a soma $b^3 + 3a^2b + 3ab^2$ do polinômio.
- Baixam-se termos do polinômio em quantidade suficiente para efetuar a subtração da soma calculada no item anterior e divide-se o primeiro termo da diferença pelo triplo do quadrado do primeiro termo já encontrado na raiz. O quociente encontrado c é o terceiro termo da raiz.

- Calcula-se a soma dos produtos c^3, $3(a+b)^2$ c e $3(a+b)c^2$ e subtrai-se a soma do polinômio.
- Continua-se o procedimento dos itens anteriores enquanto o maior grau dos termos baixados for maior ou igual ao grau da raiz.

Exemplo 2.1 *Calcular a raiz cúbica de*

$$p(x) = x^6 + 9x^5 + 12x^4 - 63x^3 - 60x^2 + 225x - 125$$

Segundo o algoritmo descrito, calculamos o primeiro termo da raiz como sendo $\sqrt[3]{x^6} = x^2$*, o segundo termo da raiz é o quociente da divisão de* $9x^5$ *por* $3x^4$ *e o terceiro termo é o quociente de* $-15x^4$ *por* $3x^4$*.*

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt[3]{x^6 + 9x^5 + 12x^4 - 63x^3 - 60x^2 + 225x - 125} & x^2 + 3x - 5 \\
-x^6 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad & \\
\hline
9x^5 + 12x^4 - 63x^3 \qquad\qquad\qquad & 3(x^2)^2 = 3x^4 \\
-9x^5 - 27x^4 - 27x^3 \qquad\qquad\qquad & 3(x^2)^2 \cdot (3x) = 9x^5 \\
\hline
-15x^4 - 90x^3 - 60x^2 + 225x - 125 & 3(x^2) \cdot (3x)^2 = 27x^4 \\
15x^4 + 90x^3 + 60x^2 - 225x + 125 & (3x)^3 = 27x^3 \\
\hline
0 & 3(x^2+3x)^2 = 3x^4 + 18x^3 + 27x^2 \\
 & 3(x^2+3x)^2 \cdot (-5) = -15x^4 - 90x^3 - 135x^2 \\
 & 3(x^2+3x) \cdot (-5)^2 = 75x^2 + 225x \\
 & (-5)^3 = -125
\end{array}
$$

Concluímos assim que $p(x) = (x^2 + 3x - 5)^3$*, ou seja,* $\sqrt[3]{p(x)} = x^2 + 3x - 5$*.*

3 Exercícios

1) Determine a raiz quadrada de

$$4x^2y^{-2} - 20xy^{-1} + 9x^{-2}y^2 - 30x^{-1}y + 37.$$

2) Determine todas as raízes da equação

$$4x^4 + 12x^3 - 35x^2 - 66x + 121 = 0.$$

3) Determine todas as raízes da equação

$$x^4 - 2x^3 - (2i + 12)x^2 - 2ix^3 + (8 + 16i)x + 32 + 24i = 0.$$

4) Determine todas as raízes da equação

$$x^3 + (-6 + 3i)x^2 + (9 - 12i)x - 2 + 11i = 0.$$

5) Determine todas as raízes da equação

$$64x^6 + 384x^5 + 1008x^4 + 1472x^3 + 1260x^2 + 600x + 125 = 0.$$

6) Determine a raiz cúbica de

$$x^3y^3 + 6x^3y^2 - 21x^2y^2 + 12x^3y - 84x^2y + 147xy + 8x^3 - 84x^2 + 294x - 343.$$

7) Verifique se é possível escrever o polinômio

$$p(x) = x^6 + 6x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 126x^2 - 180x + 225$$

como um produto de dois polinômios não constantes de coeficientes inteiros.

8) É possível a descrição de um algoritmo semelhante aos anteriores para o cálculo de $\sqrt[n]{p(x)}$ com $n > 3$. A partir de uma identidade como

$$(a + b + c + d)^4 = a^4 + b(b^3 + 4ab^2 + 6a^2b + 4a^3) + \cdots$$

descreva um algoritmo para o cálculo da raiz quarta de um polinômio.

Referências

[1] M. Barone Jr., *"O algoritmo da raiz quadrada"*, Revista do Professor de Matemática 2, 1983.

[2] A. Baldor, *"Algebra"*, Compania Cultural Editora y Distribuidora de Textos Americanos S. A, 1941.