

Cotas das raízes de um polinômio

Lenimar Nunes de Andrade
UFPB – João Pessoa, PB
e-mail: lenimar@mat.ufpb.br

5 de fevereiro de 2000

1 Introdução

Equações polinomiais surgem na resolução de diversos tipos de problemas, sejam eles problemas algébricos, geométricos ou em outras ciências. Muitas técnicas de resolução desse tipo de equação exigem que se dê inicialmente uma estimativa (um “*chute*”) para uma raiz, mesmo que seja uma estimativa grosseira (veja por exemplo [1]). Nesses casos, se soubermos onde as raízes da equação se encontram, fica mais fácil fazer essa estimativa inicial.

O objetivo deste artigo é mostrar fórmulas simples e eficientes que permitam calcular um intervalo da reta real ou uma região do plano complexo que contenham todas as raízes da equação, sem a necessidade de resolvê-la.

Seja $p(x) = a_0x^n + a_rx^{n-r} + a_{r+1}x^{n-r-1} + \dots + a_sx^{n-s} + a_n$ um polinômio de coeficientes complexos com $a_0 \neq 0$ e $a_r \neq 0$. Se z for uma raiz (real ou complexa) de $p(x)$, então vamos mostrar que

$$|z| < 1 + \sqrt[r]{\max_{k \in \{r, \dots, n\}} \left| \frac{a_k}{a_0} \right|}.$$

Observe que o índice r do radical acima é igual à diferença entre os expoentes das duas maiores potências de x do polinômio.

2 Demonstrando a fórmula acima

Em linhas gerais, a demonstração consiste em observar que se o módulo de um número x for maior do que ou igual a um certo valor, então x não pode ser raiz do polinômio. Logo, toda raiz do polinômio deverá ter módulo menor do que esse valor.

Inicialmente, observe que $p(x)$ pode ser escrito na forma

$$p(x) = a_0x^n \left(1 + \frac{a_r}{a_0x^r} + \dots + \frac{a_n}{a_0x^n} \right)$$

Usando as desigualdades $|a + b| \geq |a| - |b|$ e $|a + b| \leq |a| + |b|$, obtemos

$$|p(x)| \geq |a_0x^n| \left(1 - \left| \frac{a_r}{a_0x^r} + \dots + \frac{a_n}{a_0x^n} \right| \right) \geq |a_0x^n| \left(1 - \left| \frac{a_r}{a_0x^r} \right| - \dots - \left| \frac{a_n}{a_0x^n} \right| \right).$$

Seja $A = \max_{k \in \{r, \dots, n\}} \left| \frac{a_k}{a_0} \right|$. Se $x \in \mathbb{C}$ for tal que $|x| \geq 1 + \sqrt[r]{A}$, então

$$|p(x)| \geq |a_0 x^n| \left(1 - \frac{A}{|x^r|} - \dots - \frac{A}{|x^n|} \right) > |a_0 x^n| \left(1 - \underbrace{\frac{A}{|x^r|} - \dots - \frac{A}{|x^n|} - \frac{A}{|x^{n+1}|} - \frac{A}{|x^{n+2}|} - \dots}_{\text{P.G. de razão } 1/|x|} \right)$$

Calculando o limite da soma da progressão geométrica acima, obtemos:

$$|p(x)| > |a_0 x^n| \left(1 - \frac{A/|x^r|}{1 - 1/|x|} \right) = \frac{|a_0 x^{n-r+1}|}{|x| - 1} (|x|^{r-1}(|x| - 1) - A) \geq \frac{|a_0 x^{n-r+1}|}{|x| - 1} ((|x| - 1)^r - A)$$

Portanto, $|x| \geq 1 + \sqrt[r]{A} \Rightarrow (|x| - 1)^r - A \geq 0 \Rightarrow |p(x)| > 0$. Assim, o módulo de qualquer raiz de $p(x)$ não pode ser maior do que ou igual a $1 + \sqrt[r]{A}$ e a fórmula fica demonstrada. Neste caso, dizemos que $1 + \sqrt[r]{A}$ é uma *cota superior* para as raízes de $p(x)$.

3 Uma cota inferior para as raízes

Suponhamos a_n e a_s diferentes de 0. Usando a fórmula anterior, podemos determinar um valor para o qual as raízes não poderão ser inferiores a esse valor.

Para isto, basta lembrar que se definirmos um polinômio

$$q(x) = a_n x^n + a_s x^s + \dots + a_r x^r + a_0$$

construído invertendo-se a ordem dos coeficientes de $p(x)$, então as raízes de $q(x)$ são da forma $1/z$ onde z é uma raiz de $p(x)$. Usando a fórmula anterior, obtemos $M > 0$ tal que $|1/z| < M$, e daí, $|z| > 1/M$. Neste caso, $1/M$ é dito uma *cota inferior* para as raízes de $p(x)$. Desse modo, concluímos que toda raiz z de $p(x)$ satisfaz

$$|z| > \frac{1}{1 + \sqrt[n-s]{\max_{k \in \{0, \dots, s\}} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|}}.$$

4 Exemplos

A seguir, alguns exemplos usando as fórmulas das seções anteriores.

Exemplo 4.1 Consideremos a equação $p(x) = x^4 - 10x^2 + 9 = 0$. Neste caso, $r = 4 - 2 = 2$ e, se z for uma raiz de $p(x)$, então $|z| < 1 + \sqrt{\max \left\{ \frac{|-10|}{|1|}, \frac{|9|}{|1|} \right\}}$, isto é, $|z| < 1 + \sqrt{10} \approx 4,162$.

Podemos determinar facilmente as raízes dessa equação biquadrada que são 1, -1, 3 e -3. Observe que os módulos dessas raízes são menores do que 4,162.

Exemplo 4.2 Na equação $3x^7 + 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4 = 0$ temos $n = 7$ e $r = n - 4 = 3$. Portanto, se z for uma raiz qualquer da equação então

$$|z| < 1 + \sqrt[3]{\max \left\{ \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right\}} = 1 + \sqrt[3]{\frac{5}{3}} \approx 2,186.$$

Como a menor potência de x é x^2 , temos $n - s = 2$ e daí

$$|z| > \frac{1}{1 + \sqrt{\max \left\{ \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{5}{4}, \frac{1}{4} \right\}}} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{5}{4}}} \approx 0,472$$

Exemplo 4.3 Consideremos uma equação polinomial na qual todos os seus coeficientes não nulos têm módulos iguais a 1 (não importando qual seja o grau da equação, nem se seus coeficientes são reais ou complexos). Então, usando as fórmulas mostradas anteriormente, obtemos que todas as suas raízes têm módulos no intervalo aberto $]1/2, 2[$. Em particular, qualquer raiz z da equação

$$x^{10} - ix^9 + x^7 + ix^4 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x^3 + 1 = 0$$

satisfaz às desigualdades $\frac{1}{2} < |z| < 2$.

Observação

A título de curiosidade, informamos que as raízes da equação do exemplo 4.2 são aproximadamente iguais a:

$$\begin{array}{ll} -0,8631848306 & \\ -1,1764192030 & \\ 1,1197549528 & \\ 0,5130729565 & \pm 0,7723897749 i \\ -0,0531484161 & \pm 1,1665904689 i \end{array}$$

e as da equação do exemplo 4.3 são aproximadamente:

$$\begin{array}{ll} 0,6445929831 & + 1,1638426393 i \\ 0,0709910837 & + 1,2567363572 i \\ -0,4861832688 & + 0,6793098633 i \\ -1,0639917595 & + 0,4724138411 i \\ -0,9530342304 & - 0,1862748330 i \\ -0,5498785041 & - 0,7208172043 i \\ 0,0745629415 & - 0,8339945922 i \\ 0,5523845918 & - 0,9009746764 i \\ 1,0081836935 & - 0,2273410141 i \\ 0,7023724693 & + 0,2970996191 i \end{array}$$

Referências

- [1] J. P. Q. Carneiro, *Equações algébricas de grau maior que dois: assunto para o ensino médio?*, Revista do Professor de Matemática 40, págs. 31–40, 1999.
- [2] D. Faddiev, I. Sominski, *Problemas de Álgebra Superior*, Editora Mir, Moscou, 1980.
- [3] S. Farias, *Estudo Sucinto da Resolução Numérica das Equações*, Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1952.