

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Relatório Parcial

INICIAÇÃO AO ESTUDO DA TEORIA GEOMÉTRICA DOS PONTOS CRÍTICOS

Bruno Henrique C. Ribeiro
Bolsista pelo Programa PIBIC/UFPB/CNPq

João Marcos Bezerra do Ó
Orientador

João Pessoa, 27 de fevereiro de 2004

IDENTIFICAÇÃO DO PROJETO

1. TÍTULO DO PROJETO:

Iniciação ao Estudo da Teoria Geométrica dos Pontos Críticos

2. LOCAL DE EXECUÇÃO:

Departamento de Matemática - CCEN - UFPB - Campus I

3. ÁREA DE PESQUISA:

Análise

4. SUB-ÁREAS DE PESQUISA:

Equações Diferenciais Parciais e Geometria Diferencial

5. ORIENTADOR:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

6. COORIENTADOR:

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros

6. ORIENTANDO:

Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

7. PERÍODO DE REALIZAÇÃO:

agosto de 2003 a julho de 2004

João Marcos Bezerra do Ó
Orientador

Bruno Henrique Carvalho Ribeiro
Aluno

INTRODUÇÃO

Este trabalho é um resumo das atividades exercidas pelo bolsista no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica, PIBIC/CNPq/UFPB entre agosto de 2003 e fevereiro de 2004. Serão aqui exibidos: uma exposição introdutória do projeto; seus objetivos; metodologia e finalmente, o conteúdo pesquisado e desenvolvido. O relatório termina com a informação de toda a bibliografia utilizada. Em anexo segue cópia do cronograma do projeto. Eis um resumo introdutório deste trabalho parcial:

Tentativas de explicar fenômenos físicos, através do princípio de que existe na natureza alguma “quantidade” a ser minimizada, motivou desde tempos remotos (c. 125 aC) à formulação de um princípio variacional.

Registro de uma formulação efetiva só tivemos a partir do sec. XVII, quando Pierre de Fermat postulou que a “luz minimiza o tempo transcorrido ao invés da distância percorrida”. Daí deduziu-se matematicamente as leis que descrevem o fenômeno da refração da luz, abrindo as portas para que outros pesquisadores estabelecessem as ferramentas matemáticas necessárias para a abordagem de problemas variacionais mais complexos. Surge então o início do desenvolvimento da teoria Clássica do Cálculo das Variações.

Mas foi o suíço Leonhard Euler quem primeiro escreveu e publicou um trabalho sobre o Cálculo das Variações. Trabalho este que influenciou gerações de destacados matemáticos até os dias de hoje.

Seguindo Euler, Maupertius publicou um trabalho onde pela primeira vez aparece o princípio da “ação mínima”. E na sequência citamos Louis de Lagrange, Le Gendre, Karl Jacobi e Hamilton, matemáticos que consolidaram o Cálculo das Variações.

Atualmente, o Cálculo das Variações é tema de inúmeros trabalhos de renomados matemáticos. Sua aplicabilidade em várias ciências como Biologia, Economia e Engenharia tem atraído muitos talentos para a pesquisa em Matemática. A beleza e as técnicas utilizadas no Cálculo das Variações têm colaborado de forma prática e objetiva nos trabalhos de iniciação científica.

O objetivo e conteúdo específico do projeto destacamos a seguir.

OBJETIVOS DO PROJETO

Do ponto de vista específico da pesquisa, nosso objetivo principal é a compreensão geométrica do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz utilizando a idéia geométrica de Minimax e o lema da Deformação.

Para isto, fizemos uma rápida introdução aos Métodos Variacionais modernos com forte ênfase na interpretação geométrica dos resultados listados no conteúdo do projeto, observando sempre as técnicas de demonstração com todo rigor matemático.

METODOLOGIA

Fizemos também uso da **metodologia** tradicional, a qual tem sido feita com sucesso nas iniciações à pesquisa em matemática, isto é, realizações de seminários semanais com lista de exercícios para a fixação dos conceitos e leituras de textos para complementação.

CONTEÚDO DESENVOLVIDO ATÉ O MOMENTO

De acordo com o cronograma elaborado no plano de trabalho deste projeto de iniciação científica, o aluno trabalhou os tópicos abaixo listados:

1. Introdução aos Métodos Variacionais

- (a) O Cálculo das Variações
- (b) O Princípio da Ação Mínima
- (c) O Princípio de Dirichlet
- (d) Do clássico ao Moderno
- (e) O Método Variacional

2. Espaços de Funções

- (a) Introdução
- (b) Derivadas Fracas
- (c) Espaços de Sobolev
- (d) Solução Fraca

3. O Método Variacional Direto

- (a) A Forma Fraca do Princípio de Dirichlet
- (b) O Caso de Dimensão Finita
- (c) O Problema da Compacidade
- (d) Semicontinuidade Inferior
- (e) A Desigualdade de Poincaré
- (f) A Solução Fraca do Problema de Dirichlet

Capítulo 1

Introdução aos Métodos Variacionais

1.1 O Cálculo das Variações

O primeiro indício histórico de formulação de um princípio variacional deve-se a Heron de Alexandria (c. 125 a.C.), que postulou que a luz segue sempre o caminho mais curto entre dois pontos e estabeleceu as leis para a reflexão da luz em espelhos. A idéia central de seu trabalho é de que a luz minimiza a distância percorrida entre a fonte e o observador. Essa teria sido a primeira tentativa de se explicar fenômenos físicos através do princípio de que existe na natureza alguma quantidade (no caso a distância) a ser minimizada.

Mas foi somente na primeira metade do século XVII que se pode dizer que um princípio variacional foi de fato utilizado, quando Pierre de Fermat postulou que, em seu trajeto, a luz minimizaria o tempo transcorrido ao invés da distância percorrida e, a partir deste princípio, deduziu matematicamente as leis que descrevem o fenômeno da refração da luz, obtidas experimentalmente pelo holandês Willebrod Snell poucos anos antes.

Apesar do sucesso de Fermat no estudo da refração da luz, ainda não havia sido estabelecida toda a maquinaria matemática necessária para abordar problemas variacionais mais complexos. Contudo, o advento do Cálculo na segunda metade do século XVII abriu o caminho para o pleno desenvolvimento da teoria clássica do Cálculo das Variações.

Apenas em 1743 que surgiu o primeiro tratado sobre o Cálculo das Variações. Naquele ano, o suíço Leonhard Euler submeteu ao editor um livro (cujo título poderia ser traduzido como “Método para encontrar curvas que minimizam ao máximo a propriedade da folga ou soluções para problemas isoperimétricos aceitas no sentido amplíssimo”). Este livro foi um marco na história da Matemática e inspirou inúmeras gerações de matemáticos ao longo dos séculos.

Em 1744, mesmo ano em que o livro de Euler foi publicado, o francês Pierre-Louis Maupertius publicou seu aclamado trabalho *Accord de Différentes Lois de la Nature que Avaient Jusqu'ici Paru Imcompatibles*, onde pela primeira vez aparece o princípio da ação mínima. Entretanto, ao que tudo indica, Euler teria sido o primeiro a compreender realmente toda a relevância deste princípio.

Após os pioneiros trabalhos de Euler e Maupertius na primeira metade do século XVIII, grandes matemáticos, como Louis de Lagrange, Adrien-Marie Le Gendre, Karl Jacobi e Willian Rowan Hamilton contribuíram decisivamente para consolidar o Cálculo das Variações.

1.2 O Princípio da Ação Mínima

Uma aplicação clássica do Cálculo das Variações é a resolução de um sistema de equações diferenciais ordinárias através da minimização do funcional da ação.

Considere uma função $L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Fixados dois pontos $P, Q \in \mathbb{R}^N$ e um tempo $T > 0$, definimos o funcional

$$I(v) = \int_0^T L[v(s), v(s)] ds$$

onde $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ pertence à classe

$$A = \{v \in C^2([0, T], \mathbb{R}^N) \mid v(0) = P \text{ e } v(T) = Q\}$$

A função L é chamada de Lagrangiana e o funcional I , de ação.

A idéia central do Cálculo das Variações é que, se $\mathbf{x} \in A$ minimiza a ação, i.e., se

$$I(\mathbf{x}) = \inf_{v \in A} I(v)$$

então $\mathbf{x}$ é solução do sistema de equações de Euler-Lagrange

$$-\frac{d}{ds} \nabla_x L[\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s)] + \nabla_y L[\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s)] = 0$$

onde $0 \leq s \leq T$ e usamos a notação $L = L(x, y)$, com $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Assim, para provar a existência de solução para o sistema de equações de Euler-Lagrange, basta provar a existência de um ponto de mínimo absoluto para a ação. De fato, outras soluções podem corresponder a outros pontos críticos. Neste caso unidimensional, porém, é muito mais difícil minimizar a ação do que

resolver a equação de Euler-Lagrange. A situação é dramaticamente diferente quando se passa para dimensões maiores (ou para dimensão infinita).

1.3 O Princípio de Dirichlet

O alemão Johann Dirichlet estudou o problema de fronteira

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $f \in C^0(\bar{\Omega})$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto e limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1 .

Usando o princípio do máximo, pode-se mostrar facilmente que (??) possui no máximo uma solução de classe $C^2(\bar{\Omega})$. Para provar a existência da solução para (??), porém, o trabalho é mais difícil.

Dirichlet mostrou que a solução de (??) corresponde ao ponto de mínimo absoluto do funcional

$$I(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - uf \right) dx \quad (1.2)$$

definido sobre a classe de funções

$$A = \{u \in C^2(\bar{\Omega}) \mid u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

Eis o famoso princípio de Dirichlet:

Teorema 1 (PRINCÍPIO DE DIRICHLET) *Uma função $u \in C^2(\bar{\Omega})$ é a solução de (??) se e somente se u é um ponto de mínimo absoluto de (??).*

Prova: Se $u \in C^2(\bar{\Omega})$ é a solução de (??), a condição de fronteira implica que $u \in A$. Dado $v \in A$, a equação diferencial em (??) implica que

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x)[u(x) - v(x)]dx = \int_{\Omega} f(x)[u(x) - v(x)]dx.$$

Integrando por partes o primeiro membro (e usando que $u = v$ em $\partial\Omega$), tem-se que

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla [u(x) - v(x)]dx = \int_{\Omega} f(x)[u(x) - v(x)]dx,$$

donde

$$\int_{\Omega} [\nabla u(x) \cdot \nabla u(x) - f(x)u(x)]dx = \int_{\Omega} [\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) - f(x)v(x)]dx.$$

Mas, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, ficamos com

$$\int_{\Omega} (|\nabla u(x)|^2 - f(x)u(x)) dx \leq \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla v(x)|^2 - f(x)v(x) \right) dx.$$

Portanto, pela definição (??), u é ponto de mínimo absoluto para o funcional I .

Por outro lado, seja $u \in A$ um ponto de mínimo absoluto de I . Para qualquer $v \in C_0^\infty(\Omega)$ fixado, considere a função real definida por

$$\iota(\lambda) = I(u + \lambda v)$$

Como $u + \lambda v \in A$, se ι for derivável em $\lambda = 0$, deve-se ter $\iota'(0) = 0$. Contudo,

$$\begin{aligned} \iota(\lambda) &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u(x) + \lambda \nabla v(x)|^2 - f(x)[u(x) + \lambda v(x)] \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + \lambda \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + \frac{\lambda^2}{2} |\nabla v(x)|^2 - f(x)[u(x) + \lambda v(x)] \right) dx \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$0 = \iota'(0) = \int_{\Omega} [\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) - f(x)v(x)] dx = \int_{\Omega} [-\Delta u(x) - f(x)]v(x) dx.$$

Uma vez que a identidade é válida para todo $v \in C_0^\infty(\Omega)$, devemos ter $-\Delta u = f$ em Ω . Como $u \in A$, a condição de fronteira é automaticamente satisfeita e, portanto, u é solução de (??). ■

No caso da equação de Laplace, por exemplo, $f \equiv 0$ e I é limitado inferiormente por 0. Portanto $\inf_{u \in A} I(u) \geq 0$ e parece certa a existência de uma função minimante (uma função $u \in A$ onde I atinge seu mínimo). Entretanto, isto não é verdade. Mesmo para funções reais, a simples limitação inferior não garante um ponto de mínimo para a função. É só pegar por exemplo a função exponencial, que é limitada inferiormente por 0 porém não atinge o mínimo em seu domínio. É preciso portanto obter condições para garantirmos a existência de uma função minimante, e isto será feito mais a frente.

1.4 Do Clássico ao Moderno

No final do século XIX, com o estabelecimento de bases rigorosas para o Cálculo através da consolidação da Análise Matemática, os fundamentos e métodos do Cálculo das Variações foram postos em xeque. O alemão Karl Weierstrass, por exemplo, fez críticas duras ao Princípio de Dirichlet, principalmente no que se diz respeito à falta de rigor no tratamento da questão de existência.

Até então, as aplicações do Cálculo das Variações eram desenvolvidas sem o necessário rigor. Em muitos casos, a simples interpretação física da qual problemas matemáticos eram elaborados já garantia a existência de soluções para os mesmos.

Mas Weierstrass produziu um contra-exemplo de problema variacional que não admite solução minimal, apesar de o funcional em questão ser limitado inferiormente. Ele considerou o funcional $I : A \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \int_{-1}^1 \left| x \frac{du}{dx} \right|^2 dx$$

onde

$$A = \{u \in C^1([-1, 1], \mathbb{R}) \mid u(-1) = -1 \text{ e } u(1) = 1\}.$$

Claramente, como $I(u) > 0 \forall u \in A$, temos uma limitação inferior para I . Contudo, I não assume seu ínfimo em A . Verifica-se este caso considerado a sequência

$$u_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{\arctan(n)} \in A.$$

Isso foi um choque para a teoria do Cálculo das Variações, que mergulhou então numa crise de fundamentos. Era preciso rever cuidadosamente os fundamentos da teoria e estabelecer bases rigorosas para o Cálculo das Variações.

1.5 O Método Variacional

Trabalhos de matemáticos como Weierstrass, Arzela, Fréchet, Hilbert e Lebesgue estabeleceram bases rigorosas para o Princípio de Dirichlet e levaram o desenvolvimento da Análise Funcional e da moderna teoria das Equações Diferenciais Parciais.

A idéia fundamental de associar a existência de soluções à existência de pontos críticos de um funcional permanecia inalterada, mas percebeu-se rapidamente que a dimensão infinita dos espaços de funções tornava esta tarefa bem mais complicada. Em um primeiro momento, concentraram-se os esforços na busca de pontos de mínimo para funcionais limitados inferiormente.

No início do século XX, foi consolidado o Método Variacional Direto, que permite provar a existência de pontos de mínimo para funcionais que satisfazem certas condições específicas.

Os trabalhos pioneiros de Ljusternik-Schnirelman na primeira metade do século XX deixaram claro que o método variacional funciona também se forem

encontrados outros pontos críticos que não um mínimo ou máximo absoluto. A procura, todavia, de pontos de sela e extremos locais é uma tarefa árdua.

Na segunda metade do século XX, deram frutos as idéias de Ljusternik-Schnirelman, através dos trabalhos de Palais, Smale, Ambrosseti e Rabinowitz, que desenvolveram métodos do tipo *minimax* que garantem a existência de pontos de sela. Esse é o caso do famoso Teorema do Passo da Montanha, teoria esta que será estudada mais para frente neste projeto.

Capítulo 2

Espaços de Funções

Neste capítulo concentramos nossas atenções para a compreensão dos Espaços de Sobolev. Espaços estes que são ambientes mais adequados na formulação e resolução de variados problemas na Matemática Moderna. Para tanto, começamos com um estudo rápido (porém objetivo) nos aspectos mais importantes dos Espaços L^p .

É importante frisar que fica implícito, aqui neste capítulo, que um conhecimento prévio e introdutório da Análise Funcional (isto inclui Espaços Métricos, de Banach e de Hilbert, bem como os principais teoremas que os seguem) foi devidamente trabalhado e estudado no projeto de iniciação científica anterior (agosto de 2002 à julho de 2003). Daíseguimos portanto estudando os espaços de Funções propriamente ditos.

2.1 Espaços L^p

Denota-se Ω como sendo um aberto do $\mathbb{R}^N$ dotado da medida de Lebesgue dx . Designa-se por L^1 o espaço das funções integráveis sobre Ω com valores em $\mathbb{R}$ cuja norma é dada por:

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)| dx$$

Duas funções em L^1 são iguais quando coincidem q.t.p (quase todo ponto), ou seja, exceto num conjunto de medida nula.

Teorema 2 Teorema da convergência monótona de Beppo Levi

Seja (f_n) uma sequência crescente de funções de L^1 tal que

$$\sup_n \int f_n < \infty.$$

Então $f_n(x)$ converge q.t.p. em Ω , isto é, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ onde $f(x)$ é um limite finito. Além do mais $f \in L^1$ e $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.

Teorema 3 Convergência dominada de Lebesgue

Seja (f_n) uma sequência crescente de funções de L^1 . Suponhamos que:

1. $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω ;
2. existe uma função $g \in L^1$ tal que para cada n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω .

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$

Notação: Denota-se por $C_c(\Omega)$ o espaço das funções contínuas de Ω e com suporte compacto, isto é,

$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega); f(x) = 0 \forall x \in \Omega \setminus K \text{ donde } K \subset \Omega \text{ é um compacto}\}$$

Sejam $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ e $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ abertos e seja $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável.

Teorema 4 (Tonelli)

Suponhamos que

$$\int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty$$

para quase todo $x \in \Omega_1$ e que

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty$$

Então $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$

Teorema 5 (Teorema da densidade)

O espaço $C_c(\Omega)$ é denso em $L^1(\Omega)$, quer dizer,

$$\forall f \in L^1 \quad e \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists f_1 \in C_c(\Omega) \quad \text{tal que} \quad \|f - f_1\|_{L^1} < \varepsilon$$

O teorema acima surge como resultado bastante utilizado em diversas demonstrações de teoremas conseguintes.

Teorema 6 (Fubini)

Suponhamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então para quase todo $x \in \Omega_1$,

$$F(x, y) \in L_y^1(\Omega_2) \quad e \quad \int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy \in L_x^1(\Omega_1)$$

Igualmente para quase todo $y \in \Omega_2$

$$F(x, y) \in L_x^1(\Omega_1) \quad e \quad \int_{\Omega_1} |F(x, y)| dx \in L_y^1(\Omega_2)$$

Além disso se verifica

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} |F(x, y)| dx = \int \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |F(x, y)| dx dy$$

Definição: Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$; definimos por

$$L^p = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

E cuja norma é definida por:

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

Definição: Definimos por

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é mensurável e } \exists C \text{ tal que } |f(x)| < C \text{ q.t.p. em } \Omega\}$$

E a norma é definida por

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C ; |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}$$

Observação: Se $f \in L^\infty$, então

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \text{ q.t.p. em } \Omega$$

De fato, existe uma sequência C_n tal que $C_n \rightarrow \|f\|_{L^\infty}$ e para cada n , $|f(x)| \leq C_n$ q.t.p. em Ω . Assim, $|f(x)| \leq C_n \forall x \in \Omega \setminus E_n$ com E_n de medida nula. Se escreve $E = \bigcup_n E_n$ de forma que E é de medida nula $\forall n$ e $\forall x \in \Omega \setminus E$.

Notação: Seja $1 \leq p \leq \infty$; se designa por p' o conjugado de p .

Com estas ferramentas pode-se provar que ao utilizarmos os espaços L^p em aplicações futuras, temos a garantia que os mesmos são espaços vetoriais normados e completos, portanto, espaços de Bannach.

Abaixo segue a demonstração da reflexividade dos espaços L^p

Teorema 7 L^p é reflexivo para $1 < p < \infty$

A demonstração é feita provando-se três etapas distintas:

1. **(Primeira desigualdade de Clarkson)** Seja $2 \leq p < \infty$; se verifica

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2} (\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p) \quad \forall f, g \in L^p \quad (2.1)$$

2. L^p é uniformemente convexo, e portanto reflexivo para $2 \leq p \leq \infty$.

3. L^p é reflexivo para $1 < p \leq 2$.

Com os resultados acima obtidos, podemos estender o teorema da densidade já apresentado acima para um teorema mais abrangente:

Teorema 8 O espaço $C_c(\Omega)$ é denso em L^p para $1 \leq p < \infty$.

Precisamos ainda de uma outra definição e outro lema para poder ter as ferramentas necessárias para a prova deste teorema.

Definição: Seja $1 \leq p \leq \infty$; Uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ pertence a $L^p_{Loc}(\Omega)$ quando $f1_K \in L^p(\Omega)$ para todo compacto $K \subset \Omega$

Lema 1 Seja $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$ tal que

$$\int f u = 0 \quad \forall u \in C_c(\Omega) \quad (2.2)$$

Então $f = 0$ q.t.p em Ω

Demonstração do Teorema ?? : É sabido que $C_c(\Omega)$ é denso em $L^1(\Omega)$. Suponha então $1 < p < \infty$. Para demonstrar que $C_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ é bastante verificar que se $h \in L^{p'}(\Omega)$ satisfaz

$$\int h u = 0 \quad \forall u \in C_c(\Omega),$$

então $h = 0$. Mas $h \in L^1_{Loc}(\Omega)$ e

$$\int |h 1_K| \leq \|h\|_{L^{p'}} |K|^{\frac{1}{p}} < \infty$$

e assim pode-se aplicar o Lema ?? para concluir que $h = 0$ q.t.p.

Outro resultado básico e que foi estudado com detalhes

Teorema 9 $L^p(\Omega)$ é separável para $1 \leq p < \infty$.

Por ter sido bastante discutido e trabalhado, segue aqui um resumo da demonstração:

Designa-se por $(R_i)_{i \in I}$ a família (enumerável) de retângulos R da forma

$$R = \prod_{k=1}^N]a_k, b_k[\quad , \quad a_k, b_k \in \mathbb{Q} \quad e \quad \mathbb{Q} \subset \Omega$$

Se designa por E o espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ gerado pelas funções 1_{R_i} (i.e. as combinações lineares finitas com coeficientes racionais das funções 1_{R_i}); de modo que E é enumerável. Demonstremos que E é denso em L^p .

Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$ fixos. Seja $f_1 \in C_c(\Omega)$ tal que

$$\|f - f_1\|_{L^p} < \varepsilon.$$

Seja Ω' um aberto limitado tal que

$$\text{Supp } f_1 \subset \Omega' \subset \Omega.$$

Como $f_1 \in C_c(\Omega')$, constrói-se uma função $f_2 \in E$ tal que

$$\text{Supp } f_2 \subset \Omega'$$

e que

$$|f_2(x) - f_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|\Omega'|^{\frac{1}{p}}} \quad q.t.p$$

em Ω' pois começamos recobrimo $\text{Supp } f_1$ com um número finito de retângulos R_i sobre os quais a oscilação de f_1 é inferior a

$$\frac{\varepsilon}{|\Omega'|^{\frac{1}{p}}}.$$

Daí resulta que $\|f_2 - f_1\|_{L^p} \leq \varepsilon$ e então

$$\|f - f_2\|_{L^p} < 2\varepsilon.$$

O próximo resultado afirma que existe uma isometria entre o dual do espaço L^1 com o espaço L^∞ .

Teorema 10 *Seja $\varphi \in (L^1)'$. Então existe $u \in L^\infty$ único tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^1.$$

Além do mais temos a igualdade:

$$\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)'}$$

Observação: O espaço L^1 não é reflexivo. De fato, suponhamos que $0 \in \Omega$. Consideremos a sequência $f_n = \alpha_n 1_{B(0, \frac{1}{n})}$ com n suficientemente grande para que $B(0, \frac{1}{n}) \subset \Omega$ e $\alpha_n = |B(0, \frac{1}{n})|^{-1}$ de modo que $\|f_n\|_{L^1} = 1$. Se L^1 fosse reflexivo existiria uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $f \in L^1$ tal que $f_{n_k} \rightarrow f$ na topologia fraca $\sigma(L^1, L^\infty)$. Assim pois,

$$\int f_{n_k} \varphi \rightarrow \int f \varphi \quad \forall \varphi \in L^\infty. \quad (2.3)$$

Quando $\varphi \in C_c(\Omega \setminus \{0\})$ nota-se que $\int f_{n_k} \varphi = 0$ para k suficientemente grande. Resulta de (??) que

$$\int f \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega \setminus \{0\})$$

aplicando o Lema ?? no aberto $\Omega \setminus \{0\}$ a função f (restringida a $\Omega \setminus \{0\}$) obtemos que $f = 0$ q.t.p. em $\Omega \setminus \{0\}$. E portanto $f = 0$ q.t.p. em Ω . porém se $f \equiv 1$ em (??), resulta que $\int f = 1$, o que é um absurdo.

Façamos um estudo agora das propriedades básicas do L^∞

- A bola unitária fechada B_{L^∞} é compacta na topologia fraca $\sigma(L^\infty, L^1)$
- Se (f_n) é uma sequência limitada em L^∞ , pode-se retirar uma subsequência convergente em L^∞ na topologia fraca $\sigma(L^\infty, L^1)$

Porém, L^∞ não é reflexivo (caso contrário, L^1 seria).

O dual de L^∞ contém L^1 (pois $(L^1)' = L^\infty$) e é estritamente maior que L^1 ; existem formas lineares contínuas φ sobre L^∞ que não são do tipo

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^\infty \quad \text{com } u \in L^1$$

Observação: O espaço L^∞ não é separável.

O lema acima pode ser demonstrado utilizando o

Lema 2 *Seja E um espaço de Banach. Suponhamos que existe uma família $(O_i)_{i \in I}$ tal que*

1. *Para todo $i \in I$, O_i é um aberto não vazio de E .*
2. *$O_i \cap O_j = \emptyset$ se $i \neq j$.*
3. *I não é enumerável.*

Então E não é separável.

2.2 Derivadas Fracas

Esta sessão tem como objetivo enfraquecer a noção de Derivadas Parciais.

Motivação para a definição de derivadas fracas. Assuma que temos uma função $u \in C^1(\Omega)$. Então se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, vemos, devido à fórmula de integração por partes, que:

$$\int_{\Omega} u \phi_{x_i} dx = - \int_{\Omega} u_{x_i} \phi dx \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2.4)$$

Não há termos de fronteira já que ϕ tem suporte compacto em Ω e portanto se anula em $\partial\Omega$. Mais geralmente agora, se k é um inteiro positivo, $u \in C^k(\Omega)$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é um multiíndice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$, então

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u \phi dx \quad (2.5)$$

Esta equação é válida pois

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x^{\alpha_n}} \phi$$

e nós podemos aplicar a formula (??) $|\alpha|$ vezes.

Nós agora examinamos a fórmula (??), válida para $u \in C^k$, e perguntamos se alguma variação dela ainda pode ser verdadeira mesmo se u não for k vezes continuamente diferenciável. Note que a parte esquerda de (??) faz sentido se u for apenas localmente somável. O problema é que se u não for C^k então a expressão “ $D^\alpha u$ ” na parte direita da equação não tem sentido. Nós resolvemos este problema perguntando se existe uma função localmente somável v para a qual a equação (??) é válida ao trocar v por $D^\alpha u$:

Definição: Suponha que $u, v \in L_{loc}^1(\Omega)$, e α é um multiíndice. Nós dizemos que v é a α -ésima derivada parcial fraca de u , denotada por $D^\alpha u = v$, quando

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx \quad (2.6)$$

para toda função $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Em outras palavras, se nos for dada uma u e se por acaso existir uma v satisfazendo (??) para toda ϕ , nós dizemos que $D^\alpha u = v$ no sentido fraco. Do contrário, u não possui tal derivada fraca.

Assim, temos como resultado inicial o seguinte

Lema 3 (*Unicidade de derivadas fracas*). Uma α -ésima derivada parcial fraca de u , se existir, é unicamente definida a menos de um conjunto de medida nula.

Prova: Assuma que $v, \widehat{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisfazem

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \widehat{v} \phi dx$$

para toda função $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$. Então

$$\int_{\Omega} (v - \widehat{v}) \phi dx = 0$$

para toda função $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$; portanto $v - \widehat{v} = 0$ q.t.p. ■

2.3 Espaços de Sobolev

Fixe $1 \leq p \leq \infty$ e k um inteiro não negativo. Nós iremos definir agora alguns espaços de funções, cujos membros possuem derivadas fracas de várias ordens em vários espaços L^p .

Definição: O espaço de Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega)$$

consiste de todas as funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ localmente somáveis tais que, para cada multiíndice α com $|\alpha| \leq k$, $D^{\alpha}u$ existe no sentido fraco e pertence a $L^p(\Omega)$.

Definição: Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, nós definimos sua norma como sendo

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^p dx \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_{\Omega} |D^{\alpha}u| & (p = \infty). \end{cases}$$

Definição: Nós denotamos por

$$W_0^{k,p}(\Omega)$$

como sendo o fecho de $C_c^{\infty}(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

Assim, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se e somente se existem funções $u_m \in C_c^{\infty}(\Omega)$ tais que $u_m \rightarrow u$ em $W^{k,p}(\Omega)$. Nós interpretamos $W_0^{k,p}(\Omega)$ como o espaço que contém funções $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tais que “ $D^{\alpha}u = 0$ em $\partial\Omega$ ” para todo $|\alpha| \leq k-1$.

Observação: É interessante notar que se $n = 1$ e $\Omega = I$ é um intervalo aberto da reta, então $u \in W^{1,p}(I)$ se e somente se u se iguala q.t.p. a uma função absolutamente contínua cuja derivada usual (que existe q.t.p.) pertence a $L^p(I)$. Tal caracterização tão simples existe apenas para $n = 1$. Geralmente uma função pode pertencer a um espaço de Sobolev e ainda assim ser descontínua e/ou não limitada.

Propriedades Elementares

Continuando nosso pequeno estudo nos espaços de Sobolev, nós passamos agora por algumas propriedades de derivadas parciais fracas que, para funções suaves são óbvias. no entanto ao nos depararmos com funções de Sobolev, devemos mostrar tais propriedades utilizando apenas a definição de derivadas fracas que foi estudada.

Teorema 11 *Assuma que $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ e $|\alpha| \leq k$. Então*

- $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ e $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$ para quaisquer multiíndice α, β com $|\alpha| + |\beta| \leq k$.
- Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ e $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, $|\alpha| \leq k$
- Se A é um subconjunto aberto de Ω , então $u \in W^{k,p}(A)$.
- Se $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$, então $\zeta u \in W^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} D^\beta \zeta D^{\alpha - \beta} u$$

Não apenas muitas regras usuais do Cálculo se aplicam a derivadas fracas, bem como os Espaços de Sobolev também possuem uma boa estrutura matemática:

Teorema 12 *Para cada $k = 1, \dots$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

A prova deste acaba sendo não tão complicada. Primeiramente, é preciso provar que este espaço possui uma estrutura de espaço vetorial normado e, não por acaso, a norma previamente definida nesta seção satisfaz os axiomas de uma norma, com a desigualdade triangular podendo ser provada fazendo-se uso da já

conhecida Desigualdade de Minkowski. Para provar a completude procedemos de forma usual, tomando uma seqüência de Cauchy em $W^{k,p}(\Omega)$ e, utilizando-se do fato de que os espaços L^p são completos, provamos que esta seqüência converge em $W^{k,p}(\Omega)$.

Capítulo 3

O Método Variacional Direto

3.1 A Forma Fraca do Princípio de Dirichlet

No capítulo anterior enfraquecemos a noção de derivada. Desta forma, podemos agora “adaptar” o problema (??) de Dirichlet na forma

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, & \forall v \in C_0^\infty(\overline{\Omega}) \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

O espaço de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$ foi introduzido como o ambiente ideal para tratar o problema de Dirichlet (??) em sua forma (??), denominada por forma fraca do problema. A energia (funcional) (??) torna-se o funcional $I : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ e o Princípio de Dirichlet torna-se:

Teorema 13 (*PRINCÍPIO DE DIRICHLET*) *Uma função $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca de (??) (i.e., solução de (??)) se, e somente se, u for um ponto de mínimo absoluto do funcional (??) definido em $W_0^{1,2}(\Omega)$.*

A demonstração é essencialmente a mesma do Teorema 1, com pequenas adaptações. A diferença é que agora a energia é um funcional definido sobre um espaço de Hilbert e a estrutura de $W_0^{1,2}(\Omega)$ pode ser usada. Por exemplo, pode-se falar da derivada da energia no sentido de Fréchet, dada por

$$I'(u) \cdot v = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

A derivada de um funcional no sentido de Fréchet corresponde à tomada de derivadas direcionais, como foi feito na demonstração do Teorema 1. Note que as soluções da equação $I'(u) = 0$ correspondem a soluções de (??), ou seja, pontos críticos de I correspondem a soluções fracas do problema (??).

A unicidade da solução fraca do problema em questão pode ser demonstrada da seguinte forma: se u e $\hat{u}$ são soluções de (??), tem-se que, $\forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} \nabla \hat{u}(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla(u - \hat{u}) \cdot \nabla v(x) dx = 0.$$

Portanto $\nabla(u - \hat{u}) = 0$ e, conseqüentemente $u - \hat{u}$ é constante. Como u e $\hat{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, resulta $u = \hat{u}$

3.2 O Caso de Dimensão Finita

Antes de atacar o problema de encontrar um ponto de mínimo para um funcional definido no espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$, de dimensão infinita, pode ser interessante examinar um caso mais simples, como o problema análogo em $\mathbb{R}^N$. Para podermos ter uma melhor visão geométrica, tomemos o caso bidimensional.

Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, é interessante obter condições sobre F que garantam a existência de um ponto de mínimo absoluto. Claramente, uma condição necessária à existência de tal ponto é a limitação inferior da função. Entretanto, esta condição não é suficiente, por exemplo, a função

$$F(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$$

é diferenciável em todo o plano e limitada inferiormente pelo seu ínfimo 0, mas não assume este valor em ponto algum. O problema aqui é que a função decai para 0 quando $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$, mas é sempre positiva.

Para garantir a existência de um ponto de mínimo absoluto, portanto, é preciso impedir de alguma forma que o ponto de mínimo “escape” como no exemplo anterior.

Se, ao contrário, houver uma sequência $(x_n, y_n) \subset \mathbb{R}^2$ tal que $F(x_n, y_n) \rightarrow \inf_{\mathbb{R}^2} F$ e $\|(x_n, y_n)\| \leq M$ para algum $M \in \mathbb{R}$, então tem de existir pelo menos um ponto de mínimo absoluto de F . De fato, como esta sequência é limitada, ela possui alguma subsequência convergente, e, portanto, pela continuidade da F , o ínfimo é atingido para algum ponto do domínio.

Assim, uma possibilidade para garantir a existência de um ponto de mínimo absoluto para F é impor, além da exigência de limitação inferior, alguma condição

de crescimento que assegure a existência de uma sequência minimante limitada. Uma condição suficiente seria por exemplo,

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} F(x,y) = \infty.$$

Assim, o crescimento de F impede que o ponto de mínimo “escape para o infinito”.

Conforme será visto adiante, condições de crescimento desempenham um papel muito importante na minimização de funcionais definidos em espaços de dimensão infinita.

3.3 O Problema da Compacidade

Infelizmente, no caso de dimensão infinita, o argumento da seção 3.2 não é válido. Utilizou-se fundamentalmente o fato de que toda sequência limitada do $\mathbb{R}^N$ possui alguma subsequência convergente, para podermos obter a existência de um ponto de mínimo absoluto. Entretanto, em espaços de dimensão infinita, existem sequências limitadas que não possuem nenhuma subsequência convergente.

Ocorre que no $\mathbb{R}^N$ qualquer bola é um conjunto compacto, o que não é verdade em espaços de dimensão infinita. Assim, ao tentar minimizar funcionais nestes espaços, mesmo considerando uma sequência minimante limitada, ainda é possível que o ponto de mínimo absoluto escape.

Portanto, a topologia de um espaço de dimensão infinita é completamente diferente. Isso afeta também a noção de continuidade de um funcional. Pode ser interessante, por exemplo, rever os conceitos de continuidade de um funcional, ou, ainda, alterar a topologia considerada - o uso das topologias fraca e fraca* é muito produtivo em alguns casos.

3.4 Semicontinuidade Inferior

Uma alternativa ao conceito de continuidade tradicional é o conceito de semicontinuidade inferior. Apesar de parecer feita sob medida para o método variacional direto, a noção de semicontinuidade inferior foi introduzida por Baire num contexto puramente topológico.

Sejam X um espaço topológico de Hausdorff e $I : X \rightarrow \mathbb{R}$, I é semicontínuo inferiormente se, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $A_\alpha = \{x \in X \mid I(x) > \alpha\}$ é aberto.

Uma condição que implica a semicontinuidade inferior é a condição de compacidade limitada: para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $K_\alpha = X \setminus A_\alpha$ é compacto (propriedade de Heine-Borel). Por outro lado se I é semicontínuo inferiormente e X é compacto, I satisfaz a condição de compacidade limitada. Em particular, se X é compacto, então ambas as condições são equivalentes.

Estas condições podem ainda serem expressas em termos de sequências: I é sequencialmente semicontínuo inferiormente se, para toda sequência $(x_n) \in X$ convergente para x_0 , tem-se que $I(x_0) \leq \liminf I(x_n)$; por sua vez, a condição sequencial de compacidade limitada é: cada K_α é sequencialmente compacto.

Verificamos que todo funcional semicontínuo inferiormente é sequencialmente semicontínuo inferiormente. A recíproca só é válida quando X satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade.

Com essas novas definições em mãos, pudemos então estudar o seguinte

Teorema 14 *Sejam X um espaço topológico e de Hausdorff e $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a condição sequencial de compacidade limitada. Então I é limitado inferiormente em X e assume seu ínfimo.*

A demonstração é simples e não foi interessante expô-la neste trabalho. Outro resultado extremamente útil em aplicações ocorre quando X é um subconjunto fracamente fechado de um espaço de Banach reflexivo e I é coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente:

Teorema 15 *Sejam X um subconjunto fracamente fechado de um espaço de Banach reflexivo e $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo*

1. $I(u) \rightarrow \infty$, quando $\|u\| \rightarrow \infty$ e $u \in X$;
2. para qualquer sequência $(x_n) \subset X$ fracamente convergente para x_0 tem-se que $I(x_0) \leq \liminf I(x_n)$.

Então I é limitado inferiormente e assume seu ínfimo em X

Vale destacar que a norma de um espaço de Banach é sempre coerciva e fracamente semicontínua inferiormente.

3.5 A Desigualdade de Poincaré

Retomando o objetivo de demonstrar a existência de solução fraca de (??) em $W_0^{1,2}(\Omega)$, busca-se alguma estimativa de crescimento da energia (??). Em outras palavras, deseja-se conhecer o comportamento de $I(u)$ quando $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \rightarrow \infty$.

Mais precisamente, quer-se aplicar o Teorema 15 à energia, que só é possível se for coerciva.

De fato, a coercividade de I decorre do seguinte resultado:

Teorema 16 (*DESIGUALDADE DE POINCARÉ*) Para toda função $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ temos que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \left[\frac{\text{Vol}(\Omega)}{\omega_N} \right]^{\frac{1}{N}} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

onde ω_N é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$

O importante aqui é que se obtém uma estimativa de $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ em termos somente da norma L^2 do gradiente de u . Afinal de contas o termo

$$\left[\frac{\text{Vol}(\Omega)}{\omega_N} \right]^{\frac{1}{N}}$$

não depende de u , mas somente de N e do volume de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Decorre imediatamente da desigualdade de Poincaré, que a norma $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ é equivalente à norma do gradiente definida em $W_0^{1,2}(\Omega)$ por

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2)$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré e a desigualdade de Cauchy-Schwarz a (??), temos que

$$I(u) \geq A\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 - B\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)},$$

para constantes A e B positivas. Portanto, $I(u) \rightarrow \infty$ quando $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \rightarrow \infty$, ou seja, a energia é um funcional coercivo.

3.6 A Solução Fraca do Princípio de Dirichlet

Nesta seção nós provamos finalmente a existência de uma solução fraca para o problema de Dirichlet, ou seja, uma solução de (??) em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Trata-se de uma aplicação do Teorema 15 com $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ e I sendo a energia dada por (??).

Uma vez que $W_0^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, $W_0^{1,2}(\Omega)^* = W_0^{1,2}(\Omega)$ e

$$(W_0^{1,2}(\Omega)^*)^* = W_0^{1,2}(\Omega)^* = W_0^{1,2}(\Omega),$$

de modo que $W_0^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo e $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ de fato atende às hipóteses do Teorema 15.

A desigualdade de Poincaré (Teorema 16) garante a coercividade de I . Resta verificar, portanto, a semicontinuidade inferior fraca de I . Com efeito, para ver que I é fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente, note que, da definição da energia (??),

$$I(u) = \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 + L(u)$$

onde $\|\cdot\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ é dada por (??) e $L : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é o funcional linear dado por

$$L(u) = - \int_{\Omega} u(x)f(x)dx.$$

Mas a norma do gradiente é fracamente sequencialmente semicontínua inferiormente e, da própria definição de convergência fraca, como L é um funcional linear, $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ implica que $L(u_n) \rightarrow L(u)$, donde L é fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente. Assim I também o é.

Consequentemente, a aplicação do Teorema 15 assegura a existência de um ponto de mínimo absoluto $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Ora, pela forma fraca do princípio de Dirichlet (Teorema 13), u é a solução de (??).

Surge, então, a questão da regularidade: será que esta solução u é de classe $C^2(\overline{\Omega})$, e, portanto, uma solução de (??)? É o que continuamos estudando neste projeto de iniciação científica.

Referências Bibliográficas

- [1] Haim Brezis, *Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications*, Masson Paris, 1987
- [2] de Figueiredo, D. G. Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 81. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [3] Kavian, Otared Introduction à la thorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques. Mathématiques Applications, 13. Springer-Verlag, Paris, 1993.
- [4] Rabinowitz, Paul H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
- [5] Willem, Michel Minimax theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.