INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR
1^a LISTA DE EXERCÍCIOS – ABRIL/2020

1) Verifique se $V = \mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial com as operações de adição de vetores e produto por escalar definidos em cada um dos seguintes casos:

a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1), \quad k(x_1, y_1) = (kx_1, ky_1), \quad \forall x_1, y_1, x_2, y_2, k \in \mathbb{R}$

b) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (0, 0), \quad k(x_1, y_1) = (kx_1, ky_1), \quad \forall x_1, y_1, x_2, y_2, k \in \mathbb{R}$

c) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad k(x_1, y_1) = (0, 0), \quad \forall x_1, y_1, x_2, y_2, k \in \mathbb{R}$

d) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad k(x_1, y_1) = (x_1, y_1), \quad \forall x_1, y_1, x_2, y_2, k \in \mathbb{R}$

2) Sendo $V = \mathbb{R}^3$, verifique se W é um subespaço de V em cada um dos seguintes casos:

a) $W = \{(x, y, z) \mid xy = 0\}$
b) $W = \{(x, y, z) \mid y = x^2\}$
c) $W = \{(x, y, z) \mid x + z = 0\}$
d) $W = \{(x, y, z) \mid x - 2y = 0\}$
e) $W = \{(x, y, z) \mid x + z = 1\}$
f) $W = \{(x, y, z) \mid x - 2y = 5\}$

3) Seja $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços de V ?

a) $W_1 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(-1) = 0\}$
b) $W_2 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(3) = 1 + f(-5)\}$
c) $W_3 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(-1) = 1\}$
d) $W_4 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(-x) = -f(x)\}$
e) $W_5 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f'(x) = 3f(x)\}$
f) $W_6 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f'(x) = x\}$
g) $W_7 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0\}$
h) $W_8 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\}$

4) Seja $V = M(2, 2)$. Verifique se W é subespaço de V em cada um dos casos:

a) $W = \{A \in M(2, 2) \mid \det A = 0\}$
b) $W = \{A \in M(2, 2) \mid \det A = 1\}$
c) $W = \{A \in M(2, 2) \mid A^2 = A\}$
d) $W = \{A \in M(2, 2) \mid A^{-1} = A\}$
e) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid b = c = 0,\ a + d = 1 \right\}$
f) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a^2 = d^2 \right\}$

5) Considere V um espaço vetorial de dimensão 3 e $\alpha = \{u, v, w\}$ uma base de V. Mostre que $\beta = \{u + v, v + w, u + w\}$ também é uma base de V e determine a matriz de mudança da base α para a base β.

6) Considere V um espaço vetorial de dimensão 5 e $\alpha = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ uma base de V. Mostre que $\beta = \{u_1, u_1 - u_2, u_1 + u_2 + 2u_3, u_1 + u_2 - u_3 - 5u_4, u_1 - 3u_2 - u_3 + u_4 + 8u_5\}$ também é uma base de V e determine a matriz de mudança da base α para a base β.

7) Seja $V = M(2, 2)$. Verifique se W é subespaço de V em cada um dos casos:

a) $W = \{A \in M(2, 2) \mid \det A = 0\}$
b) $W = \{A \in M(2, 2) \mid \det A = 1\}$
c) $W = \{A \in M(2, 2) \mid A^2 = A\}$
d) $W = \{A \in M(2, 2) \mid A^{-1} = A\}$
e) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid b = c = 0,\ a + d = 1 \right\}$
f) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a^2 = d^2 \right\}$

8) Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V de dimensão n. Sabendo que $\dim U < \frac{n}{2}$ e $\dim W < \frac{n}{2}$, mostre que $U \cap W \neq \{0\}$.

9) No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, considere o subespaço $W = \{(x, y, z) \mid x = y\}$. Encontre um subespaço U de $\mathbb{R}^3$ tal que $W \oplus U = \mathbb{R}^3$.

10) Sejam V o espaço vetorial de todas as funções $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, U o subespaço de V das funções pares e W o subespaço das funções ímpares. Mostre que $V = U \oplus W$.

11) Verifique se é possível escrever a matriz $D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como combinação linear das matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

12) Sejam $V = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e f, g, h três vetores de V. Verifique se esses vetores são linearmente independentes em cada um dos seguintes casos:

a) $f(t) = \cos t$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, $h(t) = e^t$

b) $f(t) = \cos^2 t$, $g(t) = \operatorname{sen}^2 t$, $h(t) = \cos 2t$

c) $f(t) = \cos^2 t$, $g(t) = \operatorname{sen}^2 t$, $h(t) = -5$

d) $f(t) = e^t$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, $h(t) = e^t \operatorname{sen} t$

f) $f(t) = 1$, $g(t) = t$, $h(t) = t^2$

g) $f(t) = t$, $g(t) = t^2$, $h(t) = te^t$

13) No espaço vetorial $V = \mathcal{P}_3$ dos polinômios de grau ≤ 3, considere a base

$$\beta \;=\; \{1,\; 1+t,\; (1+t)^2,\; (1+t)^3\}.$$

Calcule as coordenadas $[v]_\beta$ e $[w]_\beta$ sabendo que $v = 4 + 3t - t^2 + 2t^3$ e $w = 5 + t - t^2$.

14) Mostre que os polinômios $p_1 = 1 + 2x - 3x^2$, $p_2 = 1 - 3x + 2x^2$ e $p_3 = 2 - x + 5x^2$ formam uma base do espaço $\mathcal{P}_2$ dos polinômios de grau ≤ 2 e calcule as coordenadas de $p = -2 - 9x - 13x^2$ na base $\beta = \{p_1, p_2, p_3\}$.

15) Considere os subespaços W_1 e W_2 de $\mathbb{R}^3$ definidos por $W_1 = \{(x,y,z) \mid z = x + y\}$ e $W_2 = [(0,0,1)]$. Determine uma base e calcule a dimensão de W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$. É verdade que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$?

16) Sejam W_1 e W_2 subespaços de $\mathbb{R}^3$ dados por $W_1 = [(0,1,-1),\,(1,2,1),\,(1,-3,6)]$ e $W_2 = \{(x,y,z) \mid x + y = 0,\ x - z = 0\}$. Calcule $\dim W_1$, $\dim W_2$ e verifique se $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

17) Seja W um subespaço de um espaço vetorial V. Justifique se a seguinte afirmação é *verdadeira* ou *falsa*: “ Se $u \notin W$ e se $v \notin W$, então $u + v \notin W$ ”.

18) Considere os subespaços de $\mathbb{R}^4$ definidos por $W_1 = \{(x,y,z,t) \mid x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$ e $W_2 = \{(x,y,z,t) \mid x - y - z + t = 0\}$. Determine uma base e calcule a dimensão de cada um dos subespaços W_1, W_2, $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$. É verdade que $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$?

19) Determine uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços de $M(2,2)$:

a) $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid b = a + c,\ d = c \right\}$

b) $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a - 5b + c = 0 \right\}$

c) $W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid c = a - 3b,\ d = 0 \right\}$

d) $W_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a + d = b + c \right\}$

e) $W_5 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid b = c \right\}$

f) $W_6 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a + b = 0,\ c - d = 0 \right\}$

20) Determine uma base e calcule a dimensão do subespaço W de $M(3,3)$ formado pelas *matrizes simétricas*, ou seja, as matrizes M de ordem 3×3 tais que $M^t = M$.

21) Encontre uma base e a dimensão do espaço-solução S dos sistemas:

a) $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \\ 4x + 3y - z + 5t = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ 2x + 2y - 4z + 2t = 0 \\ 3x + 3y - 6z + 5t = 0 \end{cases}$

RESPOSTAS DA 1^a LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Nenhum dos conjuntos apresentados em a), b), c), d) é espaço vetorial.

2) São subespaços de V somente os itens c) e d).

3) São subespaços de V somente os itens a) W_1, d) W_4, e) W_5 e g) W_7.

4) Nenhum dos conjuntos apresentados em a), b), c), d), e), f) é subespaço de V.

5) $[I]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6) $[I]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

7) Nenhum dos conjuntos apresentados em a), b), c), d), e), f) é subespaço de V.

8) Use a fórmula para calcular $\dim(U+V)$.

9) Uma possível resposta é $U = [(0,1,0)]$. Existem outras respostas válidas.

10) Observe que $\underbrace{\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{função par}} + \underbrace{\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{função ímpar}} = f(x)$ para qualquer função f.

11) Não se pode escrever D como combinação linear de A, B, C.

12) São LI somente os casos a), d), f), g).

13) $[v]_\beta = (-2, 11, -7, 2)$, $[w]_\beta = (3, 3, -1, 0)$

14) $[p]_\beta = (1, 5, -4)$

15) $W_1 = [(1,0,1),\ (0,1,1)]$, $W_2 = [(0,0,1)$, $W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}$, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ $\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 1$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$, $\dim(W_1 + W_2) = 3$, a soma é direta.

16) $W_1 = [(0,1,-1),\ (1,2,1)]$, $W_2 = [(1,-1,1)$, $\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 1$, a soma é direta.

17) A afirmação é falsa.

18) $W_1 = [(1,-1,0,0),\ (0,0,1,1)]$, $W_2 = [(1,0,0,-1),\ (0,1,0,1),\ (0,0,1,1)]$, $W_1 \cap W_2 = [(0,0,1,1)]$, $W_1 + W_2 = [(1,-1,0,0),\ (0,0,1,1),\ (1,0,0,-1),\ (0,1,0,1)]$, $\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 3$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, $\dim(W_1 + W_2) = 4$, a soma não é direta.

19) a) $\dim W_1 = 2, \quad W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$

b) $\dim W_2 = 3, \quad W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$

c) $\dim W_3 = 2, \quad W_3 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right]$

d) $\dim W_4 = 3, \quad W_4 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$

e) $\dim W_5 = 3, \quad W_5 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$

f) $\dim W_6 = 2, \quad W_6 = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$

20) $\dim W = 6$,

$$W = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

21) a) $\dim S = 1, \quad S = [(1, 1, -1)]$; b) $\dim S = 2, \quad S = [(-1, 3, 5, 0),\ (-1, -7, 0, 5)]$;
c) $\dim S = 2, \quad S = [(2, 0, 1, 0),\ (0, 2, 1, 0)]$.