INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR
2^a LISTA DE EXERCÍCIOS – MAIO/2020

22) Verifique se cada $T : U \longrightarrow V$ a seguir é uma transformação linear.

a) $U = V = \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x - y,\ x + y)$

b) $U = V = \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y,\ 1)$

c) $U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}$, $T(x, y, z) = 3x - 2y + z$

d) $U = \mathbb{R}^2$, $V = M(2, 2)$, $T(x, y) = \begin{bmatrix} x + y & 0 \\ y & 2x \end{bmatrix}$

e) $U = V = \mathbb{R}$, $T(x) = x - x^2$

f) $U = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $T(x) = (2x,\ 3x,\ 4x)$

23) Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $T(1, 0, 0) = (2, 3)$, $T(1, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 1, 1) = (1, 0)$. Calcule $T(2, -3, 5)$.

24) Determine $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = (1, -1)$ sabendo que T é uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ tal que $T(3, 0) = (1, 3)$ e $T(0, 5) = (3, 1)$.

25) Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,\ y) = (2x + 3y,\ 5x - y)$. Mostre que T é linear e calcule as matrizes de T com relação à base canônica $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e com relação à base $\beta = \{(1, -1), (3, 0)\}$

26) Sejam R, S e T três transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ tais que $R(x, y, z) = (x-z, y+x, 2y)$, $S(x, y, z) = (y + z, 4z + x, y - z)$ e $T = R \circ S$. Escolha uma base qualquer $\mathcal{B}$ do $\mathbb{R}^3$, determine as matrizes de R, S e T com relação a essa base e verifique que $[T]_{\mathcal{B}} = [R]_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}}$.

27) Seja $D : V \longrightarrow V$ o operador derivação (ou seja, $D(f) = f'$). Calcule $[D]_{\mathcal{B}}$ em cada caso:

a) $V = \mathcal{P}_n$, $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

b) $V = [\operatorname{sen} x,\ \cos x]$, $\mathcal{B} = \{\operatorname{sen} x,\ \cos x\}$

c) $V = [e^x,\ e^{2x},\ xe^{2x}]$, $\mathcal{B} = \{e^x,\ e^{2x},\ xe^{2x}\}$

d) $V = [1, e^x,\ e^{-x},\ e^{-3x}]$, $\mathcal{B} = \{1, e^x,\ e^{-x},\ e^{-3x}\}$

28) Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + 2y, y - 5x)$ e $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, 0)\}$. Mostre que $[T]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}}$, $\forall v \in \mathbb{R}^2$. Escreva $[v]_{\mathcal{B}}$ e $[T(v)]_{\mathcal{B}}$ na forma de matriz-coluna.

29) Seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ linear tal que $f(v_1) = 3v_3$, $f(v_2) = v_1 - v_2$, $f(v_3) = 2v_1 - v_3$. Calcule $[f]_{\mathcal{B}}$.

30) Verifique se $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é um isomorfismo em cada um dos casos:

a) $T(x, y, z) = (2x, y, x - y - 3z)$

b) $T(x, y, z) = (x, x + y, 2x + y)$

c) $T(x, y, z) = (2z, 3y, 4x)$

d) $T(x, y, z) = (x + z, x - y, y + z)$

31) Mostre que todo espaço vetorial V de dimensão 3 é isomorfo a $\mathbb{R}^3$.

32) Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2z, x + 2y, y - z)$. Calcule $\dim(\operatorname{Im}(T))$ e $\dim(N(T))$.

33) Encontre $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linear cuja base do núcleo seja $\{(1, -1, 0),\ (0, 1, 1)\}$.

34) Dê exemplo de uma $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ linear cuja imagem seja gerada por $(1, 1, 0)$ e $(0, 2, 1)$.

35) Seja $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ linear cuja matriz com relação às bases canônicas é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 1 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Determine o núcleo e a imagem de T e verifique que $\dim(N(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T)) = \dim(\mathbb{R}^4)$.

36) Mostre que não existe $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ linear injetora, e nem $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ linear sobrejetora.

37) Existe transformação linear $T : V \longrightarrow W$ sobrejetora tal que $\dim W > \dim V$? Justifique sua resposta.

38) Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x - y + z,\ x - 2y + z,\ x + y)$ uma transformação linear. Encontre uma base para $N(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$, verifique se T é injetora ou sobrejetora e determine seus autovalores e autovetores.

39) Seja $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma transformação linear definida por $T(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$. Determine a matriz de T com relação às bases $\alpha = \{1, t, t^2\}$ e $\beta = \{1\}$.

40) Se $\dim V = n$ e $T : V \longrightarrow V$ é linear tal que $\mathrm{Im}(T) = N(T)$, então mostre que n é par. Dê um exemplo de uma tal T quando $n = 4$.

41) Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$. Se for possível, encontre a inversa T^{-1}.

42) Seja $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ a transformação linear que satisfaz $T(x^2) = x^2 - 2x + 1$, $T(x) = x - 1$ e $T(1) = x$. Calcule $T(4x^2 - 5)$ e verifique se T é um isomorfismo.

43) Seja $\alpha = \{u, v\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear que satisfaz $T(u - v) = 3v$ e $T(u + 2v) = u - v$. Determine $[T]_\alpha^\alpha$ e verifique se T é um isomorfismo.

44) Seja $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ a transformação linear definida por $T(p(x)) = p(x) + xp'(x)$. Mostre que T é um isomorfismo e calcule a sua inversa T^{-1}.

45) Os vetores $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (2, -1)$ são autovetores de $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linear associados a $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$, respectivamente. Determine $T(4, 1)$.

46) Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cujos autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ associados aos autovetores $v_1 = (y, -y)$ e $v_2 = (0, y)$, respectivamente.

47) Seja $T : V \longrightarrow V$ linear não-invertível. Os vetores não-nulos do núcleo de T são autovetores? Em caso afirmativo, determine seus respectivos autovalores.

48) Verifique se a matriz A é diagonalizável. Se for, determine uma matriz P que diagonaliza A e calcule $P^{-1}AP$ em cada um dos casos:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ f) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

49) Calcule os polinômios característicos, autovalores e autovetores das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e) $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ f) $F = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

50) Determine os autovalores e autovetores das transformações lineares:

a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (5x - y, x + 3y)$ b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, -2x - y, 2x + y + 2z)$

c) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (5y, 5x)$ d) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, y + 2z, y)$

51) Seja $A \in M(7, 7)$ tal que $2A^2 - 14A + 24I = 0$. Mostre que A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

52) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Mostre que $(A - 3I)^{100}(A - 2I)^{100} = 0$.

53) Calcule os polinômios mínimo e característico, autovalores e autovetores de $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (4x + 8y - 2z,\ -3x - 6y + z,\ -2x - 8y + 4z)$.

54) Encontre os valores de a e b sabendo que $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ são os autovalores do operador linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (-x + ay, -2x + by)$.

55) Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Mostre que o polinômio característico de A é $p(x) = x^2 - (a+d)x + \det A$ e que se $\det A < 0$ então A é diagonalizável.

56) Calcule o determinante de uma matriz diagonalizável A sabendo que seu polinômio característico é $p(x) = (x + 3)(x - 2)^2(x + 4)^2$.

57) Dado um polinômio $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, a matriz quadrada $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -d \\ 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{bmatrix}$ é chamada **matriz companheira** de $p(x)$.

a) Mostre que o polinômio característico de M é $p(x)$

b) Determine uma matriz 3×3 cujo polinômio característico seja $p(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 13$.

58) Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear definido por $T(x, y, z) = (4x + y - z, 5y - 2z, 2z)$. Mostre que T é diagonizável e determine uma base de autovetores e a matriz diagonal associada.

59) Sejam v_1 e v_2 autovetores do operador linear T associados aos autovalores λ_1 e λ_2, respectivamente, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Mostre que o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é LI.

60) Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear cujo polinômio mínimo é $m(x) = x^2 + 1$. Mostre que $\dim V$ é par e que $T^{-1} = -T$.

61) Sejam $T : V \longrightarrow V$ linear e $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Sabendo que $T(v_i) = \lambda_i v_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, determine o polinômio característico, autovalores e autovetores de T.

62) O polinômio característico de uma matriz A de ordem 6×6 é $p(x) = (x - 3)^2(x + 2)^3(x - 5)$. Quais é um possível polinômio mínimo para essa matriz?

63) Determine a, b, c, d, e, f, sabendo que $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (1, -1, 0)$ são autovetores da matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$.

64) Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação *rotação de um ângulo θ em torno da origem* dada por

$$T(x, y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta,\ x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta).$$

T possui autovalores reais para quais valores de θ ? Quais são esses autovalores?

RESPOSTAS DA 2^a LISTA DE EXERCÍCIOS

22) Somente (b) e (e) não são lineares.

23) $T(2,-3,5) = (17,22)$

24) $v = (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

25) $[T]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$, $[T]_\beta = \begin{bmatrix} -6 & -15 \\ \frac{5}{3} & 7 \end{bmatrix}$

26) Escolhendo $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, temos
$[T]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $[R]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $[S]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

27) a) $[D]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$

b) $[D]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, c) $[D]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, d) $[D]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

28) $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $[v]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} y \\ x-y \end{bmatrix}$, $[T(v)]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} y-5x \\ y+6x \end{bmatrix}$, $[T]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$. A partir daí obtemos $\begin{bmatrix} y-5x \\ y+6x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x-y \end{bmatrix}$, ou seja, $[T(v)]_\mathcal{B} = [T]_\mathcal{B}[v]_\mathcal{B}$.

29) $[f]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

30) São isomorfismos somente (a) e (c).

31) Se $\beta = \{u,v,w\}$ for base de V, então $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(u) = (1,0,0)$, $T(v) = (0,1,0)$, $T(w) = (0,0,1)$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

32) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$, $\dim(N(T)) = 1$

33) Há uma infinidade de respostas corretas, uma delas é $T(x,y,z) = (-x-y+z,\ -2x-2y+2z)$.

34) Há uma infinidade de respostas corretas, uma é $T(x,y,z,w) = (x+y,\ x+y+2z+2w,\ z+w)$.

35) $T(x,y,z,t) = (x+3z, -2y-6z+t, 4x-4y+t)$, $\mathrm{Im}(T) = [(1,0,4),(0,1,2),(0,0,1)]$, $N(T) = [(3,3,-1,0)]$, $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$, $\dim(N(T)) = 1$

36) Se existisse $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ linear injetora, então teríamos $\dim(N(T)) = 0$ e daí $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 5$, o que é absurdo. Por outro lado, se existisse $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ linear sobrejetora, então teríamos $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 5$ e daí $\underbrace{\dim(N(T))}_{\geq 0} + 5 = 4$, que também é absurdo.

37) Não existe tal transformação linear. Se existisse, $\underbrace{\dim(N(T))}_{\geq 0} = \dim V - \dim V$ e daí $\dim V \geq \dim W$ o que é absurdo.

38) Uma base do núcleo de T é $\{(-1,1,3)\}$ e uma base da imagem é $\{(1,1,0),\ (0,1,-1)\}$, T não é injetora, nem sobrejetora, os autovalores são 0, $\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$ associados aos autovetores $(-1,1,3)$, $(1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$ e $(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$, respectivamente.

39) $[T]^{\alpha}_{\beta} = [2 \quad 0 \quad \frac{2}{3}]$

40) $\dim V = \dim(N(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = m + m = 2m$, um exemplo é $T(x,y,z,t) = (z,t,0,0)$.

41) $T^{-1}(x,y,z) = (\frac{x}{2},\ 2x - y,\ 7x - 3y - z)$

42) $T(4x^2 - 5) = 4x^2 - 13x + 4$, T é um isomorfismo.

43) $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$

44) Escolhendo a base $\beta = \{1,\ x,\ x^2\}$ para $\mathcal{P}_2$, temos $T(1) = 1$, $T(x) = 2x$ e $T(x^2) = 3x^2$. Como T leva base $\{1, x, x^2\}$ em base $\{1, 2x, 3x^2\}$, T é um isomorfismo. Logo, T possui inversa e $T^{-1}(1) = 1$, $T^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ e $T^{-1}(x^2) = \frac{x^2}{3}$ e daí $T^{-1}(p(x)) = \boxed{T^{-1}(ax^2 + bx + c) = \frac{ax^2}{3} + \frac{bx}{2} + c}$ $= \frac{1}{x}(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx) = \frac{1}{x}\int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t$.

45) $T(4,\ 1) = (8,\ 11)$

46) $T(x,\ y) = (x,\ 2x + 3y)$

47) Os vetores não-nulos do núcleo são autovetores associados ao autovalor 0.

48) a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

c) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) A matriz A não é diagonalizável

e) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

f) A matriz A não é diagonalizável

49) a) $p(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x-2)$; autovalores: $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 2$; autovetores: $v_1 = (1,1),\ v_2 = (1, \frac{1}{3})$
b) $p(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x-1)$; autovalores: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5$; autovetores: $v_1 = (1,-1)$, $v_2 = (1,3)$
c) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$; autovalores: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \ \lambda_3 = 3$; autovetores: $v_1 = (1,0,-1),\ v_2 = (1,-1,-\frac{1}{2}),\ \ v_3 = (1,-2,-1)$
d) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x-2)(x-3)$; autovalores: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \ \lambda_3 = 3$; autovetores: $v_1 = (1,2,2),\ v_2 = (1,-1,0),\ \ v_3 = (1,0,0)$
e) $p(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x+2)(x-2)(x+1)$; autovalores: $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2,\ \ \lambda_3 = -1$; autovetores: $v_1 = (1,0,-1),\ v_2 = (1,0,1),\ \ v_3 = (0,1,0)$
f) $p(x) = x^3 - 10x^2 + 28x - 24 = (x-6)(x-2)^2$; autovalores: $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 2$; autovetores: $v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (1,0,-1),\ \ v_3 = (0,1,-2)$

50) a) Autovalor: $\lambda_1 = 4$; autovetor: $v_1 = (1,1)$
b) Autovalores: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$; autovetores: $v_1 = (0,1,\frac{1}{3}),\ v_2 = (1,-1,-1)$, $v_3 = (0,0,1)$
c) Autovalores: $\lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 5$; autovetores: $v_1 = (1,-1),\ v_2 = (1,1)$
d) Autovalores: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1$; autovetores: $v_1 = (0,1,\frac{1}{2}),\ v_2 = (1,-2,2),\ v_3 = (1,0,0)$

51) $2A^2 - 14A + 24I = 0 \Rightarrow A^2 - 7A + 12I = 0$. Daí, se $p(x) = x^2 - 7x + 12$ temos que $p(A) = 0$. Como $p(x) = (x-3)(x-4)$, concluímos que o polinômio mínimo é um produto de fatores do primeiro grau em x e que A é diagonalizável.

52) O polinômio característico de A é $p(x) = (x-3)^2(x-2)$ e o polinômio mínimo é $m(x) = (x-3)(x-2)$. Daí, $m(A) = (A-3I)(A-2I) = 0 \Rightarrow (A-3I)^{100}(A-2I)^{100} = 0$.

53) $p(x) = m(x) = (x-2)^2(x+2),\ \ v = (1,-1,-1)$ é um autovetor associado ao autovalor -2 e $w = (1, -\frac{1}{2}, -1)$ é outro autovetor associado ao autovalor 2.

54) $a = 3,\ \ b = 4$

56) A matriz A é semelhante a $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$. Logo, $\det A = -3 \cdot 2^2 \cdot (-4)^2 = -192$.

57) b) $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -13 \\ 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

58) Os autovetores são $(1,4,6)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ associados aos autovales 2, 4, 5, respectivamente. A matriz diagonal é $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

59) Aplique T à equação $av_1 + bv_2 = 0$ e calcule a e b.

60) O grau do polinômio caracteríssco é $2n$ para algum n e $m(T) = 0$.

61) Os autovalores são os λ_i, os autovetores são os v_i, com $i = 1, 2, \ldots, n$. O polinômio característico é $p(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_n)$.

62) Um possível polinômio mínimo é:

- $m(x) = (x-3)^2(x+2)^3(x-5)$
- ou $m(x) = (x-3)(x+2)^3(x-5)$
- ou $m(x) = (x-3)^2(x+2)^2(x-5)$
- ou $m(x) = (x-3)(x+2)^2(x-5)$
- ou $m(x) = (x-3)^2(x+2)(x-5)$
- ou $m(x) = (x-3)(x+2)(x-5)$

63) $a = b = c = 1, \;\; d = e = f = 1$

64) $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, os autovalores são $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.