

Equações Parabólicas Semilineares

Prof. Alexandre Nolasco de Carvalho

26 de junho de 2001

Sumário

1	Semigrupos e Seus Geradores	5
1.1	Definições e Resultados Básicos	5
1.2	O Teorema de Hille-Yosida	8
1.3	O Teorema de Lumer-Phillips	10
1.4	Fórmulas Exponenciais	13
1.5	Pseudo-Resolventes	16
1.6	O Semigrupo Dual e o Teorema de Stone	17
1.7	Transformada Inversa de Laplace	20
1.8	Operadores Setoriais e Analiticidade	22
2	Potências Fracionárias	25
2.1	Introdução	25
2.2	Operadores do Tipo Positivo	27
2.3	Potências de Potências Fracionárias	35
2.4	Desigualdades de Interpolação para Potências Fracionárias	37
2.5	Potências Fracionárias e Semigrupos	40
2.6	Potências Imaginárias Limitadas	41
3	Teoremas de Perturbação de Geradores	49
3.1	Geradores de Semigrupos Fortemente Contínuos	49
3.2	Perturbação de Operadores Setoriais	52
3.3	Teoremas de Representação	53
4	Positividade	55
4.1	Espaços de Banach Ordenados e Positividade	55
4.2	A Equação Linear	57
4.3	Alguns Operadores com Resolvente Positivo	60
5	Problema de Cauchy não homogêneo	63
5.1	Existência, Unicidade e Regularidade	63
5.2	Comparação em Problemas não Homogêneos	66
6	O Problema de Cauchy Semilinear	67
6.1	O Caso Hiperbólico	67
6.2	O Caso Parabólico	72
7	Teoremas Espectrais e Dicotomias	79
7.1	Introdução	79
7.2	Decomposição Espectral de Operadores Fechados	80
7.3	Decomposição Espectral de Semigrupos	81

7.4	Teoremas Espectrais para Semigrupos	83
7.5	Decomposição Espectral de Operadores Setoriais	85
8	Vizinhança de Um Ponto de Equilíbrio	87
8.1	Estabilidade e Instabilidade	87
8.2	A Propriedade do Ponto de Sela	91
9	O Problema Parabólico com Expoentes Críticos	93
9.1	Introdução	93
9.2	Resultados Abstratos	96

Capítulo 1

Semigrupos e Seus Geradores

1.1 Definições e Resultados Básicos

Recorde que se E_0 e F_0 são espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) denotamos por $L(E_0, F_0)$ o espaço dos operadores lineares e contínuos de E_0 em F_0 com a norma usual; isto é, para $T \in L(E_0, F_0)$,

$$\|T\|_{L(E_0, F_0)} = \sup_{\substack{e \in E_0 \\ e \neq 0}} \frac{\|Te\|_{F_0}}{\|e\|_{E_0}}.$$

No caso particular $E_0 = F_0$ escrevemos $L(E_0)$ para denotar $L(E_0, E_0)$. Seja E_0^* o dual topológico de E_0 ; isto é, $E_0^* = L(E_0, \mathbb{K})$ com a topologia dada pela norma acima. Denotamos o valor de $e^* \in E_0^*$ em $e \in E_0$ por $\langle e^*, e \rangle$ ou $\langle e, e^* \rangle$.

Definição 1.1.1 *Um semigrupo de operadores lineares em E_0 é uma família $\{T(t) : t \geq 0\} \subset L(E_0)$ tal que tal que*

- (i) $T(0) = I_{E_0}$,
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$.

Se adicionalmente

- (iii) $\|T(t) - I_{E_0}\|_{L(E_0)} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$, dizemos que o semigrupo é uniformemente contínuo
- (iv) $\|T(t)e - e\|_{E_0} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$, $\forall e \in E_0$, dizemos que o semigrupo é fortemente contínuo.

Todo semigrupo fortemente contínuo possui uma limitação exponencial que é dada no teorema a seguir.

Teorema 1.1.1 *Suponha que $\{T(t), t \geq 0\} \subset L(E_0)$ é um semigrupo fortemente contínuo. Então, existe $M \geq 1$ e β tais que*

$$\|T(t)\|_{L(E_0)} \leq M e^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Para qualquer $\ell > 0$ podemos escolher $\beta \geq \frac{1}{\ell} \log \|T(\ell)\|_{L(E_0)}$ e então escolher M .

Prova: Primeiramente note que $\sup_{t \in [0, \eta]} \|T(t)\|_{L(E_0)} < \infty$ para algum $\eta > 0$ pois caso contrário existiria uma sequência $t_n \rightarrow 0^+$ tal que $\|T(t_n)\|_{L(E_0)} \rightarrow \infty$. Mas $\{T(t_n)e\}_{n \geq 1}$ é limitada para cada $e \in E_0$ portanto, do Princípio da Limitação Uniforme, $\{\|T(t_n)\|_{L(E_0)}\}_{n \geq 1}$ é limitada contrariando a hipótese.

Escolha $\ell > 0$ tal que $\sup\{\|T(t)\|_{L(E_0)}, 0 \leq t \leq \ell\} = M < \infty$ e seja $\beta \geq \frac{1}{\ell} \log\{\|T(\ell)\|_{L(E_0)}\}$ isto é $\|T(\ell)\|_{L(E_0)} \leq e^{\beta\ell}$ e então

$$\begin{aligned} \|T(n\ell + t)\|_{L(E_0)} &= \|T(\ell)^n T(t)\|_{L(E_0)} \leq \|T(\ell)\|_{L(E_0)}^n \|T(t)\|_{L(E_0)} \leq M e^{\beta n\ell} \\ &\leq M e^{|\beta|\ell} e^{\beta(n\ell+t)}, \quad 0 \leq t \leq \ell; \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

e a afirmativa segue. $\square$

Definição 1.1.2 Se $\{T(t), t \geq 0\} \subset L(E_0)$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares, seu gerador infinitesimal é o operador definido por $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$, onde

$$D(A) = \left\{ e \in E_0 : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)e - e}{t} \text{ existe} \right\}, \quad Ae = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)e - e}{t}.$$

O resultado a seguir coleta alguns fatos importantes sobre semigrupos fortemente contínuos sua prova é simples e é apresentada apenas para conveniência do leitor.

Teorema 1.1.2 Suponha que $\{T(t), t \geq 0\} \subset L(E_0)$ é um semigrupo fortemente contínuo.

1. Para qualquer $e \in E_0$, $t \mapsto T(t)e$ é contínuo para $t \geq 0$.
2. $t \mapsto \|T(t)\|_{L(E_0)}$ é semicontínua inferiormente e portanto mensurável.
3. Seja A o gerador infinitesimal de $T(t)$; então, A é densamente definido e fechado. Para $e \in D(A)$, $t \mapsto T(t)e$ é continuamente diferenciável e

$$\frac{d}{dt} T(t)e = AT(t)e = T(t)Ae, \quad t > 0.$$

4. $\cap_{m \geq 1} D(A^m)$ é denso em E_0 .

5. Para $\operatorname{Re} \lambda > \beta$ e β dado no Teorema 1.1.1, λ está no resolvente $\rho(A)$ de A e

$$(\lambda - A)^{-1}e = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)e dt, \quad \forall e \in E_0$$

Prova: (1) A continuidade de $t \mapsto T(t)e$ é uma consequência de Theorem 1.1.1 e de

$$\|T(t+h)e - T(t)e\|_{E_0} = \|(T(h) - I)T(t)e\|_{E_0} \rightarrow 0, \quad \text{quando } h \rightarrow 0^+, \quad t > 0, \quad e \in E_0,$$

$$\|T(t)e - T(t-h)e\|_{E_0} \leq \|T(t-h)\|_{L(E_0)} \|T(h)e - e\|_{E_0} \rightarrow 0, \quad \text{quando } h \rightarrow 0^+, \quad t > 0, \quad e \in E_0.$$

(2) Mostramos que $\{t \geq 0 : \|T(t)\|_{L(E_0)} > b\}$ é aberto em $[0, \infty)$ para cada b o que implica a afirmativa. Mas $\|T(t_0)\|_{L(E_0)} > b$ implica que existe $e \in E_0$ com $\|e\|_{E_0} = 1$ tal que $\|T(t_0)e\| > b$ segue de (1) que $\|T(t)e\| > b$ para t em uma vizinhança de t_0 , logo $\|T(t)\|_{L(E_0)} > b$ para t em uma vizinhança de t_0 e o resultado segue.

- (3) Seja $e \in E_0$ e para $\epsilon > 0$, $e_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon T(t)e dt$; então $e_\epsilon \rightarrow e$ quando $\epsilon \rightarrow 0^+$ e para $h > 0$

$$h^{-1}(T(h)e_\epsilon - e_\epsilon) = \frac{1}{\epsilon h} \left\{ \int_\epsilon^{\epsilon+h} T(t)e dt - \int_0^h T(t)e dt \right\} \rightarrow \frac{1}{\epsilon} (T(\epsilon)e - e),$$

quando $h \rightarrow 0^+$. Logo $e_\epsilon \in D(A)$. Será uma consequência imediata de (5) que A é fechado pois $(\lambda - A)^{-1} \in L(E_0)$. Se $e \in D(A)$ é claro que

$$\frac{d^+}{dt}T(t)e = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \{T(t+h)e - T(t)e\} = AT(t)e = T(t)Ae$$

é contínua e toda função com derivada a direita contínua é diferenciável.

(4) Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função em $C^\infty(\mathbb{R})$ e $\phi(t) = 0$ em uma vizinhança de $t = 0$ e também para t suficientemente grande, seja $e \in E_0$ e $f = \int_0^\infty \phi(t)T(t)edt$. Segue facilmente de $h^{-1}(T(h)f - f) = h^{-1} \int_h^\infty (\phi(t-h) - \phi(t))T(t)edt$ que $f \in D(A)$ e que $Af = - \int_0^\infty \phi'(t)T(t)edt$. Como $-\phi'$ satisfaz as mesmas condições que ϕ ,

$$A^m f = (-1)^m \int_0^\infty \phi^{(m)}(t)T(t)edt$$

para todo $m \geq 1$ e $f \in \cap_{m \geq 1} D(A^m)$. Para mostrar que tal conjunto de pontos é denso em E_0 , escolha ϕ acima satisfazendo também $\int_0^\infty \phi(t)dt = 1$; então se, $f_n = \int_0^\infty n\phi(nt)T(t)edt = \int_0^\infty \phi(s)T(s/n)eds$, $n = 1, 2, 3, \dots$ e temos que $f_n \in \cap_{m \geq 1} D(A^m)$ e $f_n \rightarrow e$ quando $n \rightarrow \infty$.

(5) Defina $R(\lambda) \in L(E_0)$ por

$$R(\lambda)e = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)edt$$

e note que $\|R(\lambda)\|_{L(E_0)} \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \beta}$, se $\operatorname{Re}\lambda > \beta$ e $\|T(t)\|_{L(E_0)} \leq Me^{\beta t}$. Seja $e \in E_0$ e $h > 0$

$$\begin{aligned} h^{-1}(T(h) - I)R(\lambda)e &= R(\lambda) \frac{T(h)e - e}{h} \\ &= h^{-1} \left[\int_h^\infty e^{-\lambda t + \lambda h} T(t)e - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)e \right] \\ &= h^{-1} \left[- \int_0^h e^{\lambda(h-t)} T(t)e + \int_0^\infty (e^{\lambda h} - 1) e^{-\lambda t} T(t)e \right] \\ &\rightarrow -e + \lambda R(\lambda)e, \quad \text{quando } h \rightarrow 0^+. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Portanto $R(\lambda)e \in D(A)$ e $(\lambda - A)R(\lambda)e = e$, e $\lambda - A$ é sobrejetivo. Também, se $e \in D(A)$ então, como $AR(\lambda)e = R(\lambda)Ae$ por (1.1) vemos que $(\lambda - A)R(\lambda)e = e = R(\lambda)(\lambda - A)e$, $e \in D(A)$ e $\lambda - A$ é também um-a-um, portanto uma bijeção de $D(A)$ sobre E_0 com inversa limitada $R(\lambda)$ e a prova está completa. $\square$

Teorema 1.1.3 *Sejam $\{T(t), t \geq 0\}$ e $\{S(t), t \geq 0\}$ semigrupos fortemente contínuos com geradores infinitesimais A e B respectivamente. Se $A = B$ então $T(t) = S(t)$, $t \geq 0$.*

Prova: Seja $e \in D(A) = D(B)$. Do Teorema 1.1.2 segue facilmente que a função $s \mapsto T(t-s)S(s)e$ é diferenciável e que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)e &= -AT(t-s)S(s)e + T(t-s)BS(s)e \\ &= -T(t-s)AS(s)e + T(t-s)BS(s)e = 0. \end{aligned}$$

Portanto $s \mapsto T(t-s)S(s)e$ é constante e em particular seus valores em $s = 0$ e $s = t$ são os mesmos, isto é $T(t)e = S(t)e$. Isto vale para todo $e \in D(A)$ e como $D(A)$ é denso em E_0 e $S(t)$, $T(t)$ são limitados, $T(t)e = S(t)e$ para todo $e \in E_0$. $\square$

1.2 O Teorema de Hille-Yosida

Teorema 1.2.1 (Hille-Yosida) *Suponha que $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ é um operador linear. Então os fatos seguintes são equivalentes*

(i) *A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\} \subset L(E_0)$ tal que*

$$\|T(t)\|_{L(E_0)} \leq e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0;$$

(ii) *A é um operador linear fechado, densamente definido cujo conjunto resolvente contém (ω, ∞) e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{L(E_0)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \quad \forall \lambda > \omega.$$

Prova: (i) $\Rightarrow$ (ii) é provado em (3), em particular

$$\|(\lambda - A)^{-1}e\|_{E_0} \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)e\|_{E_0} dt \leq \frac{1}{\lambda - \omega} \|e\|_{E_0}$$

se $\lambda > \omega$.

Note que $T(t)e^{-\omega t} = T_1(t)$ é um semigrupo com $\|T_1(t)\|_{L(E_0)} \leq 1$ (chamado semigrupo de contrações) e o gerador de $T_1(t)$ é $A - \omega$ logo é suficiente tratar o caso $\omega = 0$. Assuma que (ii) vale com $\omega = 0$. Para $\lambda > 0$

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(E_0)} \leq 1, \quad \lambda(\lambda - A)^{-1} = (I - \lambda^{-1}A)^{-1} = I + A(\lambda - A)^{-1}$$

então $e \in D(A)$ implica

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}e - e\|_{E_0} = \|(\lambda - A)^{-1}Ae\|_{E_0} \leq \lambda^{-1}\|Ae\|_{E_0} \rightarrow 0$$

quando $\lambda \rightarrow \infty$ e, como A é densamente definido,

$$\lambda(\lambda - A)^{-1}e = (I - \lambda^{-1}A)^{-1}e \rightarrow e \tag{1.2}$$

para cada $e \in E_0$. Defina $A_\lambda = A(I - \lambda^{-1}A)^{-1}$, $\lambda > 0$ então $A_\lambda \in L(E_0)$,

$$\|A_\lambda\|_{L(E_0)} = \lambda\|A(\lambda - A)^{-1}\|_{L(E_0)} \leq 2\lambda$$

e se $e \in D(A)$, $A_\lambda e \rightarrow Ae$ quando $\lambda \rightarrow \infty$. A_λ é a **Aproximação de Yosida** do gerador A . Obtemos $T(t)$ como o limite de e^{tA_λ} quando $\lambda \rightarrow \infty$. Primeiro note que

$$A_\lambda = \lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda I_{E_0}$$

logo

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}\|_{L(E_0)} &= \|e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2(\lambda - A)^{-1}}\|_{L(E_0)} \\ &\leq e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2\|(\lambda - A)^{-1}\|_{L(E_0)}} \leq 1 \end{aligned}$$

e para qualquer $\lambda, \mu > 0$ (e $t > 0$), desde que $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$,

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}e - e^{tA_\mu}e\|_{E_0} &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} e) ds \right\|_{E_0} \\ &\leq \int_0^1 t \|e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (A_\lambda e - A_\mu e)\|_{E_0} ds \\ &\leq t \|A_\lambda e - A_\mu e\|_{E_0}. \end{aligned}$$

Portanto para $e \in D(A)$, $T(t)e \equiv \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbf{e}^{tA_\lambda} e$ existe uniformemente para $0 \leq t \leq t_0$, qualquer $t_0 > 0$, $t \rightarrow T(t)e$ é contínuo para $t \geq 0$, $T(t)e \rightarrow e$ em E_0 quando $t \rightarrow 0^+$, $T(t)(T(s)e) = T(t+s)e$ para $t, s \geq 0$ e $\|T(t)e\|_{E_0} \leq \|e\|_{E_0}$. Podemos definir de forma única $T(t) \in L(E_0)$ para cada $t \geq 0$.

Se $e \in E_0$, $\epsilon > 0$ dados. Então existem $e_1 \in D(A)$ e $\delta > 0$ tais que, $\|e_1 - e\|_{E_0} < \epsilon/3$ e $\|T(t)e_1 - e_1\|_{E_0} < \epsilon/3$, $0 \leq t \leq \delta$. Segue que

$$\|T(t)e - e\|_{E_0} \leq \|T(t)(e - e_1)\|_{E_0} + \|T(t)e_1 - e_1\|_{E_0} + \|e_1 - e\|_{E_0} < \epsilon.$$

Portanto $\{T(t), t \geq 0\} \subset L(E_0)$ é um semigrupo fortemente contínuo. Só resta provar que A é o seu gerador.

Seja $e \in D(A^2)$, então

$$\begin{aligned} T(t)e - e &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\mathbf{e}^{tA_\lambda} e - e) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{e}^{sA_\lambda} A_\lambda e ds \\ &= \int_0^t T(s) A e ds. \end{aligned}$$

Tomando limites, isto vale também para $e \in D(A)$ (isto é feito da seguinte forma: tomamos $e \in D(A)$ e $\{f_n\} \subset D(A)$ talque $f_n \rightarrow Ae$ então $D(A^2) \ni g_n = A^{-1}f_n \rightarrow e$ e $D(A^2) \ni g_n \rightarrow e$, $Ag_n \rightarrow Ae$).

Agora $\frac{1}{t}(T(t)e - e) = \frac{1}{t} \int_0^t T(s) A e ds \rightarrow Ae$ quando $t \rightarrow 0^+$, para qualquer $e \in D(A)$. Portanto o gerador B de $T(t)$ deve ser uma extensão de A (isto é $D(B) \supset D(A)$ e $Be = Ae$ quando $e \in D(A)$). Mas, por hipótese, $1 \in \rho(A)$ e, do fato que B é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de contrações, $1 \in \rho(B)$, então

$$E_0 = (I - A)D(A) = (I - B)D(A),$$

então $(I - B)D(A) = E_0 = (I - B)D(B)$, $D(A) = R((I - B)^{-1}) = D(B)$, e segue que $A = B$ e a prova está completa. $\square$

Ambas as condições (i) e (ii) dependem da escolha da norma em E_0 . Daremos uma formulação independente da norma, mas na prática devemos usualmente procurar normas especiais para a qual este teorema aplica.

Lema 1.2.1 *Suponha que A é um operador linear cujo conjunto resolvente contém $(0, \infty)$ e que satisfaz*

$$\|(\lambda - A)^{-n}\|_{L(E_0)} \leq M\lambda^{-n}, \quad n \geq 1, \lambda > 0.$$

Então existe uma norma $|\cdot|_{E_0}$ em E_0 tal que

$$\|e\|_{E_0} \leq |e|_{E_0} \leq M\|e\|_{E_0}, \quad \forall e \in E_0$$

e

$$|(\lambda - A)^{-1}e|_{E_0} \leq \lambda^{-1}|e|_{E_0}, \quad \forall e \in E_0, \lambda > 0.$$

Teorema 1.2.2 (Forma Geral do Teorema de Hille-Yosida) *Seja $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ um operador linear. As seguintes afirmativas são equivalente*

(i) *A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\} \subset L(E_0)$ tal que*

$$\|T(t)\|_{L(E_0)} \leq M\mathbf{e}^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0;$$

(ii) *A é fechado, densamente definido, o conjunto resolvente de A contém (β, ∞) e*

$$\|(\lambda - A)^{-n}\|_{L(E_0)} \leq M(\lambda - \beta)^{-n}, \quad \forall \lambda > \beta, n = 1, 2, \dots$$

1.3 O Teorema de Lumer-Phillips

Definição 1.3.1 *Seja E_0 um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ com norma $\|\cdot\|_{E_0}$ e seja $E_0^* = L(E_0, \mathbb{K})$ o seu dual topológico com a norma usual $\|\cdot\|_{E_0^*}$ ($\|e^*\|_{E_0^*} = \sup\{\operatorname{Re}\langle e^*, e \rangle : \|e\|_{E_0} \leq 1\}$). A aplicação dualidade $J : E_0 \rightarrow 2^{E_0^*}$ é uma função multívoca definida por*

$$J(e) = \{e^* \in E_0^* : \operatorname{Re}\langle e^*, e \rangle = \|e\|_{E_0}^2, \|e^*\|_{E_0^*} = \|e\|_{E_0}\}.$$

$J(e) \neq \emptyset$, pelo Teorema de Hahn-Banach.

Um operador linear $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ é **dissipativo** se para cada $e \in D(A)$ existe $e^* \in J(e)$ tal que $\operatorname{Re}\langle e^*, Ae \rangle \leq 0$.

Lema 1.3.1 *O operador linear A é dissipativo se e somente se*

$$\|(\lambda - A)e\|_{E_0} \geq \lambda \|e\|_{E_0} \quad (1.3)$$

para todo $e \in D(A)$ e $\lambda > 0$.

Prova: Seja A dissipativo, $\lambda > 0$ e $e \in D(A)$. Se $e^* \in J(e)$ e $\operatorname{Re}\langle Ae, e^* \rangle \leq 0$ então

$$\|\lambda e - Ae\|_{E_0} \|e\|_{E_0} \geq |\langle \lambda e - Ae, e^* \rangle| \geq \operatorname{Re}\langle \lambda e - Ae, e^* \rangle \geq \lambda \|e\|_{E_0}^2$$

e (1.3) segue. Reciprocamente, seja $e \in D(A)$ e assumamos que $\lambda \|e\|_{E_0} \leq \|\lambda e - Ae\|_{E_0}$ para todo $\lambda > 0$. Se $f_\lambda^* \in J(\lambda e - Ae)$ e $g_\lambda^* = f_\lambda^* / \|f_\lambda^*\|_{E_0^*}$ temos

$$\lambda \|e\|_{E_0} \leq \|\lambda e - Ae\|_{E_0} = \langle \lambda e - Ae, g_\lambda^* \rangle = \lambda \operatorname{Re}\langle e, g_\lambda^* \rangle - \operatorname{Re}\langle Ae, g_\lambda^* \rangle \leq \lambda \|e\|_{E_0} - \operatorname{Re}\langle Ae, g_\lambda^* \rangle \quad (1.4)$$

Como a bola unitária de E_0^* é compacta na topologia fraca* temos que existe $g^* \in E_0^*$, $\|g^*\|_{E_0^*} \leq 1$, e sequência $\lambda_n \rightarrow \infty$ tais que $g_{\lambda_n}^* \xrightarrow{w^*} g^*$. De (1.4) segue que $\operatorname{Re}\langle Ae, g^* \rangle \leq 0$ e $\operatorname{Re}\langle e, g^* \rangle \geq \|e\|_{E_0}$. Mas $\operatorname{Re}\langle e, g^* \rangle \leq |\langle e, g^* \rangle| \leq \|e\|_{E_0}$ e portanto $\langle e, g^* \rangle = \|e\|_{E_0}$. Tomando $e^* = \|e\|_{E_0} g^*$ temos $e^* \in J(e)$ e $\operatorname{Re}\langle Ae, e^* \rangle \leq 0$. Portanto, para todo $e \in D(A)$ existe $e^* \in J(e)$ tal que $\operatorname{Re}\langle Ae, e^* \rangle \leq 0$ e A é dissipativo. $\square$

Teorema 1.3.1 (Lumer-Phillips) *Suponha que A é um operador linear densamente definido em um espaço de Banach E_0 .*

- (i) *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações, então A é dissipativo (de fato, $\operatorname{Re}\langle e^*, Ae \rangle \leq 0$ para todo $e^* \in J(e)$) e $R(\lambda - A) = E_0$ para algum $\lambda > 0$,*
- (ii) *Se A é dissipativo e $R(\lambda_0 - A) = E_0$ para algum $\lambda_0 > 0$, então A é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de contrações.*

Prova: (i) Se A gera $\{T(t), t \geq 0\}$, $\|T(t)\|_{L(E_0)} \leq 1$ então $R(\lambda - A) = E_0$ para todo $\lambda > 0$ pelo Teorema de Hille-Yosida e para qualquer $e \in E_0$, $e^* \in J(e)$, $t > 0$,

$$|\langle e^*, T(t)e \rangle| \leq \|e^*\|_{E_0^*} \|T(t)e\|_{E_0} \leq \|e\|_{E_0}^2$$

então

$$\operatorname{Re}\langle e^*, \frac{T(t)e - e}{t} \rangle = \frac{1}{t} \{\operatorname{Re}\langle e^*, T(t)e \rangle - \|e\|_{E_0}^2\} \leq 0.$$

Portanto se $e \in D(A)$, $\operatorname{Re}\langle e^*, Ae \rangle \leq 0$.

(ii) Se $\lambda > 0$ e $e \in D(A)$, do Lemma 1.3.1 temos que

$$\|(\lambda - A)e\|_{E_0} \geq \lambda \|e\|_{E_0}.$$

Agora $R(\lambda_0 - A) = E_0$, $\|(\lambda_0 - A)e\|_{E_0} \geq \lambda_0 \|e\|_{E_0}$ para $e \in D(A)$, logo λ_0 está no conjunto resolvente de A e A é fechado. Seja $\Lambda = \{\lambda \in \rho(A) \cap \mathbb{R} : \lambda > 0\}$. Λ é um conjunto aberto em $(0, \infty)$ já que $\rho(A)$ é aberto, provaremos que Λ é também fechado em $(0, \infty)$ para concluir que $\Lambda = (0, \infty)$. Suponha que $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \subset \Lambda$, $\lambda_n \rightarrow \lambda > 0$, se n é suficientemente grande temos que $|\lambda_n - \lambda| \leq \lambda/4$ então, para n grande, $\|(\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1}\|_{L(E_0)} \leq |\lambda_n - \lambda| \lambda_n^{-1} \leq 1/3$ e $I + (\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1}$ é um isomorfismo de E_0 . Então

$$\lambda - A = \{I + (\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1}\}(\lambda_n - A) \quad (1.5)$$

leva $D(A)$ sobre E_0 e $\lambda \in \rho(A)$, como queríamos.

Agora todas as hipóteses do Teorema de Hille-Yosida (ii) estão verificadas e a prova está completa. $\square$

A seguir recordamos a definição de operadores adjuntos. Seja E_0 um espaço de Banach com dual E_0^* . Seja $S : D(S) \subset E_0 \rightarrow E_0$ um operador linear com domínio denso. O adjunto $S^* : D(S^*) \subset E_0^* \rightarrow E_0^*$ de S é o operador linear definido por: $D(S^*)$ é o conjunto dos $e^* \in E_0^*$ para os quais existe $f^* \in E_0^*$ com

$$\langle e^*, Se \rangle = \langle f^*, e \rangle \quad \forall e \in D(S). \quad (1.6)$$

e se $e^* \in D(S^*)$ então $f^* = S^*e^*$ onde f^* é o elemento de E_0^* satisfazendo (1.6). Note que como $D(S)$ é denso em E_0 existe no máximo um $f^* \in E_0^*$ para o qual (1.6) vale.

Seja H um espaço de Hilbert com produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Identificamos H e H^* e denotamos ambos por H .

Definição 1.3.2 *Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Um operador $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é simétrico se $\overline{D(A)} = H$ e $A \subset A^*$; isto é $\langle Ae, f \rangle = \langle e, Af \rangle$ para todo $e, f \in D(A)$. A é auto-adjunto se $A = A^*$.*

Corolário 1.3.1 *Seja A um operador linear fechado e densamente definido. Se ambos A e A^* são dissipativos, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações sobre E_0 .*

Prova: Pelo Teorema de Lumer-Philips é suficiente provar que $R(I - A) = E_0$. Como A é dissipativo e fechado $R(I - A)$ é um subespaço fechado de E_0 . Se $R(I - A) \neq E_0$ então existe $e^* \in E_0^*$, $e^* \neq 0$ tal que $\langle e^*, e - Ae \rangle = 0$ para todo $e \in D(A)$. Isto implica $e^* - A^*e^* = 0$. Como A^* é também dissipativo segue do Lema 1.3.1 que $e^* = 0$ contradizendo a construção de e^* . $\square$

Em muitos exemplos a técnica utilizada para verificar as estimativas espectrais necessárias para se garantir que um operador A é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de operadores são obtidas através do conhecimento da chamada **imagem numérica** que é definida a seguir.

Se A é um operador linear em um espaço de Banach complexo E_0 a sua imagem numérica $W(A)$ é o conjunto

$$W(A) := \{\langle e^*, Ae \rangle : e \in D(A), \|e\|_{E_0} = 1, e^* \in E_0^*, \|e^*\|_{E_0^*} = 1, \langle e^*, e \rangle = 1\}. \quad (1.7)$$

No caso em que E_0 é um espaço de Hilbert $W(A) = \{\langle Ae, e \rangle : e \in D(A), \|e\|_{E_0} = 1\}$.

Teorema 1.3.2 *Seja $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ um operador fechado densamente definido. Seja $W(A)$ a imagem numérica de A e Σ um subconjunto aberto e conexo em $\mathbb{C} \setminus \overline{W(A)}$. Se $\lambda \notin \overline{W(A)}$ então $\lambda - A$ é um-a-um e tem imagem fechada e satisfaz*

$$\|(\lambda - A)e\|_{L(E_0)} \geq d(\lambda, W(A)) \|e\|_{E_0}. \quad (1.8)$$

Adicionalmente, se $\rho(A) \cap \Sigma \neq \emptyset$ então $\rho(A) \supset \Sigma$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{L(E_0)} \leq \frac{1}{d(\lambda, W(A))}. \quad \forall \lambda \in \Sigma \quad (1.9)$$

onde $d(\lambda, W(A))$ é a distância de λ a $W(A)$.

Prova: Seja $\lambda \notin \overline{W(A)}$. Se $e \in D(A)$, $\|e\|_{E_0} = 1$, $e^* \in E_0^*$, $\|e^*\|_{E_0^*} = 1$ e $\langle e^*, e \rangle = 1$ então

$$0 < d(\lambda, W(A)) \leq |\lambda - \langle e^*, Ae \rangle| = |\langle e^*, \lambda e - Ae \rangle| \leq \|\lambda e - Ae\|_{E_0} \quad (1.10)$$

e portanto $\lambda - A$ é um-a-um, tem imagem fechada e satisfaz (1.8). Se adicionalmente $\lambda \in \rho(A)$ então (1.10) implica (1.9).

Resta mostrar que se Σ intersepta $\rho(A)$ então $\rho(A) \supset \Sigma$. Para este fim considere o conjunto $\rho(A) \cap \Sigma$. Este conjunto é obviamente aberto em Σ . Mas também é fechado já que $\lambda_n \in \rho(A) \cap \Sigma$ e $\lambda_n \rightarrow \lambda \in \Sigma$ implica que para n suficientemente grande $|\lambda - \lambda_n| < d(\lambda_n, W(A))$. De (1.9) segue que para n grande, $|\lambda - \lambda_n| \|(\lambda_n - A)^{-1}\| < 1$ e (1.5) implica que $\lambda \in \rho(A)$ e portanto $\rho(A) \cap \Sigma$ é fechado em Σ . Segue que $\rho(A) \cap \Sigma = \Sigma$ ou seja $\rho(A) \supset \Sigma$, como queríamos. $\square$

Exercício 1.3.1 *Mostre que se H é um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é um operador simétrico e sobrejetor então A é auto-adjunto.*

Exemplo 1.3.1 *Seja H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ um operador auto-adjunto. Então A é fechado e densamente definido. Suponha que A seja limitado superiormente; isto é, que exista uma constante $a \in \mathbb{R}$ tal que $\langle Au, u \rangle \leq a\langle u, u \rangle$. Então $\mathbb{C} \setminus (-\infty, a] \subset \rho(A)$, e existe uma constante $M \geq 1$ dependendo somente de φ tal que*

$$\|(A - \lambda)^{-1}\|_{L(E_0)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|},$$

para todo $\lambda \in \Sigma_a = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda - a) \leq \varphi\}$, $\varphi < \pi$. Adicionalmente, A é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ satisfazendo

$$\|T(t)\|_{L(H)} \leq e^{at}.$$

Na verdade $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo analítico como mostraremos posteriormente.

Prova: Vamos começar localizando a imagem numérica de A . Primeiramente note que

$$W(A) = \{\langle Ae, e \rangle : e \in D(A), \|e\|_{E_0} = 1\} \subset (-\infty, a].$$

Note que $A - a = A^* - a$ são dissipativos e portanto, do Corolário 1.3.1, $A - a$ gera um semigrupo fortemente contínuo de contrações. Segue que $\rho(A - a) \supset (0, \infty)$. Do Teorema (1.3.2) temos que $\mathbb{C} \setminus (-\infty, a] \subset \rho(A)$ e que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(\lambda, W(A))} \leq \frac{1}{d(\lambda, (-\infty, a])}.$$

Adicionalmente, se $\lambda \in \Sigma_a$ temos que $\frac{1}{d(\lambda, (-\infty, a])} \leq \frac{1}{\sin \varphi} \frac{1}{|\lambda - a|}$ e o resultado segue. $\square$

Teorema 1.3.3 *Seja A um operador dissipativo em E_0*

- (a) *Se para algum $\lambda_0 > 0$, $R(\lambda_0 - A) = E_0$ então $R(\lambda - A) = E_0$ para todo $\lambda > 0$.*
- (b) *Se A é fechável então o seu fecho $\bar{A}$ é também dissipativo.*
- (c) *Se $\overline{D(A)} = E_0$ então A é fechável.*

Prova: A afirmativa (a) foi provada no Teorema de Lumer-Phillips. Para provar (b) seja $e \in D(\bar{A})$, $f = \bar{A}e$. Então existe uma sequência $\{e_n\} \subset D(A)$ tal que $e_n \rightarrow e$ e $Ae_n \rightarrow f = \bar{A}e$. Do Lema 1.3.1 segue que $\|\lambda e_n - Ae_n\|_{E_0} \geq \lambda \|e_n\|_{E_0}$, para $\lambda > 0$ e fazendo $n \rightarrow \infty$ temos

$$\|\lambda e - \bar{A}e\|_{E_0} \geq \lambda \|e\|_{E_0}, \quad \lambda > 0. \quad (1.11)$$

Como (1.11) vale para todo $e \in D(\bar{A})$, $\bar{A}$ é dissipativo pelo Lema 1.3.1. Para provar (c) assumamos que A não é fechável. Então existe uma sequência $\{e_n\} \subset D(A)$, $e_n \rightarrow 0$ e $Ae_n \rightarrow f$ com $\|f\|_{E_0} = 1$. Do Lema 1.3.1 segue que para todo $t > 0$ e $e \in D(A)$

$$\|(e + t^{-1}e_n) - tA(e + t^{-1}e_n)\|_{E_0} \geq \|e + t^{-1}e_n\|_{E_0}.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ e então $t \rightarrow 0$ resulta $\|e - f\|_{E_0} \geq \|e\|_{E_0}$ para todo $e \in D(A)$. Mas isto é impossível se $D(A)$ é denso em E_0 e portanto A é fechável. $\square$

Teorema 1.3.4 *Seja A dissipativo com $R(I - A) = E_0$. Se E_0 é reflexivo então $\overline{D(A)} = E_0$.*

Prova: Seja $e^* \in E_0^*$ tal que $\langle e^*, e \rangle = 0$ para todo $e \in D(A)$. Mostraremos que $e^* = 0$. Como $R(I - A) = E_0$ é suficiente mostrar que $\langle e^*, e - Ae \rangle = 0$ para todo $e \in D(A)$ o que é equivalente a $\langle e^*, Ae \rangle = 0$ para todo $e \in D(A)$. Seja $e \in D(A)$ então, pelo Theorema 1.3.3, parte (a), existe um e_n tal que $e = e_n - (1/n)Ae_n$. Como $Ae_n = n(e_n - e) \in D(A)$, $e_n \in D(A^2)$ e $Ae = Ae_n - (1/n)A^2e_n$ ou $Ae_n = (I - (1/n)A)^{-1}Ae$. Do Lema 1.3.1 segue que $\|(I - (1/n)A)^{-1}\|_{L(E_0)} \leq 1$ e portanto $\|Ae_n\|_{E_0} \leq \|Ae\|_{E_0}$. Também, $\|e_n - e\|_{E_0} \leq (1/n)\|Ae_n\|_{E_0} \leq (1/n)\|Ae\|_{E_0}$ e portanto $e_n \rightarrow e$. Como $\|Ae_n\|_{E_0} \leq C$ e E_0 é reflexivo existe uma subsequência Ae_{n_k} de Ae_n tal que $Ae_{n_k} \xrightarrow{w} f$. Como A é fechado (veja Teorema de Lumer-Phillips (ii)) segue que $f = Ae$. Finalmente, como $\langle e^*, z \rangle = 0$ para todo $z \in D(A)$, temos

$$\langle e^*, Ae_{n_k} \rangle = n_k \langle e^*, e_{n_k} - e \rangle = 0. \quad (1.12)$$

Fazendo $n_k \rightarrow \infty$ em (1.12) temos $\langle e^*, Ae \rangle = 0$. Isto vale para $e \in D(A)$ e portanto $e^* = 0$ e $\overline{D(A)} = E_0$. $\square$

1.4 Fórmulas Exponenciais

Teorema 1.4.1 *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo em E_0 . Se*

$$A(h)e = \frac{T(h)e - e}{h}$$

então para todo $e \in E_0$ temos

$$T(t)e = \lim_{h \rightarrow 0^+} e^{tA(h)}e \quad (1.13)$$

e o limite é uniforme em t em qualquer intervalo limitado de $\mathbb{R}$.

Prova: Seja $\|T(t)\|_{L(E_0)} \leq Me^{\omega t}$ com $\omega \geq 0$ e seja A o gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \geq 0\}$. Como para todo $h > 0$ $A(h)$ é limitado o semigrupo $e^{tA(h)}$ está bem definido. Adicionalmente $A(h)$ e $T(t)$ comutam, logo o mesmo ocorre com $e^{tA(h)}$ e $T(t)$. Ainda

$$\|e^{tA(h)}\|_{L(E_0)} \leq e^{-t/h} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{h}\right)^k \frac{\|T(hk)\|_{L(E_0)}}{k!} \leq Me^{\frac{t}{h}(\omega h - 1)}.$$

Portanto, para $0 < h \leq 1$ temos

$$\|e^{tA(h)}\|_{L(E_0)} \leq Me^{t\omega}.$$

É fácil ver que para $e \in D(A)$, $e^{(t-s)A(h)}T(s)e$ é diferenciável em s e que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (e^{(t-s)A(h)}T(s)e) &= -A(h)e^{(t-s)A(h)}T(s)e + e^{(t-s)A(h)}AT(s)e \\ &= e^{(t-s)A(h)}T(s)(Ae - A(h)e). \end{aligned}$$

Consequentemente, para $0 < h \leq 1$ e $e \in D(A)$ temos

$$\begin{aligned} \|T(t)e - e^{tA(h)}e\|_{L(E_0)} &= \left\| \int_0^t \frac{d}{ds} (e^{(t-s)A(h)}T(s)e) ds \right\|_{L(E_0)} \\ &\leq \int_0^t \|e^{(t-s)A(h)}\|_{L(E_0)} \|T(s)\|_{L(E_0)} ds \|Ae - A(h)e\|_{E_0} \\ &\leq tM^2 e^{t\omega(e^\omega+1)} \|Ae - A(h)e\|_{E_0}. \end{aligned}$$

Fazendo $h \rightarrow 0^+$ obtemos (1.13) para $e \in D(A)$. Como ambos $\|e^{tA(h)}\|_{L(E_0)}$ e $\|T(t)\|_{L(E_0)}$ são uniformemente limitados em um intervalo finito de tempo e como $D(A)$ é denso em E_0 obtemos que (1.13) vale para todo $e \in E_0$. $\square$

Exemplo 1.4.1 *Seja $E_0 = LUC(\mathbb{R})$ o espaço das funções limitadas e uniformemente contínuas em $\mathbb{R}$. Seja*

$$(T(t)f)(x) = f(x+t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Então $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo de contrações em E_0 . Seu gerador infinitesimal tem domínio

$$D(A) = \{f \in E_0 : f' \in E_0\}$$

e sobre $D(A)$, $Af = f'$. Para este semigrupo temos

$$(A(h)f)(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = (\Delta_h f)(x),$$

É fácil verificar que

$$(A(h)^k f)(x) = \frac{1}{h^k} \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} \binom{k}{m} f(x+mh) = (\Delta_h^k f)(x).$$

Usando o Teorema 1.4.1 obtemos

$$f(x+t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\Delta_h^k f)(x).$$

O limite acima existe uniformemente para $x \in \mathbb{R}$ e t em intervalos limitados de $\mathbb{R}$. A fórmula acima é uma generalização do Teorema de Taylor para funções que são somente contínuas. Note que se f tem k derivadas contínuas então $\lim_{h \rightarrow 0^+} (\Delta_h^k f)(x) = f^{(k)}(x)$.

Teorema 1.4.2 (O Segundo Limite Fundamental) *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo em E_0 . Se A é o seu gerador infinitesimal, então*

$$T(t)e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{t} \left(\frac{n}{t} - A \right)^{-1} \right]^n e, \quad \forall e \in E_0$$

e os limites são uniformes para t em intervalos limitados de $\mathbb{R}$.

Prova: Assuma que $\|T(t)\|_{L(E_0)} \leq Me^{\omega t}$. Vimos que para $Re\lambda > \omega$, $(\lambda - A)^{-1}$ é analítica em λ e

$$(\lambda - A)^{-1}e = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)e ds, \quad e \in E_0.$$

Derivando n vezes em λ , substituindo $s = vt$ e tomando $\lambda = n/t$ encontramos

$$\left(\left(\frac{n}{t} - A\right)^{-1}\right)^{(n)} e = (-1)^n t^{n+1} \int_0^\infty (v e^{-v})^n T(tv) e dv.$$

Mas

$$((\lambda - A)^{-1})^{(n)} = (-1)^n n! (\lambda - A)^{-n-1}$$

e portanto

$$\left[\frac{n}{t} \left(\frac{n}{t} - A\right)^{-1}\right]^{n+1} e = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^\infty (v e^{-v})^n T(tv) e dv.$$

Notando que

$$\frac{n+1}{n!} \int_0^\infty (v e^{-v})^n dv = 1$$

obtemos

$$\left[\frac{n}{t} \left(\frac{n}{t} - A\right)^{-1}\right]^{n+1} e - T(t)e = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^\infty (v e^{-v})^n [T(tv)e - T(t)e] dv. \quad (1.14)$$

Dado $\epsilon > 0$ escolhemos $0 < a < 1 < b < \infty$ tal que $t \in [0, t_0]$ implica

$$\|T(tv)e - T(t)e\|_{L(E_0)} < \epsilon, \quad a \leq v \leq b.$$

Então quebramos a integral em três integrais I_1, I_2, I_3 nos intervalos $[0, a]$, $[a, b]$ e $[b, \infty)$ respectivamente. Temos

$$\|I_1\|_{L(E_0)} \leq \frac{n^{n+1}}{n!} (a e^{-a})^n \int_0^a \|T(tv)e - T(t)e\|_{L(E_0)} dv,$$

$$\|I_2\|_{L(E_0)} \leq \epsilon \frac{n^{n+1}}{n!} \int_a^b (v e^{-v})^n dv < \epsilon,$$

$$\|I_3\|_{L(E_0)} = \left\| \frac{n^{n+1}}{n!} \int_b^\infty (v e^{-v})^n (T(tv)e - T(t)e) dv \right\|_{L(E_0)}.$$

Aqui usamos o fato que $v e^{-v} \geq 0$ é não decrescente para $0 \leq v \leq 1$ e não crescente para $v \geq 1$. Como adicionalmente $v e^{-v} < e^{-1}$ para $v \neq 1$, $\|I_1\|_{L(E_0)} \rightarrow 0$ uniformemente para $t \in [0, t_0]$ quando $n \rightarrow \infty$. Escolhendo $n > \omega t$ em I_3 , vemos que a integral na estimativa de I_3 , converge e que $\|I_3\|_{L(E_0)} \rightarrow 0$ uniformemente para $t \in [0, t_0]$ quando $n \rightarrow \infty$. Consequentemente

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \left[\frac{n}{t} \left(\frac{n}{t} - A \right)^{-1} \right]^{n+1} e - T(t)e \right\|_{L(E_0)} \leq \epsilon$$

e como $\epsilon > 0$ é arbitrário temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{t} \left(\frac{n}{t} - A \right)^{-1} \right]^{n+1} e = T(t)e.$$

Ainda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{t} \left(\frac{n}{t} - A \right)^{-1} e = e.$$

e o resultado segue. $\square$

1.5 Pseudo-Resolventes

Seja A um operador fechado e densamente definido em E_0 . Se μ e λ estão em $\rho(A)$, então temos

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}.$$

Motivado por isto definimos

Definição 1.5.1 *Seja Δ um subconjunto do plano complexo. Uma família $J(\lambda)$, $\lambda \in \Delta$, de operadores lineares limitados em E_0 satisfazendo*

$$J(\lambda) - J(\mu) = (\mu - \lambda)J(\lambda)J(\mu), \quad \lambda, \mu \in \Delta \quad (1.15)$$

é chamado um pseudo-resolvente em Δ .

O objetivo final desta seção é determinar condições sob as quais existe um operador fechado e densamente definido A tal que $J(\lambda)$ é o resolvente de A .

Lema 1.5.1 *Seja Δ um subconjunto de $\mathbb{C}$. Se $J(\lambda)$ é pseudo-resolvente em Δ , então $J(\lambda)J(\mu) = J(\mu)J(\lambda)$. O núcleo $N(J(\lambda))$ e a imagem $R(J(\lambda))$ são independentes de $\lambda \in \Delta$. $N(J(\lambda))$ é um subespaço fechado de E_0 .*

Prova: É evidente de (1.15) que $J(\lambda)$ e $J(\mu)$ comutam para $\lambda, \mu \in \Delta$. Também reescrevendo (1.15) na forma

$$J(\lambda) = J(\mu)[I + (\mu - \lambda)J(\lambda)]$$

é claro que $R(J(\mu)) \supset R(J(\lambda))$ e por simetria temos a igualdade. Semelhantemente $N(J(\lambda)) = N(J(\mu))$. $N(J(\lambda))$ é claramente fechado. $\square$

Teorema 1.5.1 *Seja Δ um subconjunto de $\mathbb{C}$ e seja $J(\lambda)$ pseudo-resolvente em Δ . Então, $J(\lambda)$ é o resolvente de um operador linear fechado densamente definido se e somente se $N(J(\lambda)) = \{0\}$ e $R(J(\lambda))$ é denso em E_0 .*

Prova: Claramente se $J(\lambda)$ é o resolvente de um operador fechado e densamente definido A , temos $N(J(\lambda)) = \{0\}$ e $R(J(\lambda)) = D(A)$ é denso em E_0 . Assuma agora que $N(J(\lambda)) = \{0\}$ e $R(J(\lambda)) = D(A)$ é denso em E_0 . De $N(J(\lambda)) = \{0\}$ segue que $J(\lambda)$ é um-a-um. Seja $\lambda_0 \in \Delta$ e defina

$$A = \lambda_0 I - J(\lambda_0)^{-1}.$$

O operador A assim definido é claramente linear, fechado e $D(A) = R(J(\lambda_0))$ é denso em X . Da definição de A é claro que

$$(\lambda_0 I - A)J(\lambda_0) = J(\lambda_0)(\lambda_0 I - A) = I,$$

e portanto $J(\lambda_0) = (\lambda_0 I - A)^{-1}$. Se $\lambda \in \Delta$ então

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)J(\lambda) &= ((\lambda - \lambda_0)I + (\lambda_0 I - A))J(\lambda) \\ &= ((\lambda - \lambda_0)I + (\lambda_0 I - A))J(\lambda_0)[I - (\lambda - \lambda_0)J(\lambda)] \\ &= I + (\lambda - \lambda_0)[J(\lambda_0) - J(\lambda) - (\lambda - \lambda_0)J(\lambda_0)J(\lambda)] \\ &= I \end{aligned}$$

e semelhantemente $J(\lambda)(\lambda I - A) = I$. Portanto $J(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$ para todo $\lambda \in \Delta$. Em particular A é independente de λ_0 e é unicamente determinado por $J(\lambda)$. $\square$

A seguir damos condições suficientes para que pseudo-resolventes sejam resolventes.

Teorema 1.5.2 *Seja $\Delta \subset \mathbb{C}$ ilimitado e seja $J(\lambda)$ um pseudo-resolvente em Δ . Se $R(J(\lambda))$ é denso em E_0 e existe uma sequência $\lambda_n \in \Delta$ com $|\lambda_n| \rightarrow \infty$ e*

$$\|\lambda_n J(\lambda_n)\|_{L(E_0)} \leq M \quad (1.16)$$

para alguma constante M , então $J(\lambda)$ é o resolvente de um único operador fechado e densamente definido.

Prova: De (1.16) segue que $\|J(\lambda_n)\|_{L(E_0)} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Seja $\mu \in \Delta$. De (1.15) deduzimos que

$$\|(\lambda_n J(\lambda_n) - I)J(\mu)\|_{L(E_0)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Portanto, se $e \in R(J(\mu))$ temos

$$\lambda_n J(\lambda_n)e \rightarrow e, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.17)$$

Como $R(J(\mu))$ é denso em E_0 e $\lambda_n J(\lambda_n)$ é uniformemente limitada, temos que (1.17) vale para todo $e \in E_0$. Se $e \in N(J(\lambda))$ então $\lambda_n J(\lambda_n)e = 0$ e de (1.17) deduzimos que $e = 0$. Portanto $N(J(\lambda)) = \{0\}$ e, do Teorema 1.5.1, $J(\lambda)$ é o resolvente de um operador fechado e densamente definido A . $\square$

Corolário 1.5.1 *Seja $\Delta \subset \mathbb{C}$ ilimitado e $J(\lambda)$ um pseudo-resolvente em Δ . Se existe uma sequência $\lambda_n \in \Delta$ tal que $|\lambda_n| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n J(\lambda_n)e = e, \quad \forall e \in E_0 \quad (1.18)$$

então $J(\lambda)$ é o resolvente de um operador (unicamente definido) fechado e densamente definido A .

Prova: Do Princípio da Limitação Uniforme e de (1.18) segue que (1.16) vale. Do Lema 1.5.1 sabemos que $R(J(\lambda))$ é independente de $\lambda \in \Delta$ e portanto (1.18) implica que $R(J(\lambda))$ é denso em E_0 . Portanto, as condições do Teorema 1.5.2 estão satisfeitas e o resultado segue. $\square$

1.6 O Semigrupo Dual e o Teorema de Stone

Começamos com alguns resultados básicos sobre operadores duais.

Lema 1.6.1 *Seja $S \in L(E_0)$; então, $S^* \in L(E_0^*)$ e $\|S\|_{L(E_0)} = \|S^*\|_{L(E_0^*)}$.*

Prova: Para todo $e^* \in E_0^*$, $\langle e^*, Se \rangle$ é um funcional linear contínuo e portanto determina um único elemento $f^* \in E_0^*$ para o qual $\langle f^*, e \rangle = \langle e^*, Se \rangle$ e portanto $D(S^*) = E_0^*$. Adicionalmente,

$$\begin{aligned} \|S^*\|_{L(E_0^*)} &= \sup_{\{\|e^*\|_{E_0^*} \leq 1\}} \|S^*e^*\|_{E_0^*} = \sup_{\{\|e^*\|_{E_0^*} \leq 1\}} \sup_{\{\|e\|_{E_0} \leq 1\}} |\langle S^*e^*, e \rangle| \\ &= \sup_{\{\|e\|_{E_0} \leq 1\}} \sup_{\{\|e^*\|_{E_0^*} \leq 1\}} |\langle e^*, Se \rangle| = \sup_{\{\|e\|_{E_0} \leq 1\}} \|Se\|_{E_0} \\ &= \|S\|_{L(E_0)}. \quad \square \end{aligned}$$

Lema 1.6.2 *Seja A um operador linear densamente definido em E_0 . Se $\lambda \in \rho(A)$ então $\lambda \in \rho(A^*)$ e*

$$(\lambda - A^*)^{-1} = ((\lambda - A)^{-1})^*.$$

Prova: Da definição de adjunto temos $(\lambda I - A)^* = \lambda I^* - A^*$. Como $(\lambda I - A)^{-1} \in L(E_0)$ temos que $((\lambda I - A)^{-1})^* \in L(E_0^*)$. Provaremos que $(\lambda I^* - A^*)^{-1}$ existe e é igual a $((\lambda I - A)^{-1})^*$. Primeiramente mostramos que $\lambda I^* - A^*$ é injetor. Se para algum $e^* \neq 0$, $(\lambda I^* - A^*)e^* = 0$, então $0 = \langle (\lambda I^* - A^*)e^*, e \rangle = \langle (\lambda I - A)e, e^* \rangle$ para todo $e \in D(A)$. Mas como $\lambda \in \rho(A)$, $R(\lambda I - A) = E_0$ e portanto $e^* = 0$ e $\lambda I^* - A^*$ é injetor. Se agora $e \in E_0$, $e^* \in D(A^*)$, então

$$\langle e^*, e \rangle = \langle e^*, (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}e \rangle = \langle (\lambda I^* - A^*)e^*, (\lambda I - A)^{-1}e \rangle$$

e portanto

$$((\lambda I - A)^{-1})^*(\lambda I^* - A^*)e^* = e^*, \quad \forall e^* \in D(A^*).$$

Por outro lado se $e^* \in E_0^*$ e $e \in D(A)$ então

$$\langle e^*, e \rangle = \langle e^*, (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)e \rangle = \langle ((\lambda I - A)^{-1})^*e^*, (\lambda I - A)e \rangle$$

o que implica que

$$(\lambda I^* - A^*)((\lambda I - A)^{-1})^*e^* = e^*, \quad \forall e^* \in E_0^*.$$

Segue que $\lambda \in \rho(A^*)$ e que $(\lambda I^* - A^*)^{-1} = ((\lambda I - A)^{-1})^*$. $\square$

Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo em E_0 . Para $t > 0$ seja $\{T(t)^* : t \geq 0\}$ o *semigrupo dual*. O semigrupo dual não precisa ser fortemente contínuo em E_0^* .

Definição 1.6.1 *Seja S um operador linear em E_0 e seja F_0 um subespaço de E_0 . O operador $\tilde{S}$ definido por $D(\tilde{S})$ definido por $D(\tilde{S}) = \{e \in D(S) \cap F_0 : Se \in F_0\}$ e $\tilde{S}e = Se$ para $e \in D(\tilde{S})$ é chamado parte de S em F_0 .*

Teorema 1.6.1 *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo em E_0 com gerador infinitesimal A e $\{T(t)^* : t \geq 0\}$ o semigrupo dual. Se A^* é o adjunto de A e $E_0^\odot$ é o fecho de $D(A^*)$ em E_0^* , então a restrição $\{T(t)^\odot : t \geq 0\}$ de $\{T(t)^* : t \geq 0\}$ a $E_0^\odot$ é um semigrupo fortemente contínuo em $E_0^\odot$. O gerador infinitesimal $A^\odot$ de $\{T(t)^\odot : t \geq 0\}$ é a parte de A^* em $E_0^\odot$.*

Prova: Como A é o gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \geq 0\}$, existem constantes β e M tais que para todo $\lambda > \omega$, $\lambda \in \rho(A)$ e

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\|_{L(E_0)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Segue que $\lambda \in \rho(A^*)$ e

$$\|(\lambda I^* - A^*)^{-n}\|_{L(E_0^*)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Seja $J(\lambda)$ a restrição de $(\lambda I^* - A^*)^{-1}$ a $E_0^\odot$. Segue que

$$\|J(\lambda)^n\|_{L(E_0^\odot)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n},$$

$$J(\lambda) - J(\mu) = (\mu - \lambda)J(\lambda)J(\mu), \quad \lambda, \mu > \omega$$

e por (1.2) temos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda J(\lambda)e^* \rightarrow e^*, \quad \forall e^* \in E_0^\odot.$$

Segue do Corolário 1.5.1 que $J(\lambda)$ é o resolvente de um operador fechado e densamente definido $A^\odot$ em $E_0^\odot$. Ainda, $A^\odot$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t)^\odot : t \geq 0\}$ em $E_0^\odot$. Para $e \in E_0$ e $e^\odot \in E_0^\odot$ temos

$$\left\langle e^\odot, \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n}e \right\rangle = \left\langle \left(I^\odot - \frac{t}{n}A^\odot\right)^{-n}e^\odot, e \right\rangle, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ e usando o Teorema 1.4.2 obtemos

$$\langle e^\odot, T(t)e \rangle = \langle T(t)^\odot e^\odot, e \rangle.$$

Segue que para $e^\odot \in E_0^\odot$, $T(t)^* e^\odot = T(t)^\odot e^\odot$ e $T(t)^\odot$ é a restrição de $T(t)^*$ a $E_0^\odot$.

Para concluir a prova temos que mostrar que $A^\odot$ é a parte de A^* em $E_0^\odot$. Seja $e^* \in D(A^*)$ tal que $e^* \in E_0^\odot$ e $A^* e^* \in E_0^\odot$. Então $(\lambda I^* - A^*)e^* \in E_0^\odot$ e

$$(\lambda I^\odot - A^\odot)^{-1}(\lambda I^* - A^*)e^* = e^*.$$

Portanto $e^* \in D(A^\odot)$ e aplicando $\lambda I^\odot - A^\odot$ em ambos os lados da igualdade acima temos $(\lambda I^* - A^*)e^* = (\lambda I^\odot - A^\odot)e^*$ e portanto $A^\odot e^* = A^* e^*$. Isto mostra que $A^\odot$ é a parte de A^* em E_0^* . $\square$

O seguinte resultado identifica alguns casos em que o semigrupo dual é fortemente contínuo.

Lema 1.6.3 *Seja E_0 um espaço de Banach reflexivo. Se $S : D(S) \subset E_0 \rightarrow E_0$ é fechado e densamente definido então $D(S^*)$ é denso em E_0^* .*

Prova: Se $D(S^*)$ não é denso em E_0^* então existe um elemento $e_0 \in E_0$ tal que $e_0 \neq 0$ e $\langle e^*, e_0 \rangle = 0$ para todo $e^* \in D(S^*)$. Como S é fechado seu gráfico é fechado e não contém $(0, e_0)$. Do Teorema de Hahn-Banach existem e_1^* e e_2^* em E_0^* tais que $\langle e_1^*, e \rangle - \langle e_2^*, Se \rangle = 0$ para todo $e \in D(S)$ e $\langle e_1^*, 0 \rangle - \langle e_2^*, e_0 \rangle \neq 0$. Segue que $e_2^* \neq 0$ e que $\langle e_2^*, e_0 \rangle \neq 0$ e que $e_2^* \in D(S^*)$, $S^* e_2^* = e_1^*$. Isto implica que $\langle e_2^*, e_0 \rangle = 0$ o que é uma contradição. Portanto $D(S^*)$ é denso em E_0^* . $\square$

Corolário 1.6.1 *Seja E_0 um espaço de Banach reflexivo e $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo em E_0 com gerador infinitesimal A . O semigrupo dual $\{T(t)^* : t \geq 0\}$ de $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo em E_0^* cujo gerador infinitesimal é A^* .*

Uma vez que a restrição de $T(t)^*$ ao subespaço $X^\odot$ é um semigrupo fortemente contínuo, estamos exatamente na mesma posição que começamos. Em um espaço de Banach $X^\odot$ e com um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t)^\odot : t \geq 0\}$ gerado pela parte $A^\odot$ de A^* em $X^\odot$.

Podemos introduzir o espaço $X^{\odot*}$ e o semigrupo dual $T(t)^{\odot*}$ que é fortemente contínuo em $X^{\odot\odot} := \overline{D(A^{\odot*})}$.

A dualidade entre os elementos de X e $X^\odot$ pode ser usada para definir uma imersão j (note que $X^\odot$ é fraco-* denso em X^*) de X em $X^{\odot*}$ com

$$\langle jx, x^\odot \rangle_{X^{\odot*}, X^\odot} = \langle x^\odot, x \rangle_{X^\odot, X}.$$

É claro que

$$T(t)^{\odot*} jx = j(T(t)x)$$

e portanto $j(X) \subset X^{\odot\odot}$. Sempre que $j(X) = X^{\odot\odot}$ chamaremos X de $\odot$ -reflexivo com respeito ao semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Seja H um espaço de Hilbert. Um operador limitado U é unitário se $U^* = U^{-1}$. Recorde que U é unitário se e somente se $R(U) = H$ e U é uma isometria.

Teorema 1.6.2 (Stone) *Um operador A é o gerador infinitesimal de um grupo fortemente contínuo de operadores unitários em um espaço de Hilbert H se e somente se iA é auto-adjunto.*

Prova: Se A é o gerador de um grupo fortemente contínuo de operadores unitários $\{U(t) : t \in \mathbb{R}\}$, então A é densamente definido e utilizando o Corolário 1.6.1 obtemos, para $x \in D(A)$,

$$-Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{U(-t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{U^*(t)x - x}{t} = A^*x$$

o que implica que $A = -A^*$ e portanto $(iA)^* = iA$ e iA é auto-adjunto.

Se por outro lado iA é auto adjunto então A é densamente definido e $A = -A^*$. Portanto, para todo $x \in D(A)$ temos

$$\langle Ax, x \rangle = \langle x, A^*x \rangle = -\overline{\langle Ax, x \rangle}$$

e portanto $\operatorname{Re}\langle Ax, x \rangle = 0$ para todo $x \in D(A)$, isto é, A é dissipativo. Como $A = A^*$, $\operatorname{Re}\langle A^*x, x \rangle = 0$ para todo $x \in D(A) = D(A^*)$ e também A^* é dissipativo. Logo A e A^* são densamente definidos e fechados e como $A^{**} = A$, do Corolário 1.3.1, ambos A e $A^* = -A$ são geradores infinitesimais de semigrupos fortemente contínuos de contrações em H . Se $\{U_+(t) : t \geq 0\}$ e $\{U_-(t) : t \geq 0\}$ são os semigrupos gerados por A e A^* respectivamente definimos

$$U(t) = \begin{cases} U_+(t), & t \geq 0, \\ U_-(-t), & t \leq 0. \end{cases}$$

Então $U(t)$ é um grupo. De fato: Como A e $-A$ são geradores de semigrupos fortemente contínuos $U_+(t)$ e $U_-(-t)$ que comutam pelo Teorema 3.1.2. Se $W(t) = U_+(t)U_-(-t)$ então para $x \in D(A) = D(-A)$

$$\frac{W(t)x - x}{t} = U_-(t) \frac{U_+(t)x - x}{t} + \frac{U_-(t)x - x}{t} \rightarrow Ax - Ax = 0, \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+.$$

Portanto, para $x \in D(A)$ temos que $W(t)x = x$, $t \geq 0$. Como $D(A)$ é denso em H e $W(t)$ é limitado temos que $W(t) = I$ ou $U_-(-t) = (U_+(t))^{-1}$. Como $U(t)^{-1} = U(-t)$, $\|U(t)\| \leq 1$, $\|U(-t)\| \leq 1$, segue que $R(U(t)) = H$ e $U(t)$ é uma isometria para todo t e portanto $U(t)$ é um grupo unitário de operadores sobre H , como queríamos. $\square$

1.7 Transformada Inversa de Laplace

Vimos no Teorema 1.1.2, (5) que

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt,$$

se $\operatorname{Re}\lambda$ é grande. Isto sugere que usando a transformada inversa de Laplace poderemos encontrar $T(t)$, conhecido A . No que se segue perseguiremos este objetivo.

Lema 1.7.1

$$(a) \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \pi$$

$$(b) \text{ Se } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ é tal que } f(t)/(1 + |t|) \text{ é integrável em } \mathbb{R} \text{ e } \int_{-1}^1 \left| \frac{f(t) - f(0)}{t} \right| dt < \infty, \text{ então}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(t) \frac{\sin Nt}{\pi t} dt \rightarrow f(0) \quad \text{quando } N \rightarrow +\infty.$$

Prova: (a) Note que se γ é a curva da figura abaixo no plano complexo, temos que

$$0 = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t} dt + \int_r^R \frac{e^{it}}{t} dt + i \int_{\pi}^0 e^{ir e^{i\theta}} d\theta + i \int_0^{\pi} e^{iR e^{i\theta}} d\theta.$$

Note que

$$\left| \int_0^{\pi} e^{iR e^{i\theta}} d\theta \right| \leq \int_0^{\pi} e^{-R \sin \theta} d\theta \rightarrow 0,$$

quando $R \rightarrow \infty$ e o resultado segue quando $r \rightarrow 0$.

$$(b) \int_{-1}^1 \frac{\sin Nt}{\pi t} dt = \int_{-N}^N \frac{\sin t}{\pi t} dt \rightarrow 1 \text{ quando } N \rightarrow \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin Nt}{\pi t} dt - f(0) \int_{-1}^1 \frac{\sin Nt}{\pi t} dt = \int_{|t| \leq 1} \frac{f(t) - f(0)}{\pi t} \sin Nt dt + \int_{|t| \geq 1} \frac{f(t)}{\pi t} \sin Nt dt,$$

ambos os termos a direita tendem a zero quando $N \rightarrow \infty$ pelo lema de Riemann-Lebesgue. $\square$

Teorema 1.7.1 *Suponha que A é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\} \subset L(E_0)$ satisfazendo $\|T(t)\|_{L(E_0)} \leq M e^{\beta t}$ e assuma que $\gamma > \max\{0, \beta\}$. Para qualquer $e \in D(A^2)$ e $t > 0$*

$$T(t)e = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} e d\lambda,$$

onde a integral é ao longo do segmento de reta com $\operatorname{Re} \lambda = \gamma$. O limite converge uniformemente para $\epsilon \leq t \leq 1/\epsilon$, qualquer $\epsilon > 0$.

Prova: Como $\operatorname{Re} \lambda = \gamma > \beta$, $(\lambda - A)^{-1}$ existe e é uniformemente limitada, de fato, como $e \in D(A^2)$

$$(\lambda - A)^{-1} e = \lambda^{-1} e + \lambda^{-2} A e + \lambda^{-2} (\lambda - A)^{-1} A^2 e$$

então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} e d\lambda = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda \right) e + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2} [A e + (\lambda - A)^{-1} A^2 e] d\lambda$$

e ambos os termos convergem uniformemente em $\epsilon \leq t \leq 1/\epsilon$ quando $N \rightarrow \infty$, o primeiro por integração por partes e o segundo porque o integrando tem norma menor ou igual a $\text{const}/|\lambda|^2$ então converge absolutamente. Só resta mostrar que o limite é $T(t)e$.

Agora para $\operatorname{Re} \lambda = \gamma$

$$(\lambda - A)^{-1} e = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} T(s) e ds,$$

então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} e d\lambda &= \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} e^{\lambda(t-s)} d\lambda \right\} T(s) e ds \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\sin N(t-s)}{\pi(t-s)} e^{\gamma(t-s)} T(s) e ds = \int_{-t}^{\infty} \frac{\sin N\tau}{\pi\tau} e^{-\gamma\tau} T(t+\tau) e d\tau. \end{aligned}$$

A função

$$f(\tau) = \begin{cases} \langle e^*, T(t+\tau) e \rangle e^{-\gamma\tau}, & \tau \geq -t \\ 0, & \tau < -t \end{cases}$$

satisfaz as condições do lemma para qualquer $e^* \in E_0^*$ e $t > 0$ pois $f'(0) = \langle e^*, T(t)(A - \gamma)e \rangle$. Então

$$\langle e^*, \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} e d\lambda \rangle \rightarrow f(0) = \langle e^*, T(t) e \rangle$$

quando $N \rightarrow \infty$. Isto vale para todo $e^* \in E_0^*$ e a prova está completa. $\square$

1.8 Operadores Setoriais e Analiticidade

Suponha que o gerador A de um semigrupo fortemente contínuo de $\{T(t) : t \geq 0\}$ é tal que $\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \varphi\} \subset \rho(A)$ para algum $\varphi \in (\pi/2, \pi)$ e que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{L(E_0)} \leq \frac{C}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma.$$

Mostraremos que o semigrupo gerado por A é analítico em um setor contendo o eixo real positivo.

Seja $e \in D(A^2)$, $t > 0$, então para algum $\gamma > 0$

$$T(t)e = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} e d\lambda.$$

O integrando é analítico para $\lambda \in \Sigma$ e portanto podemos deformar o contorno de integração para Γ , consistindo de dois raios $\{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \pm\phi, |\lambda| > r\}$, $\frac{\pi}{2} < \phi < \varphi$, e do arco de círculo $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r, |\arg \lambda| \leq \phi\}$ para r pequeno. Veja figura abaixo

Note que, quando $\operatorname{Im} \lambda = \pm N$, $-kN \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \gamma$ ($k = |\cot \phi| > 0$),

$$\|e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} e\|_{E_0} \leq \frac{e^{t \operatorname{Re} \lambda} C \|e\|_{E_0}}{\sqrt{(\operatorname{Re} \lambda)^2 + N^2}}$$

e as integrais correspondentes tendem a zero quando $N \rightarrow \infty$.

Portanto

$$T(t)e = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} e d\lambda,$$

e esta expressão vale para todo $e \in E_0$ porque converge em norma. De fato, para $t > 0$, $\arg \lambda = \pm\phi$

$$\|e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1}\|_{L(E_0)} \leq C \frac{e^{-t|\lambda|k_1}}{|\lambda|}, \quad k_1 = |\cos \phi| > 0$$

então

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

com convergência na norma de $L(E_0)$ qualquer $t > 0$. A convergência é uniforme para $\epsilon \leq t$, qualquer $\epsilon > 0$, então $t \mapsto T(t) \in L(E_0)$ é contínuo para $t > 0$ (mas claramente a convergência não é uniforme quando $t \rightarrow 0$, a menos que A seja limitado). Ainda mais, a integral converge uniformemente para t complexo em $|\arg t| \leq \epsilon_1 < \phi - \pi/2$, $\epsilon_0 \leq |t|$, ($\epsilon_i > 0$, $i = 0, 1$), logo $t \mapsto T(t)$ é analítico em um setor $|\arg t| < \phi - \pi/2$ contendo o eixo real positivo.

Esta prova de analiticidade não usa o fato que A é o gerador de um semigrupo mas somente propriedades do resolvente $(\lambda - A)^{-1}$ quando $|\lambda| \rightarrow \infty$. De fato, qualquer operador densamente definido A tal que $-A$ é setorial gera um semigrupo analítico.

Teorema 1.8.1 *Assuma que $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ é densamente definido e $-A$ é setorial; isto é, existem constantes a, C e $\varphi \in (\pi/2, \pi]$, $\Sigma_{a,\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| < \varphi\}$ está no conjunto resolvente de A e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{L(E_0)} \leq C/|\lambda - a| \quad \text{em } \Sigma_{a,\varphi}.$$

Então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\} \subset L(E_0)$,

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

onde Γ_a é a fronteira de $\Sigma_{a,\phi} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a| \leq r\}$, $\frac{\pi}{2} < \phi < \varphi$, r pequeno, orientada com no sentido da parte imaginária crescente. Adicionalmente, $t \mapsto T(t)$ se estende a uma função analítica de $\{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \phi - \pi/2\}$ em $L(E_0)$ (ou a complexificação de E_0 , se E_0 é um espaço de Banach real) e para algum $K > 0$

$$\|T(t)\|_{L(E_0)} \leq K e^{at}, \quad \|AT(t)\|_{L(E_0)} \leq K t^{-1} e^{at}$$

para todo $t > 0$. Note que

$$\frac{d}{dt} T(t) = AT(t)$$

é um operador limitado para qualquer $t > 0$.

Prova: Defina $T(t)$ pela integral acima, se $\lambda = a + \mu$

$$e^{-at} T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\mu t} (\mu - (A - a))^{-1} d\mu$$

e $\|(\mu - (A - a))^{-1}\|_{L(E_0)} \leq C/|\mu|$. Não há perda de generalidade em assumir que $a = 0$.

Como observado acima, $t \mapsto T(t)$ é analítica. Nós primeiro provamos $\|T(t)\|_{L(E_0)}$ e $t\|AT(t)\|_{L(E_0)}$ são limitados para $t > 0$. Mudando variáveis para $\mu = \lambda t$,

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\mu} \left(\frac{\mu}{t} - A\right)^{-1} \frac{d\mu}{t},$$

e o contorno é ainda Γ_0 já que o integrando é analítico. Logo

$$\|T(t)\|_{L(E_0)} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} e^{\operatorname{Re} \mu} \frac{C}{|\mu|/t} \frac{|d\mu|}{t} = K < \infty$$

uniformemente para $t > 0$. Semelhantemente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} A(\lambda - A)^{-1} d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} [-I + \lambda(\lambda - A)^{-1}] d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} d\lambda + \frac{t^{-1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\mu} \frac{\mu}{t} \left(\frac{\mu}{t} - A\right)^{-1} d\mu \end{aligned}$$

o primeiro termo é zero e o segundo é estimado da seguinte forma

$$\left\| \frac{t^{-1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\mu} \frac{\mu}{t} \left(\frac{\mu}{t} - A\right)^{-1} d\mu \right\|_{L(E_0)} \leq \frac{1}{2\pi t} \int_{\Gamma_0} e^{\operatorname{Re} \mu} C |d\mu| = K_1 t^{-1} < \infty.$$

Para ver que isto é $AT(t)$, note que A é um operador fechado, pois $(\lambda - A)^{-1} \in L(E_0)$ para $\lambda \in \Sigma_0$. Como a integral que define $T(t)$ é um limite de somas de Riemann é fácil ver que $AT(t)e = T(t)Ae$ para todo $e \in D(A)$.

Pela analiticidade e convergência uniforme para cada $t > 0$, temos

$$\frac{d}{dt}T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} \lambda (\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

que é $AT(t)$ como mostrado acima. Seja $e \in D(A)$, $t > 0$ e

$$T(t)e = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} \frac{d\lambda}{\lambda} \right) e + \frac{t}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\mu} \frac{\mu}{t} \left(\frac{\mu}{t} - A \right)^{-1} A e \frac{d\mu}{\mu^2}$$

logo

$$\|T(t)e - e\|_{E_0} \leq \frac{t}{2\pi} \int_{\Gamma_0} e^{\operatorname{Re} \mu} C \|Ae\|_{E_0} \left| \frac{d\mu}{\mu^2} \right| = \mathcal{O}(t)$$

quando $t \rightarrow 0^+$. Como $\|T(t)\|_{L(E_0)}$ é limitado quando $t \rightarrow 0^+$, $T(t)e \rightarrow e$ quando $t \rightarrow 0^+$ para todo $e \in E_0$. Finalmente, para $0 \leq s \leq t$ a aplicação $s \mapsto T(t-s)T(s)e$ é contínua e é diferenciável (analítica) para $0 < s < t$, com

$$\frac{d}{ds}(T(t-s)T(s)e) = -AT(t-s)T(s)e + T(t-s)AT(s)e = 0$$

então é constante e

$$T(t-s)T(s)e = T(t)e, \quad \text{para } 0 \leq s \leq t, \quad e \in E_0.$$

Esta é a propriedade de semigrupo e a prova de que $T(t)$ é um semigrupo fortemente contínuo está completa.

Para completar a prova do teorema, devemos mostrar que A é seu gerador. Mas $T(t)e - e = \int_0^t T(s)Ae ds$,

quando $t > 0$, $e \in D(A)$, então $\frac{1}{t}(T(t)e - e) \rightarrow Ae$ quando $t \rightarrow 0^+$ e A está contido no gerador. A é de fato o gerador pois 1 está no resolvente de A e do gerador. $\square$

Teorema 1.8.2 *Seja $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ densamente definido e tal que $-A$ é setorial com resolvente compacto. Então o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ gerado por A é compacto.*

Capítulo 2

Potências Fracionárias

2.1 Introdução

Vamos começar esta seção motivando a definição de potências fracionárias de operadores fechados. Em primeiro lugar observe que se γ é uma curva fechada, retificável e simples em $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ e $n(\gamma; a)$ denota o índice da curva γ em $a \in \mathbb{C}$ temos do Teorema dos Resíduos que

$$a^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\lambda^\alpha}{\lambda - a} d\lambda$$

para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$ com $n(\gamma; a) = 1$. Aqui $\lambda^\alpha = e^{\alpha \log \lambda}$ e $\log \lambda$ é o ramo principal do logaritmo.

Se $A \in L(E_0)$ é tal que $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ e γ é uma curva fechada, retificável e simples em $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ tal que $n(\gamma; a) = 1, \forall a \in \sigma(A)$, definimos em analogia com a observação acima

$$A^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. É fácil ver, da expressão acima, que $I^\alpha = I$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

É claro que $A^\alpha \in L(E_0)$. Mostremos que $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$ ($\{A^\alpha, \alpha \in \mathbb{C}\}$ é um grupo) e que A^n coincide com a definição usual (a n -ésima iterada de A). Para mostrar a propriedade de grupo escolha γ' uma curva fechada, retificável e simples em $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ externa a γ , então

$$\begin{aligned} A^\alpha A^\beta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \mu^\beta (\mu - A)^{-1} d\mu \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\gamma'} \int_{\gamma} \lambda^\alpha \mu^\beta (\lambda - A)^{-1} (\mu - A)^{-1} d\lambda d\mu \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\gamma'} \int_{\gamma} \lambda^\alpha \mu^\beta \frac{(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}}{\mu - \lambda} d\lambda d\mu \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\gamma} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} \int_{\gamma'} \mu^\beta \frac{1}{\mu - \lambda} d\mu d\lambda \\ &\quad + \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\gamma'} \mu^\beta (\mu - A)^{-1} \int_{\gamma} \lambda^\alpha \frac{1}{\lambda - \mu} d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^{\alpha+\beta} (\lambda - A)^{-1} d\lambda = A^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

onde na última passagem utilizamos o Teorema dos Resíduos para obter que $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \mu^\beta \frac{1}{\mu - \lambda} d\mu = \lambda^\beta$ e observamos que μ está no traço de γ' que é externa a γ e portanto, do Teorema de Cauchy, $\int_{\gamma} \lambda^\alpha \frac{1}{\lambda - \mu} d\lambda = 0$.

Se por outro lado $\alpha = n$ é um número inteiro positivo podemos tomar γ uma curva em $\mathbb{C}$ (não é necessário evitar o semi-eixo real negativo), já que λ^n é uma função inteira, temos então que

$$A_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^n (\lambda - A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^{n-1} (I - \lambda^{-1} A)^{-1} d\lambda$$

e como para $|\lambda| > \|A\|$ temos que

$$(I - \lambda^{-1} A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j} A^j,$$

segue do Teorema dos Resíduos que

$$A_n = A^n. \quad (2.1)$$

Ou seja, A^α é a α iterada de A quando $\alpha \in \mathbb{N}$

No que se segue buscamos expressões equivalentes de A^α que façam sentido para uma classe mais ampla de operadores. Se $0 < \phi < \pi$ e $A \in L(E_0)$ é tal que $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Seja $\Sigma_\phi = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \phi\}$, $B_R = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < R\}$ e $\Sigma_{R,\phi} = B_R \cap \Sigma_\phi$. Denote por Γ_R a porção da fronteira de Σ_ϕ que está em B_R orientada no sentido da parte imaginária decrescente, γ_R a porção da fronteira de B_R que está em Σ_ϕ orientada no sentido anti-horário. Com isto $\Gamma_R + \gamma_R$ é a fronteira de $\Sigma_{R,\phi}$. Escolha $R > 2\|A\|$. Com isto temos que

$$\begin{aligned} A^\alpha &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R + \gamma_R} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda \end{aligned} \quad (2.2)$$

e

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| = \|(I - \lambda^{-1} A)^{-1}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda} \right)^n \right\| \leq \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{R}} \leq 2. \quad (2.3)$$

Se agora tomamos $\operatorname{Re} \alpha < 0$ vamos mostrar que a integral sobre γ_R em (2.2) converge para zero quando R tende para infinito. De fato,

$$\left\| \int_{\gamma_R} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\| \leq \int_{-\pi+\phi}^{\pi-\phi} R^{\operatorname{Re} \alpha} e^{-\theta \operatorname{Im} \alpha} \|(Re^{i\theta} - A)^{-1}\| R d\theta$$

e de (2.3) é fácil ver que a integral sobre γ_R tende a zero quando R tende para infinito.

Se Γ denota a fronteira de Σ_ϕ orientada no sentido da parte imaginária decrescente, os cálculos acima mostram que sempre que $\operatorname{Re} \alpha < 0$

$$A^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda. \quad (2.4)$$

Observe que a convergência da integral em (2.4) somente depende da estimativa espectral em (2.3) e não do operador A . Isto segue facilmente se parametrizarmos Γ . Vamos apenas considerar a parte Γ_+ de Γ com parte imaginária positiva. Então

$$\left\| \int_{\Gamma_+} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\| \leq \int_0^\infty t^{\operatorname{Re} \alpha} e^{-(\pi-\phi)\operatorname{Im} \alpha} \|(te^{i(\pi-\phi)} - A)^{-1}\| dt.$$

Como o resolvente é contínuo sobre Γ a convergência da integral acima segue somente de (2.3) ainda mais esta convergência é uniforme para α em qualquer compacto de $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. A convergência da integral sobre a parte de Γ com parte real negativa segue de forma semelhante.

Esta observação nos indica uma classe mais geral de operadores A para os quais podemos definir as potências A^α com $\operatorname{Re} \alpha < 0$. Esta classe é a classe dos operadores fechados, densamente definidos A com resolvente contendo um setor $\mathbb{C} \setminus \Sigma_\phi \cup \{0\} = -\Sigma_{\pi-\phi} \cup \{0\}$ e tais que $\lambda(\lambda - A)^{-1}$ é limitada em $-\Sigma_{\pi-\phi-\epsilon}$, $\pi - \phi > \epsilon > 0$, $0 < \phi < \pi$.

Note que se $\varphi = \pi - \phi$ então $\lambda(\lambda - A)^{-1}$ é limitado em $-\Sigma_\varphi$ se e somente se $\lambda(\lambda + A)^{-1}$ é limitado em Σ_φ se e somente se $(1 + |\lambda|)\|(\lambda + A)^{-1}\|$ é limitado em Σ_φ .

A seguir mostramos que se $(1 + s)\|(s + A)^{-1}\| \leq M$, $s \in [0, \infty)$ então $(1 + |\lambda|)\|(\lambda + A)^{-1}\|$ é limitado em Σ_φ para $\varphi = \arcsin \frac{1}{2M}$. Em particular, com isto teremos mostrado que podemos definir A^α através de (2.4) para todo operador A tal que $-A$ gera um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ tal que $\|T(t)\| \leq M$, $t \geq 0$.

2.2 Operadores do Tipo Positivo

Seja E um espaço de Banach. Um operador linear A em E é dito de **tipo positivo** com constante M (veja [3]), $M \geq 1$ se é fechado, densamente definido, $\mathbb{R}^+ \subset \rho(-A)$ e

$$(1 + s)\|(s + A)^{-1}\|_{L(E)} \leq M, \quad s \in \mathbb{R}^+. \quad (2.5)$$

Denotamos o conjunto dos operadores de tipo positivo por

$$\mathcal{P} := \mathcal{P}(E)$$

Pelo restante desta seção assumimos que $A \in \mathcal{P}$.

Seja A um operador de tipo positivo com constante M . Dado $s \in \mathbb{R}^+$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfazendo

$$|\lambda - s| \leq (1 + s)/(2M),$$

segue de $\lambda + A = (s + A)(1 + (\lambda - s)(s + A)^{-1})$ que $\lambda \in \rho(-A)$ e

$$\begin{aligned} \|(\lambda + A)^{-1}\|_{L(E)} &\leq \| [1 + (\lambda - s)(s + A)^{-1}]^{-1} \|_{L(E)} \|(s + A)^{-1}\|_{L(E)} \leq 2M(1 + s)^{-1} \\ &\leq \frac{2M}{1 + |\lambda|} \frac{1 + s + |\lambda - s|}{1 + s} \leq \frac{2M}{1 + |\lambda|} \left(1 + \frac{1}{2M}\right) = \frac{2M + 1}{1 + |\lambda|}. \end{aligned}$$

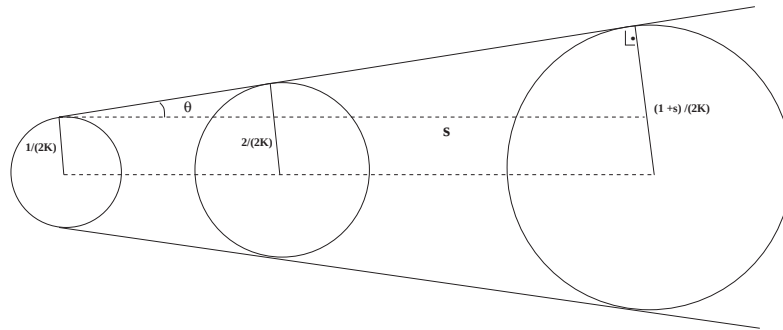


Figura 2.1:

Disto deduzimos que

$$\Sigma_M := \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \arcsin 1/(2M)\} + \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1/(2M)\} \subset \rho(-A)$$

e que

$$(1 + |\lambda|) \|(\lambda + A)^{-1}\|_{L(E)} \leq 2M + 1, \quad \lambda \in \Sigma_M. \quad (2.6)$$

Com isto para todo $A \in \mathcal{P}(E)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \alpha < 0$, definimos

$$A^\alpha := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (-\lambda)^\alpha (\lambda + A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad (2.7)$$

onde Γ é qualquer curva simples em $\Sigma_M \setminus \mathbb{R}^+$ suave por partes indo de $\infty e^{-i\nu}$ até $\infty e^{i\nu}$ para algum $\nu \in (0, \arcsin 1/(2M)]$. É claro que $-\Gamma := \{\lambda \in \mathbb{C} : -\lambda \in \Gamma\}$. Segue de (2.6) e (2.7) e do Teorema de Cauchy que A^α está bem definido em $L(E)$ e independente da escolha de Γ . De fato, mais é verdade.

Lema 2.2.1 *Para todo α e β com parte real negativa $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$*

Prova: Dados α e β com $\operatorname{Re} \alpha < 0$ e $\operatorname{Re} \beta < 0$, escolha Γ_1 e Γ_2 como acima de forma que Γ_1 fica a esquerda de Γ_2 . Então

$$\begin{aligned} A^\alpha A^\beta &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} (-\lambda)^\alpha (-\mu)^\beta (\lambda + A)^{-1} (\mu + A)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} (-\lambda)^\alpha (-\mu)^\beta (\lambda - \mu)^{-1} [(\mu + A)^{-1} - (\lambda + A)^{-1}] d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} (-\mu)^\beta (\mu + A)^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{(-\lambda)^\alpha}{\lambda - \mu} d\lambda \right) d\mu \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} (-\lambda)^\alpha (\lambda + A)^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{(-\mu)^\beta}{\mu - \lambda} d\mu \right) d\lambda. \end{aligned}$$

Para cada $\mu \in \Gamma_2$, aplicação $\lambda \mapsto (\lambda - \mu)^{-1} (-\lambda)^\alpha$ é analítica sobre Γ_1 e a esquerda dela. Portanto, segue de (2.7) e do Teorema de Cauchy que a integral no primeiro parêntesis é zero e a no segundo é igual a $(-\lambda)^\beta$. Consequentemente,

$$A^\alpha A^\beta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} (-\lambda)^{\alpha+\beta} (\lambda + A)^{-1} d\lambda = A^{\alpha+\beta},$$

o que prova a afirmativa. $\square$

Suponha que $0 < \operatorname{Re} z < 1$. Então podemos deformar Γ sobre $\mathbb{R}^+$. Logo

$$\begin{aligned} A^{-z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty-i0}^{0-i0} (-\lambda)^{-z} (\lambda + A)^{-1} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{0+i0}^{\infty+i0} (-\lambda)^{-z} (\lambda + A)^{-1} d\lambda \\ &= -\frac{e^{-i\pi z}}{2\pi i} \int_0^\infty s^{-z} (s + A)^{-1} ds + \frac{e^{i\pi z}}{2\pi i} \int_0^\infty s^{-z} (s + A)^{-1} ds, \end{aligned}$$

isto é

$$A^{-z} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_0^\infty s^{-z} (s + A)^{-1} ds, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1. \quad (2.8)$$

Aplicando a fórmula (2.8) ao caso $E := \mathbb{C}$ e $A := 1$, em particular, segue que

$$\int_0^\infty s^{-z} (1 + s)^{-1} ds = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1.$$

Portanto deduzimos do fato que $A \in \mathcal{P}$ e da igualdade acima que

$$\|A^{-z}\|_{L(E)} \leq M \frac{|\sin \pi z|}{\pi} \int_0^\infty s^{-\operatorname{Re} z} (1 + s)^{-1} ds = M \frac{|\sin \pi z|}{\sin \pi \operatorname{Re} z} \quad (2.9)$$

para $0 < \operatorname{Re} z < 1$. Agora não é difícil provar o seguinte resultado de continuidade:

Teorema 2.2.1 $\{A^z; \operatorname{Re} z < 0\} \cup \{A^0 = I_E\}$ é um semigrupo fortemente contínuo e analítico sobre E .

Prova: É uma consequência simples do teorema da derivação sob o sinal de integração que a aplicação $z \mapsto A^z$ é analítica em $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$. Portanto, graças ao Lema 2.2.1, resta mostrar que é fortemente contínuo em $z = 0$.

Note que

$$(s + A)^{-1} - (1 + s)^{-1} \supset (s + A)^{-1}(1 - (s + A)(1 + s)^{-1}) = (1 + s)^{-1}(s + A)^{-1}(1 - A)$$

para $s > 0$. Portanto, dado $e \in D(A)$ e z com $0 < \operatorname{Re} z < 1$, segue de (2.8) e de (2.9) que

$$\begin{aligned} A^{-z}e - e &= \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_0^\infty s^{-z}(s + A)^{-1}e \, ds - \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_0^\infty s^{-z}(1 + s)^{-1}e \, ds \\ &= \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^{-z}}{1 + s} (s + A)^{-1}(1 - A)e \, ds. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|A^{-z}e - e\|_E \leq M \frac{|\sin \pi z|}{\pi} \|(1 - A)e\|_E \int_0^\infty \frac{s^{-\operatorname{Re} z}}{(1 + s)^2} \, ds, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1.$$

Como a integral converge para 1 quando $\operatorname{Re} z \rightarrow 0$, vemos que $A^{-z}e \rightarrow e$ quando $z \rightarrow 0$ em $\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \alpha\}$ para cada $\alpha \in (0, \pi/2)$. Desde que A^{-z} é uniformemente limitado para $z \in \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \alpha\} \cap \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ para cada $\alpha \in (0, \pi/2)$, graças a (2.9), A^z converge para I_E na topologia forte quando $z \rightarrow 0$ em $\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \geq \pi/2 + \epsilon\}$ para cada $\epsilon \in (0, \pi/2)$. Isto prova o teorema. $\square$

Suponha que $A^ze = 0$ para algum $e \in E$ e $z \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} z < 0$. Então segue que $A^{z+w}e = A^w A^ze = 0$ para $\operatorname{Re} w < 0$. Portanto $A^we = 0$ para $\operatorname{Re} w < \operatorname{Re} z$. Em particular, $A^{-k}e = 0$ para $k = 0, 1, 2, \dots$ com $k > -\operatorname{Re} z$. Consequentemente, $e = 0$. Isto mostra que A^z é injetiva para $\operatorname{Re} z < 0$. Portanto podemos definir as potências fracionárias para $\operatorname{Re} z > 0$ por

$$A^z := (A^{-z})^{-1}, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (2.10)$$

Claramente, $A^z \in \mathcal{C}(E)$. Dados $z, w \in \mathbb{C}$ com $0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w$ e $e \in D(A^w)$, segue de

$$e = A^{-w} A^w e = A^{-z-(w-z)} A^w e$$

que $e \in D(A^z)$, isto é,

$$D(A^w) \subset D(A^z), \quad 0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w. \quad (2.11)$$

Dado $e \in D(A)$, faça $f := Ae$. Como $D(A)$ é denso em E , podemos encontrar para cada $\epsilon > 0$ um elemento $u \in D(A)$ tal que $\|u - f\|_E \leq \epsilon / \|A^{-1}\|_{L(E)}$. Portanto, fazendo $v := Au$,

$$\|A^{-2}v - e\|_E = \|A^{-1}u - A^{-1}f\|_E \leq \|A^{-1}\|_{L(E)} \|u - f\|_E \leq \epsilon.$$

Isto mostra que $\overline{D(A^2)} \supset D(A)$. Portanto $\overline{D(A^2)} \supset \overline{D(A)} = E$ o que garante que $D(A^2)$ é denso em E . Por indução vemos que $D(A^k)$ é denso em E para $k = 1, 2, 3, \dots$. Segue de (2.11) que

$$\overline{D(A^z)} = E, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (2.12)$$

Agora suponha que $\operatorname{Re} z > 0$ e $\operatorname{Re} w > 0$. Dado

$$e \in D(A^{z+w}) \subset D(A^w) \cap D(A^z),$$

faça $f := A^{z+w}e$. Então $e = A^{-(z+w)}f = A^{-w}A^{-z}f$ implica $A^we = A^{-z}f$ o que, por sua vez, mostra que $f = A^zA^we$; isto é,

$$A^{z+w}e = A^zA^we = A^wA^ze, \quad e \in D(A^{z+w}).$$

Se $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} w$ e $e \in D(A^w)$ então

$$A^{-z}A^we = A^{-(z-w)}A^{-w}A^we = A^{-(z-w)}e = A^{w-z}e.$$

Adicionalmente, se $e \in D(A^z)$ então, graças a identidade acima,

$$A^{-w}A^ze = A^{-w}A^wA^{z-w}e = A^{z-w}e.$$

Isto prova que, dados $z, w \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w, \operatorname{Re}(z+w) \neq 0$,

$$A^zA^we = A^{z+w}e, \quad e \in D(A^u), \quad (2.13)$$

onde $u \in \{z, w, z+w\}$ com $\operatorname{Re} u = \max\{\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w, \operatorname{Re}(z+w)\}$.

Considere a seguinte extensão de (2.8).

Proposição 2.2.1 *Suponha que $m = 0, 1, 2, \dots$. Então*

$$A^{-z} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \frac{m!}{(1-z)(2-z)\cdots(m-z)} \int_0^\infty s^{m-z}(s+A)^{-m-1} ds \quad (2.14)$$

para $0 < \operatorname{Re} z < m+1$.

Prova: Suponha que z satisfaz $0 < \operatorname{Re} z < 1$. Então da integração por partes em (2.8) temos que,

$$\begin{aligned} A^{-z} &= \frac{\sin \pi z}{\pi(1-z)} \left[(s^{1-z}(s+A)^{-1}) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty s^{1-z}(s+A)^{-2} ds \right] \\ &= \frac{\sin \pi z}{\pi(1-z)} \int_0^\infty s^{1-z}(s+A)^{-2} ds. \end{aligned}$$

Agora (2.14) segue por indução para $0 < \operatorname{Re} z < 1$. Graças a (2.5) é fácil verificar que a integral em (2.14) converge absolutamente para $0 < \operatorname{Re} z < m+1$ e que o lado direito de (2.14) é uma aplicação analítica de $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < m+1\}$ em $L(E)$. Agora a afirmativa segue do Teorema 2.2.1. $\square$

É uma consequência do Teorema 2.2.1 que $\{A^{-t}; t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo sobre E . Denotamos o seu gerador infinitesimal por

$$-\log A$$

o que define o logaritmo de $A \in \mathcal{P}(E)$. Então a fórmula intuitiva

$$A^{-t} = \mathbf{e}^{-t \log A}, \quad t \geq 0,$$

é válida.

Um semigrupo analítico $\{\mathbf{e}^{-tB}; t \geq 0\}$ é dito **de ângulo** α , onde $0 < \alpha \leq \pi$, se existe uma função analítica

$$T : \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \alpha\} \rightarrow L(E)$$

estendendo $\{\mathbf{e}^{-tB}; t \geq 0\}$, tal que T é fortemente contínuo no setor fechado $\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \alpha - \epsilon\} \cup \{0\}$ para cada $\epsilon \in (0, \alpha)$. Então T é um semigrupo sobre E e escrevemos $\mathbf{e}^{-zB} := T(z)$ para $\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \alpha\} \cup \{0\}$. Esta notação é justificada já que $\frac{d}{dz}T(z) = -BT(z)$ para $z \in \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \alpha\}$.

Teorema 2.2.2 *Assuma que $A \in \mathcal{P}_M(E)$. Então $\{A^{-t}; t \geq 0\}$ é um semigrupo analítico de ângulo $\pi/2$. Adicionalmente,*

$$\|A^{-t}\|_{L(E)} \leq M^m, \quad 0 \leq t \leq m, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

e $A^{-z} = e^{-z \log A}$ para $\operatorname{Re} z < 0$.

Prova: Graças ao Teorema 2.2.1 resta provar apenas a limitação. Aplicando a Proposição 2.2.1 a $E := \mathbb{C}$ e $A := 1$ vemos que

$$\frac{\pi(1-t)(2-t)\cdots(m-t)}{m! \sin \pi t} = \int_0^\infty s^{m-t}(1+s)^{-m-1} ds > 0$$

para $0 < s < m+1$ e $m = 0, 1, 2, \dots$. Agora a Proposição 2.2.1 e (2.5) implicam

$$\|A^{-t}\|_{L(E)} \leq M^{m+1} \frac{\sin \pi t}{\pi} \frac{m!}{(1-t)(2-t)\cdots(m-t)} \int_0^\infty s^{m-t}(1+s)^{-m-1} dt = M^{m+1}$$

para $0 < t < m+1$ e $m = 0, 1, 2, \dots$. $\square$

Agora suponha que $-1 < \operatorname{Re} z < 1$. Então pomos

$$A_z e := \frac{\sin \pi z}{\pi z} \int_0^\infty s^z (s+A)^{-2} A e \, ds, \quad e \in D(A).$$

Observe que

$$A_0 e = \int_0^\infty (s+A)^{-2} ds \, A e = -(s+A)^{-1} A e \Big|_0^\infty = e, \quad e \in D(A). \quad (2.15)$$

Adicionalmente, se $\operatorname{Re} z \neq 0$, segue de (2.8) e de (2.14) que

$$A^z e = A^{z-1} A e = \frac{\sin \pi(1-z)}{\pi z} \int_0^\infty s^z (s+A)^{-2} A e \, ds = A_z e \quad (2.16)$$

para $e \in D(A)$. Note que

$$A^{-1} A_z \subset B_z := \frac{\sin \pi z}{\pi z} \int_0^\infty s^z (s+A)^{-2} ds \in L(E). \quad (2.17)$$

Seja (e_j) uma sequência em $D(A)$ tal que $e_j \rightarrow 0$ e $A_z e_j \rightarrow f$ em E . Então graças a (2.17), $B_z e_j \rightarrow 0$ e $B_z e_j \rightarrow A^{-1} f$, o que implica que $f = 0$. Portanto A_z é fechável. Motivado por (2.15) e (2.16) fazemos

$$A^z := \text{fecho de } A_z, \quad \operatorname{Re} z = 0.$$

Daqui por diante sempre freqüentemente escreveremos $D(A^z)$ para denotar este espaço vetorial munido com a norma do gráfico de A^z . Escreveremos $Is(X, Y)$ para denotar o subespaço de $L(X, Y)$ consistindo dos isomorfismos lineares de X sobre Y . Com estas considerações já provamos a maior parte do seguinte teorema.

Teorema 2.2.3 *Suponha que $A \in \mathcal{P}(E)$. Então a **potência fracionária** A^z é, para cada $z \in \mathbb{C}$, um operador linear fechado densamente definido em E . Se $\operatorname{Re} z < 0$ então $A^z \in L(E)$ e é dado pela integral*

$$A^z = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (-\lambda)^z (\lambda + A)^{-1} d\lambda, \quad (2.18)$$

onde Γ é qualquer curva simples suave por partes em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ indo de $\infty e^{-i\varphi}$ a $\infty e^{i\varphi}$ para algum $\varphi \in (0, \pi)$ tal que $\sigma(-A)$ fica estritamente a esquerda de Γ . Adicionalmente,

(i) A^z é a potência usual de A se z é inteiro.

- (ii) $A^z e = \frac{\sin \pi z}{\pi z} \int_0^\infty s^z (s + A)^{-2} A e \, ds, \quad e \in D(A), \quad -1 < \operatorname{Re} z < 1.$
- (iii) *Suponha que ou $m = 0, 1, 2, \dots$, $e \in D(A^{2m})$ e $\max\{\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w\} < m$ ou $\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w$ e $\operatorname{Re}(z + w)$ não são nulos e $e \in D(A^u)$ onde $u \in \{z, w, z + w\}$, satisfaz $\operatorname{Re} u = \max\{\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w, \operatorname{Re}(z + w)\}$. Então*
- $$A^z A^w e = A^{z+w} e.$$
- (iv) $A^z A^w = A^{z+w}, \operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w > 0.$
- (v) $D(A^w) \xrightarrow{d} D(A^z) \xrightarrow{d} E, 0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w.$
- (vi) $A^z \in \operatorname{Is}(D(A^{z+w}), D(A^w)) \cap \operatorname{Is}(D(A^z), E), \operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w > 0.$
- (vii) *Dado $m = 0, 1, 2, \dots$, a aplicação*

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < m\} \rightarrow L(D(A^m), E), \quad z \mapsto A^z$$

é analítica.

Prova: A primeira parte da afirmativa segue de resultados que precedem o enunciado do teorema.

- (i) Segue de (2.1) e de (2.10).
- (ii) Se $\operatorname{Re} z \neq 0$, isto foi mostrado em (2.16) e segue da definição de A^z se $\operatorname{Re} z = 0$.
- (iii) Se $\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w$ e $\operatorname{Re}(z + w)$ são todos distintos de zero, isto é uma consequência de (2.13) e (2.11). De (ii) e (2.5) concluímos que

$$(z \mapsto A^z) \in C^1(\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}, L(D(A), E) \cap L(D(A^2), D(A))). \quad (2.19)$$

Portanto, suponha que $z, w \in \{\zeta \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} \zeta < 1\}$. Escolha as sequências $(z_j), (w_j)$ em

$$\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\} =: Z \quad (2.20)$$

tal que $z_j + w_j \in Z$, $z_j \rightarrow z$ e $w_j \rightarrow w$. Então, pelo que já sabemos,

$$A^{z_j} A^{w_j} e = A^{z_j + w_j} e, \quad e \in D(A^2).$$

Portanto, fazendo $j \rightarrow \infty$, obtemos de (2.19) que (iii) é verdade se $-1 < \operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w < 1$.

Suponha que $\operatorname{Re} z = 0$ e $\{w \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} w| \geq 1\}$. Fixe $\alpha \in \mathbb{R}$ com $0 < \alpha - \operatorname{Re} w < 1$. Então

$$A^z A^w e = A^z A^{w-\alpha} A^\alpha e = A^{z+(w-\alpha)} A^\alpha e = A^{(z+w-\alpha)+\alpha} e = A^{z+w} e$$

para $e \in D(A^{2m})$ com $m = 2, 3, \dots$ e $\operatorname{Re} w < m$ já que $-1 < \operatorname{Re}(w - \alpha) < 0$ e $\alpha \neq 0$.

Finalmente, seja $\operatorname{Re} z \leq -1$, $1 \leq \operatorname{Re} w$ e $\operatorname{Re}(z + w) = 0$. Escrevemos $z = r + s$ com $-1 < \operatorname{Re} r < 0$. Como as partes reais de r , w e $r + w$ são não nulas e z , r e s tem partes reais negativas, segue que $A^z = A^r A^s$ e $A^s A^w e = A^{s+w} e$ para $e \in D(A^w)$. Portanto

$$A^z A^w e = A^r A^{s+w} e, \quad e \in D(A^w) \subset D(A^{2m}).$$

Logo podemos assumir que $-1 < \operatorname{Re} z < 0$. Então $\operatorname{Re}(z + w) = 0$ implica $0 < \operatorname{Re} w < 1$, de forma que estamos de volta a situação já considerada. Consequentemente, (iii) foi completamente provado.

- (iv) Pelo Teorema 2.2.1 e (iii) é suficiente provar que $e \in D(A^w)$ e $A^w e \in D(A^z)$ implica $e \in D(A^{w+z})$ se $\operatorname{Re} z > 0$ e $\operatorname{Re} w > 0$. Seja $f := A^z(A^w e)$. Então segue de (iii) que $e = A^{-w}(A^{-z} f) = A^{-(w+z)} f \in D(A^{w+z})$.

(v) De (2.11) e de (iii) deduzimos que

$$\|A^z e\|_E = \|A^{z-w} A^w e\|_E \leq \|A^{z-w}\|_{L(E)} \|A^w e\|_E, \quad e \in D(A^w).$$

Como $e \mapsto \|A^u e\|_E$ é uma norma equivalente a norma em $D(A^u)$ para $\operatorname{Re} u > 0$, graças a limitação de A^{-u} , segue que $D(A^w) \hookrightarrow D(A^z) \hookrightarrow E$.

Dado $e \in D(A^z)$ faça $f := A^z e \in E$. Como $D(A^{w-z})$ é denso em E , dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $u \in D(A^{w-z})$ tal que $\|u - f\|_E < \epsilon$. Portanto

$$v := A^{-z} u \in D(A^w) \quad \text{e} \quad \|A^z(v - e)\|_E = \|u - f\|_E < \epsilon.$$

Isto mostra que $D(A^w)$ é denso em $D(A^z)$ que, junto com (2.12) implica a afirmativa.

(vi) A primeira afirmativa segue de (iv) e a segunda é trivial.

(vii) Graças ao Teorema 2.2.1 e (2.19), podemos assumir que $m \geq 2$. Desde que (v) implica

$$L(D(A), E) \hookrightarrow L(D(A^m), E),$$

concluimos que

$$(z \mapsto A^z) \in C^1(\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z < 1\}, L(D(A^m), E)). \quad (2.21)$$

Se $0 < \operatorname{Re} z < m$ então (iii) implica que $A^z e = A^{z-m} A^m e$ para $e \in D(A^m)$. Portanto o Teorema 2.2.1 garante que

$$(z \mapsto A^z) \in C^1(\{z \in \mathbb{C}; 0 < \operatorname{Re} z < m\}, L(D(A^m), E)).$$

Isto juntamente com (2.21) prova o teorema. $\square$

Note que se $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo com decaimento exponencial em E então A é do tipo positivo. Neste caso podemos obter outra fórmula de representação útil para A^z com $\operatorname{Re} z > 0$.

Teorema 2.2.4 *Suponha que A é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo com decaimento exponencial. Então*

$$A^{-z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty t^{z-1} \mathbf{e}^{-tA} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Prova: É uma consequência fácil de

$$\left\| \int_0^\infty t^{z-1} \mathbf{e}^{-tA} dt \right\|_{L(E)} \leq M \int_0^\infty t^{\operatorname{Re} z - 1} \mathbf{e}^{-\sigma t} dt$$

e das propriedades conhecidas da função Γ que a aplicação

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \rightarrow L(E), \quad z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty t^{z-1} \mathbf{e}^{-tA} dt$$

é analítica. Portanto, graças ao Teorema 2.2.1 é suficiente provar a igualdade para $0 < z < 1$.

Dado $z \in (0, 1)$,

$$A^{-z} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_0^\infty s^{-z} (s + A)^{-1} ds$$

pela Proposição 2.2.1. Por outro lado sabemos da teoria de semigrupos que

$$(s + A)^{-1} = \int_0^\infty \mathbf{e}^{-st} \mathbf{e}^{-tA} dt, \quad s > 0.$$

Portanto pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned} A^{-z} &= \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_0^\infty s^{-z} \int_0^\infty \mathbf{e}^{-st} \mathbf{e}^{-tA} dt ds = \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_0^\infty \mathbf{e}^{-tA} \int_0^\infty s^{-z} \mathbf{e}^{-ts} ds dt \\ &= \frac{\sin \pi z}{\pi} \Gamma(1-z) \int_0^\infty t^{z-1} \mathbf{e}^{-tA} dt. \end{aligned}$$

Portanto a afirmativa segue da fórmula

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi / \sin \pi z. \square$$

Agora assumimos que H é um espaço de Hilbert e A é um operador linear auto-adjunto definido positivo em H , isto é, $A = A^* \geq \alpha > 0$ para algum $\alpha > 0$. Seja $\{E_\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\}$ a resolução espectral de A . Então, dado $z \in \mathbb{C}$, podemos definir A^z por

$$A^z := \int_0^\infty \lambda^z dE_\lambda, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.22)$$

O teorema a seguir mostra que esta definição coincide com a anterior.

Teorema 2.2.5 *Seja H um espaço de Hilbert e A um operador linear auto-adjunto definido positivo em H . Então $A \in \mathcal{P}(H)$ e as potências fracionárias definidas em (2.22) através da resolução espectral coincidem com as potências fracionárias do Teorema 2.2.3.*

Prova: Primeiramente note que $\sigma(-A) \subset (-\infty, -\alpha]$ se $A = A^* \geq \alpha > 0$. Adicionalmente,

$$(s + \alpha)\|e\|_E^2 \leq \langle (s + A)e, e \rangle \leq \|(s + A)e\|_E \|e\|_E, \quad e \in D(A),$$

implica

$$\|(s + A)^{-1}\|_{L(E)} \leq (s + \alpha)^{-1} \leq M(1 + s)^{-1}, \quad s \geq 0.$$

Portanto $A \in \mathcal{P}(H)$.

Seja Γ o contorno consistindo dos dois raios $-\beta + \mathbb{R}^+ \mathbf{e}^{\pm i\varphi}$ para algum $\beta \in (0, \alpha)$ e $\varphi \in (0, \pi)$ e orientada de forma que as partes imaginárias cresçam ao longo de Γ . Então para $z \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} z < 0$ e $\mu \geq \alpha$ a fórmula integral de Cauchy implica

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(-\lambda)^z}{\lambda + \mu} d\lambda = \mu^z.$$

Portanto, do Teorema de Fubini e o cálculo espectral de A

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (-\lambda)^z (\lambda + A)^{-1} d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (-\lambda)^z \int_0^\infty (\lambda + \mu)^{-1} dE_\mu d\lambda \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(-\lambda)^z}{\lambda + \mu} d\lambda \right] dE_\mu = \int_0^\infty \mu^z dE_\mu \end{aligned}$$

em $L(H)$, graças ao fato que o suporte da resolução espectral está contido em $[\alpha, \infty)$. Isto prova a afirmativa para $\operatorname{Re} z < 0$. Agora o teorema segue do cálculo espectral para operadores lineares auto-adjuntos e da definição de potências fracionárias para $A \in \mathcal{P}(H)$ dada acima. $\square$

2.3 Potências de Potências Fracionárias

Nesta seção apresentamos dois resultados. O primeiro deles, devido a T. Kato (veja [12]), estabelece uma fórmula para o operador resolvente de potências fracionárias. Esta fórmula é utilizada para mostrar (neste mesmo teorema) que é possível calcular potências fracionárias de potências fracionárias e posteriormente também será utilizada para transferir propriedades de monotonia do resolvente de um operador para o resolvente de sua potência fracionária. Este mesmo resultado ainda estabelece, no caso em que A gera um semigrupo fortemente contínuo com decaimento exponencial, uma fórmula (devida a Yosida [24]) para para semigrupo analítico gerado por $-A^\alpha$ em função do semigrupo gerado por $-A$. O segundo resultado é uma consequência simples do primeiro e estabelece o seguinte teorema de reiteração: $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$.

Definição 2.3.1 Dizemos que A é do tipo (ω, M) em um espaço de Banach E se A é fechado, densamente definido e o resolvente de $-A$ contém um setor aberto $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \pi - \omega\}$ e $\lambda(\lambda + A)^{-1}$ é uniformemente limitado em cada setor menor $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \pi - \omega - \epsilon\}$, $\epsilon > 0$ e $\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\| \leq M$, $\lambda \geq 0$ (see [12]).

É claro se A é gerador de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ tal que $\|T(t)\| \leq M$ para todo $t \geq 0$ então A é do tipo $(\pi/2, M)$ (basta observar que em qualquer setor Σ_ϕ com $\phi < \pi/2$ temos $\operatorname{Re} \lambda \geq |\lambda| \cos \phi$ e que neste setor $\|(\lambda + A)^{-1}\| \leq M/\operatorname{Re} \lambda$). E já vimos também que se A é do tipo (ω, M) com $\omega < \pi/2$ então $-A$ é gerador de um semigrupo analítico $\{T(t) : t \in \Sigma_{\phi-\pi/2}\}$ e neste caso

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{\lambda t} (\lambda + A)^{-1} d\lambda, \quad (2.23)$$

onde a trajetória de integração Γ' percorre o setor $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \pi - \omega\}$ de $\infty e^{-i\nu}$ a $\infty e^{i\nu}$, $\pi/2 < \nu < \pi - \omega$.

O teorema a seguir terá importância fundamental na demonstração de que para todo operador dissipativo A em um espaço de Hilbert H com $0 \in \rho(A)$ podemos definir o grupo fortemente contínuo $\{A^{it} \in L(H) : t \in \mathbb{R}\}$. Este resultado por sua vez tem importância fundamental na caracterização dos espaços de potência fracionária $D(A^\alpha)$ que por sua vez é ferramenta indispensável para lidar com expoentes críticos em problemas semilineares parabólicos.

Teorema 2.3.1 (Kato) Seja A um operador de tipo (ω, M) em um espaço de Banach E com $0 \in \rho(A)$ e $0 < \alpha < 1$, então

$$(\lambda + A^\alpha)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda + (-\mu)^\alpha} (\mu + A)^{-1} d\mu, \quad \lambda \geq 0, \quad (2.24)$$

onde Γ é um contorno como em (2.18). Deformando Γ sobre $\mathbb{R}^+$ segue que

$$(\lambda + A^\alpha)^{-1} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^\alpha (s + A)^{-1}}{s^{2\alpha} + 2\lambda s^\alpha \cos \pi \alpha + \lambda^2} ds, \quad \lambda \geq 0. \quad (2.25)$$

Além disso, A^α é de tipo $(\alpha\omega, M)$. Se $\alpha\omega < \pi/2$ então $-A^\alpha$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{T_\alpha(t) : t \in \Sigma_{\pi/2-\alpha\omega}\}$. No caso em que $-A$ gera um semigrupo fortemente contínuo com decaimento exponencial $T_\alpha(t)$ é dado por

$$T_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty T(\tau) \int_{\Gamma} e^{-\tau\mu - t(-\mu)^\alpha} d\mu d\tau. \quad (2.26)$$

Prova: É fácil ver que a integral em (2.25) é absolutamente convergente. Denote por $R(\lambda)$ o operador linear limitado definido pelo lado direito de (2.25). É fácil ver que $R(\lambda)$ é dado por (2.24), deformando Γ sobre $\mathbb{R}^+$

e de (2.24) segue que

$$\begin{aligned}
(\lambda' - \lambda)R(\lambda)R(\lambda') &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} \frac{\lambda' - \lambda}{(\lambda + (-\mu)^\alpha)(\lambda' + (-\nu)^\alpha)} (\mu + A)^{-1} (\nu + A)^{-1} d\nu d\mu \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} \frac{\lambda' - \lambda}{(\lambda + (-\mu)^\alpha)(\lambda' + (-\nu)^\alpha)} \frac{(\mu + A)^{-1} - (\nu + A)^{-1}}{\nu - \mu} d\nu d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda + (-\mu)^\alpha} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{1}{\nu - \mu} \frac{1}{\lambda' + (-\nu)^\alpha} d\nu \right) (\mu + A)^{-1} d\mu \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda + (-\mu)^\alpha} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\mu - \nu} \frac{1}{\lambda' + (-\nu)^\alpha} d\mu \right) (\nu + A)^{-1} d\nu \\
&= 2\pi i \int_{\Gamma'} \frac{\lambda' - \lambda}{(\lambda + (-\nu)^\alpha)(\lambda' + (-\nu)^\alpha)} (\nu + A)^{-1} d\nu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{1}{\lambda + (-\nu)^\alpha} (\nu + A)^{-1} d\nu - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{1}{\lambda' + (-\nu)^\alpha} (\nu + A)^{-1} d\nu \\
&= R(\lambda) - R(\lambda')
\end{aligned}$$

onde Γ' é um contorno com as mesmas propriedades de Γ à direita de Γ . Como $R(0) = A^{-\alpha}$ tem imagem densa e núcleo trivial segue do Teorema 1.5.1 que $(\lambda + A^\alpha)^{-1} = R(\lambda)$.

Agora note que $R(\lambda)$ pode ser continuado analiticamente para o setor $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \pi - \alpha\omega\}$. Para ver isto é suficiente considerar a integral em (2.24) nos raios $\arg \mu = \pm(\pi - \omega - \epsilon)$, $\epsilon > 0$ pequeno, $|\mu| \geq 1$ e observar que sobre estes raios

$$|\lambda + (-\mu)^\alpha| = |\mu|^\alpha \left| \frac{|\lambda|}{|\mu|} e^{i(\arg \lambda \pm \alpha(\omega + \epsilon))} + 1 \right|$$

de onde obtemos $|\lambda + (-\mu)^\alpha|$ é uma função contínua de μ para $\mu \in \Gamma$ tal que

$$\sup_{|\mu| \geq 1} \left| \frac{|\lambda|}{|\mu|} e^{i(\arg \lambda \pm \alpha(\omega + \epsilon))} + 1 \right| = \delta > 0$$

e portanto

$$|\lambda + (-\mu)^\alpha|^{-1} \leq \delta^{-1} \frac{1}{|\mu|^\alpha}$$

sempre que $|\arg \lambda| < \pi - \alpha(\omega + \epsilon)$. Estes cálculos também mostram que $\lambda(\lambda + A^\alpha)^{-1}$ é limitada uniformemente em qualquer setor fechado contido em $\Sigma_{\pi - \alpha\omega}$. Em particular, para $\lambda > 0$, (2.25) nos dá

$$\|(\lambda + A^\alpha)^{-1}\| \leq \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mu^\alpha}{\lambda^2 + 2\lambda\mu^\alpha \cos \pi\alpha + \mu^{2\alpha}} \frac{M}{\mu} d\mu = \frac{M}{\lambda}.$$

Isto completa a prova de que A^α é do tipo $(\alpha\omega, M)$.

Agora está claro que se $\alpha\omega < \pi/2$ então $\{T_\alpha(t) : t \in \Sigma_{\pi - \alpha\omega}\}$ é um semigrupo analítico. Resta apenas mostrar que este semigrupo é dado por (2.26) no caso em que $-A$ gera um semigrupo fortemente contínuo com decaimento exponencial. Neste caso existe $\epsilon > 0$ tal que $-(A - \epsilon)$ é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo e limitado de operadores de forma que $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > -\epsilon\} \subset \rho(-A)$. Como $\omega = \pi/2$, a trajetória Γ em (2.24) pode ser escolhida de forma que $\operatorname{Re} \mu > -\epsilon$ e $|\arg(-\mu)^\alpha| \leq \phi < \pi/2$ para $\mu \in \Gamma$. Então (2.24) é válida para todo λ com $|\arg \lambda| \leq \pi - \phi (> \pi/2)$. Escolha a trajetória Γ' em (2.23) tal que esta

condição está satisfeita para todo λ em Γ' . Então, lembrando que $R(\lambda) = (\lambda + A^\alpha)^{-1}$, temos que

$$\begin{aligned} T_\alpha(t) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma'} e^{\lambda t} \int_{\Gamma} (\lambda + (-\mu)^\alpha)^{-1} (\mu + A)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{t(-\mu)^\alpha} (\mu + A)^{-1} d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{t(-\mu)^\alpha} \int_0^\infty e^{-\tau\mu} T(\tau) d\tau d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty T(\tau) \int_{\Gamma} e^{-\tau\mu - t(-\mu)^\alpha} d\mu d\tau. \end{aligned}$$

Mostrando que $T_\alpha(t)$ é dado por (2.26). $\square$

Observação 2.3.1 *O teorema anterior continua válido se eliminamos a hipótese $0 \in \rho(A)$, (veja [12]).*

Fechamos esta seção mostrando que podemos calcular potências de potências, um resultado que será necessário posteriormente. Para isto provamos primeiramente que se $A \in \mathcal{P}(E)$ então $A^\alpha \in \mathcal{P}(E)$ para $0 < \alpha < 1$. De fato, provamos o seguinte resultado:

Segue do Teorema 2.3.1 e do Teorema 2.2.3 que as potências fracionárias $(A^\alpha)^z$ estão bem definidas para $z \in \mathbb{C}$ e $\alpha \in (0, 1)$. No teorema a seguir nos restringimos, por simplicidade, ao caso $z \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.3.2 *Suponha que $A \in \mathcal{P}(E)$ e que $0 < \alpha < 1$. Então $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$ para $\beta \in \mathbb{R}$.*

Prova: Graças ao Teorema 2.3.1 podemos encontrar $M \geq 1$ tal que A e A^α pertencem a $\mathcal{P}(E)$ com constante M . Então do Teorema 2.3.1

$$(\mu + A^\alpha)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(\lambda + A)^{-1}}{\mu + (-\lambda)^\alpha} d\lambda, \quad \mu \in \Sigma_M,$$

onde Γ é uma curva suave por partes indo de $\infty e^{-i\nu}$ até $\infty e^{i\nu}$ em $\Sigma_M \setminus \mathbb{R}^+$, para ν suficientemente pequenos. Portanto, por (2.18) e pela fórmula integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} (A^\alpha)^{-\beta} &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma'} \int_{\Gamma} \frac{(-\mu)^{-\beta}}{\mu + (-\lambda)^\alpha} (\lambda + A)^{-1} d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} \int_{\Gamma'} \frac{(-\mu)^{-\beta}}{\mu + (-\lambda)^\alpha} d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (-\lambda)^{-\alpha\beta} (\lambda + A)^{-1} d\lambda = A^{-\alpha\beta} \end{aligned}$$

para $\beta > 0$, onde Γ' é um contorno com as mesmas propriedades de Γ à direita de Γ . Adicionalmente, $(A^\alpha)^\beta = [(A^\alpha)^{-\beta}]^{-1} = [A^{-\alpha\beta}]^{-1} = A^{\alpha\beta}$ para $\beta > 0$. Isto prova o teorema. $\square$

2.4 Desigualdades de Interpolação para Potências Fracionárias

Nesta seção mostramos que $\|A^\alpha e\| \leq K \|Ae\|^\alpha \|e\|^{1-\alpha}$ para todo $0 \leq \alpha \leq 1$, $e \in D(A)$ e lidamos com perturbações B de operadores positivos A subordinados as potências fracionárias A^α de A .

Teorema 2.4.1 *Suponha que $A \in \mathcal{P}(E_0)$ e $0 \leq \alpha \leq 1$, então*

$$\|(\mu + A)^{-1}e\|_{E_0} \leq K\mu^{\alpha-1}\|A^{-\alpha}e\|_{E_0}, \quad \mu > 0, \quad e \in E_0.$$

Aqui K é uma constante dependendo de M e α .

Prova: Sabemos que $\|s(s + A)^{-1}\|_{L(E_0)} \leq M$, $\|A(s + A)^{-1}\|_{L(E_0)} \leq M + 1$, $s \geq 0$. Seja $e \in D(A)$, então

$$\begin{aligned} (\mu + A)^{-1}e &= A^{\alpha-1}A(\mu + A)^{-1}A^{-\alpha}e \\ &= \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty s^{\alpha-1}A(\mu + A)^{-1}(s + A)^{-1}A^{-\alpha}e ds. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \|(\mu + A)^{-1}e\|_{E_0} &\leq \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} M(M + 1) \left[\int_0^\mu s^{\alpha-1} ds \mu^{-1} + \int_\mu^\infty s^{\alpha-2} ds \right] \|A^{-\alpha}e\|_{E_0} \\ &\leq M(M + 1) \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha} \mu^{\alpha-1} + \frac{1}{1-\alpha} \mu^{\alpha-1} \right] \|A^{-\alpha}e\|_{E_0} \end{aligned}$$

e o resultado segue. $\square$

Teorema 2.4.2

1. *Assuma que $A \in \mathcal{P}(E_0)$ e que $e \in D(A^\alpha)$ para algum α , $0 < \alpha \leq 1$. Então, se $e_\epsilon = (I + \epsilon A)^{-1}e$, $\epsilon > 0$, temos que*

$$\|e_\epsilon - e\|_{E_0} \leq M\epsilon^\alpha \|A^\alpha e\|_{E_0}$$

$$\|Ae_\epsilon\|_{E_0} \leq M\epsilon^{\alpha-1} \|A^\alpha e\|_{E_0}$$

para todo $\epsilon > 0$.

2. *Suponha que $e \in E_0$ e que para algum α , $0 < \alpha \leq 1$, $\|e\|_{E_0} < B < \infty$, existe $e_\epsilon \in D(A)$, para todo $\epsilon > 0$ tal que*

$$\|e_\epsilon - e\|_{E_0} \leq B\epsilon^\alpha, \quad \forall \epsilon > 0,$$

$$\|Ae_\epsilon\|_{E_0} \leq B\epsilon^{\alpha-1}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Então $e \in D(A^\beta)$ para qualquer β em $0 < \beta < \alpha$ e

$$\|A^\beta e\|_{E_0} \leq M_{\alpha,\beta} B$$

para uma constante $M_{\alpha,\beta}$ dependendo somente de A , α e β .

Prova: 1) Pelo Teorema 2.4.1

$$\begin{aligned} \|Ae_\epsilon\|_{E_0} &= \|A^{1-\alpha}(1 + \epsilon A)^{-1}A^\alpha e\|_{E_0} \\ &\leq M\epsilon^{\alpha-1} \|A^\alpha e\|_{E_0} \end{aligned}$$

e portanto $\|e_\epsilon - e\|_{E_0} = \|\epsilon A(I + \epsilon A)^{-1}e\|_{E_0} \leq M\epsilon^\alpha \|A^\alpha e\|_{E_0}$.

2) Para qualquer $\mu > 0$, $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \|A(\mu + A)^{-1}e\|_{E_0} &\leq \|A(\mu + A)^{-1}(e - e_\epsilon)\|_{E_0} + \|(\mu + A)^{-1}Ae_\epsilon\|_{E_0} \\ &\leq (M + 1)B\epsilon^\alpha + M\mu^{-1}B\epsilon^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Logo, escolhendo $\epsilon = \mu^{-1}$

$$\|A(\mu + A)^{-1}e\|_{E_0} \leq B(2M + 1)\mu^{-\alpha}$$

e claramente

$$\|A(\mu + A)^{-1}e\|_{E_0} \leq (M + 1)\|e\|_{E_0} \leq B(2M + 1).$$

Logo

$$\|A(\mu + A)^{-1}e\|_{E_0} \leq B(2M + 1) \min\{1, \mu^{-\alpha}\}.$$

Se $0 < \beta < \alpha$ segue que $\int_0^\infty \|s^{\beta-1}A(s + A)^{-1}e\|_{E_0} ds < \infty$ e

$$J_\beta e = \frac{\sin \pi \beta}{\pi} \int_0^\infty s^{\beta-1} A(s + A)^{-1} e ds$$

é tal que $\|J_\beta e\|_{E_0} \leq M_{\alpha, \beta} B$, mas

$$f_R = \frac{\sin \pi \beta}{\pi} \int_0^R s^{\beta-1} (s + A)^{-1} e ds \rightarrow A^{\beta-1} e$$

quando $R \rightarrow \infty$ e $Af_R \rightarrow J_\beta e$ quando $R \rightarrow \infty$. Como A é fechado segue que $A^{\beta-1}e \in D(A)$ o que significa $e \in D(A^\beta)$, desde que $e = A^{-\beta}(AA^{\beta-1}e)$, e $\|A^\beta e\|_{E_0} = \|J_\beta e\|_{E_0} \leq M_{\alpha, \beta} B$. $\square$

Corolário 2.4.1 *Se $e \in D(A^\alpha)$, $\alpha > 0$ e $0 < \beta < \alpha$ então*

$$A^\beta e = \frac{\sin \pi \beta}{\pi} \int_0^\infty s^{\beta-1} A(s + A)^{-1} e ds.$$

Teorema 2.4.3 *Existe uma constante K dependendo somente de A , tal que $\|A^\alpha e\|_{E_0} \leq K \|Ae\|_{E_0}^\alpha \|e\|_{E_0}^{1-\alpha}$ para $0 \leq \alpha \leq 1$, $e \in D(A)$.*

Prova: O resultado é trivial para $\alpha = 0$ e para $\alpha = 1$. Como mostrado no Corolário 2.4.1 para $0 < \alpha < 1$, $e \in D(A)$

$$A^\alpha e = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty s^{\alpha-1} A(s + A)^{-1} e ds$$

logo

$$\begin{aligned} \|A^\alpha e\|_{E_0} &\leq \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \left[\int_0^\mu s^{\alpha-1} (M + 1) \|e\|_{E_0} ds + \int_\mu^\infty s^{\alpha-2} M \|Ae\|_{E_0} ds \right] \\ &\leq \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} (M + 1) \left[\frac{\mu^\alpha}{\alpha} \|e\|_{E_0} + \frac{\mu^{\alpha-1}}{1-\alpha} \|Ae\|_{E_0} \right] \end{aligned}$$

para qualquer $\mu > 0$. Seja $\mu = \|Ae\|_{E_0} / \|e\|_{E_0}$. Então

$$\|A^\alpha e\|_{E_0} \leq (M + 1) \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right] \|Ae\|_{E_0}^\alpha \|e\|_{E_0}^{1-\alpha}$$

e a constante é uniformemente limitada para $0 < \alpha < 1$. $\square$

Corolário 2.4.2 *Seja $A \in \mathcal{P}(E_0)$ e $B : D(B) \subset E_0 \rightarrow E_0$ um operador fechado tal que $D(B) \supset D(A^\alpha)$, para algum $\alpha > 0$. Então existem constantes $C, C_1 > 0$ tais que*

$$\|Be\|_{E_0} \leq C \|A^\alpha e\|_{E_0}, \quad e \in D(A^\alpha)$$

e

$$\|Be\|_{E_0} \leq C_1 (\mu^\alpha \|e\|_{E_0} + \mu^{\alpha-1} \|Ae\|_{E_0}), \quad \mu > 0, \quad e \in D(A).$$

Prova: Considere o operador fechado $BA^{-\alpha}$. Como $D(B) \supset D(A^\alpha)$, $BA^{-\alpha}$ está definido em todo E_0 e pelo teorema do gráfico fechado segue ele $BA^{-\alpha} \in L(E_0)$. Isto e o Teorema 2.4.3 implicam o resultado desejado. $\square$

Teorema 2.4.4 *Suponha que A e B são operadores setoriais em E com $D(A) = D(B)$ e $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$, $\operatorname{Re}\sigma(B) > 0$ e para algum $\alpha \in [0, 1]$, $(A - B)A^{-\alpha} \in L(E)$. Então, para todo $\beta \in [0, 1]$, $A^\beta B^{-\beta}$ e $B^\beta A^{-\beta}$ estão em $L(E)$.*

Prova: Pelo Teorema 2.4.3 $\|A^\beta(\lambda + A)^{-1}\| \leq C|\lambda|^{\beta-1}$ para $0 \leq \beta \leq 1$, em $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\pi - \arg \lambda| \geq \phi\}$, para alguma constante positiva C e $\phi < \phi/2$. Ainda, para $0 < \beta < 1$,

$$B^{-\beta} - A^{-\beta} = \frac{\sin \pi \beta}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\beta} (\lambda + B)^{-1} (A - B) (\lambda + A)^{-1} d\lambda.$$

Estimativas simples agora mostram que $B^\beta A^{-\beta}$ é limitado. Como

$$[I + A^\alpha(\lambda + A)^{-1}(B - A)A^{-\alpha}]A^\alpha(\lambda + B)^{-1} = A^\alpha(\lambda + A)^{-1}$$

segue que $\|A^\alpha(\lambda + B)^{-1}\| = O(|\lambda|^{\alpha-1})$ quando $|\lambda| \rightarrow \infty$. Trocando A por B na identidade integral acima obtemos que $A^\beta B^{-\beta}$ é também limitado. Os casos $\beta = 0$ e $\beta = 1$ seguem imediatamente. $\square$

Corolário 2.4.3 *Se A e B são como no Teorema 2.4.4 então $D(A^\alpha) = D(B^\alpha)$, com normas equivalentes $0 \leq \alpha \leq 1$.*

2.5 Potências Fracionárias e Semigrupos

Agora consideramos o caso em que A é setorial; isto é, $\{e^{-At}, t \geq 0\}$ é semigrupo analítico.

Teorema 2.5.1 *Assuma que A é setorial. Logo $\{e^{-At}; t \geq 0\}$ é um semigrupo analítico, suponha que $\rho(A) \supset (-\infty, 0]$. Então*

1. *Se $t > 0$, $\alpha \geq 0$, $R(e^{-At}) \subset D(A^\alpha)$ e*

$$\|A^\alpha e^{-At}\|_{L(E_0)} \leq M_\alpha t^{-\alpha}, \quad 0 < t \leq 1,$$

$\alpha \mapsto M_\alpha$ é contínua em $[0, \infty)$.

2. *Se $\alpha > 0$, temos que $t^\alpha A^\alpha e^{-At} e \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$ para cada $e \in E_0$.*

3. *$\|(e^{-At} - I)A^{-\alpha}\|_{L(E_0)} \leq M_{1-\alpha} \frac{t^\alpha}{\alpha}$ se $0 < \alpha \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$.*

Prova: 1) Se $t > 0$, $R(e^{-At}) \subset D(A)$ e, do Teorema 1.8.1, $\|Ae^{-At}\|_{L(E_0)} \leq Mt^{-1}$, $\|e^{-At}\|_{L(E_0)} \leq M$ para $0 \leq t \leq 1$. Logo para qualquer inteiro m , $R(e^{-At}) \subset D(A^m)$ pois $e^{-At/m}$ leva E_0 em $D(A)$ e $D(A^k)$ em $D(A^{k+1})$, logo $e^{-At} = (e^{-At/m})^m$ leva E_0 em $D(A)$ em $D(A^2)$ em $\dots$ em $D(A^m)$ e $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\|A^\alpha e^{-At}\|_{L(E_0)} \leq K \|Ae^{-At}\|_{L(E_0)}^\alpha \|e^{-At}\|_{L(E_0)}^{1-\alpha} \leq KMt^{-\alpha}$$

logo para $m = 0, 1, 2, \dots$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 < t \leq 1$

$$\begin{aligned} \|A^{m+\alpha} e^{-At}\|_{L(E_0)} &\leq \|A^\alpha e^{-At/(m+1)}\|_{L(E_0)} \|Ae^{-At/(m+1)}\|_{L(E_0)}^m \\ &\leq KM^{m+1} (m+1)^{m+\alpha} t^{-m-\alpha} \end{aligned}$$

2) Se $e \in D(A^m)$ para algum $m \geq \alpha > 0$, $t^\alpha A^\alpha e^{-At} e \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$ e $\|t^\alpha A^\alpha e^{-At}\|_{L(E_0)} \leq M_\alpha$ para $0 < t \leq 1$, logo o resultado vale para todo $e \in E_0$.

3) Para todo $e \in E_0$ temos que

$$\|(\mathbf{e}^{-At} - I)A^{-\alpha}e\|_{E_0} = \left\| - \int_0^t A^{1-\alpha} \mathbf{e}^{-As} e ds \right\|_{E_0} \leq \int_0^t M_{1-\alpha} s^{\alpha-1} \|e\|_{E_0} ds. \square$$

2.6 Potências Imaginárias Limitadas

Seja E um espaço de Banach. Um operador linear A em E é dito ter **potências imaginárias limitadas**, em símbolos,

$$A \in \mathcal{PIL} := \mathcal{PIL}(E),$$

se $A \in \mathcal{P}(E)$ e existe $\epsilon > 0$ e $M \geq 1$ tal que

$$A^{it} \in L(E) \quad \text{e} \quad \|A^{it}\|_{L(E)} \leq M, \quad -\epsilon \leq t \leq \epsilon.$$

O teorema a seguir mostra que esta hipótese tem consequências muito interessantes

Teorema 2.6.1 *Suponha que $A \in \mathcal{PIL}$. Então $\{A^z; \text{Re} z \leq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo sobre $L(E)$. Adicionalmente, $\{A^{it}; t \in \mathbb{R}\}$ é um grupo fortemente contínuo sobre E com gerador infinitesimal $i \log A$.*

Prova: Se $|t| \in [n\epsilon, (n+1)\epsilon]$ para algum $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\|A^{-s+it}x\| \leq \|A^{-s}(A^{isinal(t)\epsilon})^n A^{isinal(t)(|t|-n\epsilon)}\| \leq M^m M e^{\theta|t|} \|x\| \quad (2.27)$$

para $0 \leq s \leq m$ e $x \in D(A^1)$, onde $\theta = \epsilon^{-1} \log M \geq 0$. Portanto, da densidade de $D(A^2)$ em E

$$\|A^z\| \leq M^{1-\text{Re} z} M e^{\theta|\text{Im} z|}, \quad \text{Re} z \leq 0.$$

Disto e do Teorema 2.2.3 (v) e (vii), segue que $z \mapsto Z^z$ é um semigrupo fortemente contínuo em $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re} z \leq 0\}$. Agora utilizando o Teorema 2.2.3 (iii) e a densidade de $D(A^2)$ em E , vemos que $\{A^z, \text{Re} z \leq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo em E . Consequentemente, $\{A^{it}; t \in \mathbb{R}\}$ é um grupo fortemente contínuo em E .

No que se segue mostraremos que $i \log(A)$ é o gerador infinitesimal de A^{it} . Denote por B o gerador infinitesimal deste grupo e recorde que

$$Bx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{A^{it}x - x}{t}$$

se e somente se $x \in D(B)$. Como

$$\frac{A^{-s+i(t+\tau)}x - A^{-s+it}x}{\tau} = A^{-s+it} \frac{(A^{i\tau}x - x)}{\tau} \quad (2.28)$$

para $x \in E$, $s \geq 0$ e $t, \tau \in \mathbb{R}$ com $\tau \neq 0$, vemos que

$$BA^{-s+it}x = A^{-s+it}Bx = \frac{d}{dt}A^{-s+it}x \quad (2.29)$$

par $x \in D(B)$, $s \geq 0$ e $t \in \mathbb{R}$. Por outro lado, a analiticidade de A^{-z} para $\text{Re} z > 0$ implica

$$\frac{d}{ds}A^{-s+it}x = i \frac{d}{dt}A^{-s+it}x, \quad x \in E, \quad s > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como

$$\frac{d}{ds}A^{-s+it}x = \frac{d}{ds}A^{-s}A^{it}x = -\log(A)A^{-s}A^{-s+it}x$$

para $x \in E$, $s > 0$, e $t \in \mathbb{R}$, graças a $\text{Im}(A^{-s}) \subset D(\log(A))$, pelo Teorema 2.2.1 deduzimos de (2.28) e (2.29) que

$$(i \log(A))A^{-s+it}x = BA^{-s+it}x = A^{-s+it}Bx, \quad s > 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

para $x \in D(B)$. Portanto, se $x \in D(B)$,

$$(i \log(A))A^{-s}x = BA^{-s}x = A^{-s}Bx \rightarrow Bx, \quad \text{quando } s \rightarrow 0^+.$$

Como $i \log(A)$ é fechado e $D(\log(A)) \ni A^{-s}x \rightarrow x$ quando $s \rightarrow 0^+$ temos que $i \log(A) \supset B$. Por outro lado, como o argumento usado em (refEpilaux1) implica

$$BA^{-s+it}x = \frac{d}{dt}A^{-s+it}x, \quad x \in E, \quad s > 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

segue de (2.29) que, para $x \in D(\log(A))$,

$$iBA^{-s}x = A^{-s}(-\log(A))x \rightarrow -\log(A)x, \quad s \rightarrow 0^+.$$

Como B é fechado e $D(B) \supset A^{-s}x \rightarrow x$ vemos que $iBx = -\log(A)x$, $x \in D(\log(A))$; isto é, $B \supset i \log(A)$. Isto prova o teorema. $\square$

Corolário 2.6.1 *Suponha que $A \in \mathcal{PIL}$. Então existe uma constante $M \geq 1$ e $\theta \geq 0$ tal que*

$$\|A^{it}\|_{L(E)} \leq M e^{\theta|t|}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.30)$$

Prova: Segue da prova do teorema anterior fazendo $s = 0$ em (2.27).

Uma questão ainda não considerada é: Como mostrar que um determinado operador A está em $\mathcal{PIL}$? Esta é uma questão central na caracterização dos espaços X^α . Os teoremas a seguir, devido a Kato [13, 14], mostram que em espaços de Hilbert, sempre que A é gerador de um semigrupo fortemente contínuo com decaimento exponencial A tem potências imaginárias limitadas. Quando E não é um espaço de Hilbert os resultados conhecidos são muito pouco abrangentes.

Lema 2.6.1 *Assuma que A é do tipo $(\frac{\pi}{2}, M)$ em um espaço de Hilbert H e que $0 < \alpha < 1$. Para todo $\epsilon > 0$ temos que $I + \epsilon A$ é também do tipo $(\frac{\pi}{2}, M)$ de forma que $(I + \epsilon A)^\alpha$ existe e*

$$\|(I + \epsilon A)^{-\alpha}\| \leq M. \quad (2.31)$$

Prova: Para ver que $(I + \epsilon A)$ é do tipo $(\frac{\pi}{2}, M)$ note que

$$\|(s + (I + \epsilon A))^{-1}\| = \|(s + 1 + \epsilon A)^{-1}\| = \|\epsilon((s + 1)\epsilon^{-1} + A)^{-1}\| \leq \frac{M}{s + 1} \leq \frac{M}{s}. \quad (2.32)$$

Como $(I + \epsilon A)^{-1}$ é limitado (2.25) vale para $\lambda = 0$ se A é substituído por $I + \epsilon A$. Como $\|(\mu + I + \epsilon A)^{-1}\| \leq M(\mu + 1)^{-1}$, segue que

$$\|(I + \epsilon A)^{-\alpha}\| \leq \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty \mu^{-\alpha} M(\mu + 1)^{-1} d\mu = M. \square$$

É uma consequência direta da definição que $A + \epsilon$ é do tipo $(\frac{\pi}{2}, M)$ sempre que A é do tipo $(\frac{\pi}{2}, M)$.

Seja H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ um operador fechado, densamente definido. Definimos

$$\mathcal{H}_\alpha = \frac{A^\alpha + A^{*\alpha}}{2}, \quad \mathcal{K}_\alpha = \frac{A^\alpha - A^{*\alpha}}{2i}$$

Teorema 2.6.2 *Seja H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ um operador fechado, densamente definido e maximal acretivo com $0 \in \rho(A)$, então, para $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$*

$$D(A^\alpha) = D(A^{*\alpha}) = D(\mathcal{H}_\alpha) = D(\mathcal{K}_\alpha) = D_\alpha,$$

$\mathcal{H}_\alpha$ é auto-adjunto e não negativo, $\mathcal{K}_\alpha$ é anti-simétrico e para todo $u \in D_\alpha$

1. $\|K_\alpha u\| \leq \tan \frac{\pi\alpha}{2} \|\mathcal{H}_\alpha u\|,$
2. $(1 - \tan \frac{\pi\alpha}{2}) \|\mathcal{H}_\alpha u\| \leq \|A^\alpha u\| \leq (1 + \tan \frac{\pi\alpha}{2}) \|\mathcal{H}_\alpha u\|$
3. $\|A^{*\alpha} u\| \leq \tan \frac{\pi(1+2\alpha)}{4} \|A^\alpha u\|$
4. $\operatorname{Re} \langle A^\alpha u, A^{*\alpha} u \rangle \geq \cos \pi\alpha \|A^\alpha u\| \|A^{*\alpha} u\|$
5. $\operatorname{Re} \langle A^\alpha u, \mathcal{H}_\alpha u \rangle \geq \frac{(\cos \pi\alpha)^{\frac{1}{2}}}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \|A^\alpha u\| \|\mathcal{H}_\alpha u\|.$

O mesmo vale quando trocamos A^α por A^{α}.*

Prova: Primeiramente assuma que A é limitado e $\operatorname{Re} \langle Au, u \rangle \geq \delta \langle u, u \rangle$, $\delta > 0$ e $A^{-1} \in L(H)$. Então A^α está definido para todo número complexo α por

$$A^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

onde C é uma curva fechada, retificável e simples evitando o eixo real negativo e o zero. Segue que A^α é uma função inteira de α e o mesmo vale para $\mathcal{H}_\alpha$ e para $\mathcal{K}_\alpha$. Daí

$$\|\mathcal{H}_\alpha u\|^2 - \|\mathcal{K}_\alpha u\|^2 = \operatorname{Re} \langle A^\alpha u, A^{*\alpha} u \rangle = \operatorname{Re} \langle A^{\alpha+\bar{\alpha}} u, u \rangle \quad (2.33)$$

onde a última igualdade segue do fato que $A^{*\alpha*} = A^{\bar{\alpha}}$ e esta igualdade é obtida da seguinte forma: Para todo $u, v \in H$ e C simétrica relativamente ao eixo real temos

$$\begin{aligned} \langle u, A^{*\alpha} v \rangle &= \langle u, \frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda^\alpha (\lambda - A^*)^{-1} d\lambda v \rangle \\ &= \int_C \langle u, \frac{1}{2\pi i} \lambda^\alpha (\lambda - A^*)^{-1} v \rangle d\bar{\lambda} = \int_C \langle \frac{-1}{2\pi i} \bar{\lambda}^{\bar{\alpha}} ((\lambda - A^*)^{-1})^* u, v \rangle d\bar{\lambda} \\ &= \langle \int_{-C} \frac{1}{2\pi i} \bar{\lambda}^{\bar{\alpha}} ((\bar{\lambda} - A)^{-1}) u d\bar{\lambda}, v \rangle = \langle A^{\bar{\alpha}} u, v \rangle \end{aligned}$$

(na última integral a mudança de λ para $\bar{\lambda}$ inverte a orientação da curva) e $A^{*\alpha*} = A^{\bar{\alpha}}$. Segue que

$$\|\mathcal{K}_\alpha\| \leq \|\mathcal{H}_\alpha\|, \quad -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \alpha \leq \frac{1}{2}, \quad (2.34)$$

isto é óbvio para $0 \leq \operatorname{Re} \alpha \leq \frac{1}{2}$ pois A^β é acretivo se $0 \leq \beta \leq 1$ enquanto para $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \alpha \leq 0$ é suficiente mostrar que A^{-1} é acretivo e isto segue de

$$\operatorname{Re} \langle A^{-1} u, u \rangle = \operatorname{Re} \langle A^{-1} u, A A^{-1} u \rangle \geq \delta \|A^{-1} u\| \geq \delta \|A\|^{-2} \|u\| \geq 0 \quad (2.35)$$

e segue de (2.33) que

$$\|\mathcal{H}_\alpha u\|^2 \geq \operatorname{Re} \langle A^{2\xi} u, u \rangle \geq \delta^{2\xi} \|u\|^2, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad \xi = \operatorname{Re} \alpha$$

e de (2.35) temos que

$$\|\mathcal{H}_\alpha u\|^2 \geq \operatorname{Re}\langle A^{2\xi} u, u \rangle \geq (\delta \|A\|^{-2})^{2|\xi|} \|u\|^2 \quad -\frac{1}{2} \leq \xi \leq 0.$$

Estas desigualdades mostram que $\mathcal{H}_\alpha$ tem inversa limitada $\mathcal{H}_\alpha^{-1}$ para $|\operatorname{Re}\alpha| \leq \frac{1}{2}$. O domínio de $\mathcal{H}_\alpha^{-1}$ é H para $\alpha \in \mathbb{R}$ pois $\mathcal{H}_\alpha$ é auto-adjunto (auto-adjunto e coercivo é sobre). Como $\mathcal{H}_\alpha$ é contínuo em α segue que $\mathcal{H}_\alpha$ tem domínio H para todo α com $|\operatorname{Re}\alpha| \leq \frac{1}{2}$. E com isto (2.34) é equivalente a

$$\|\mathcal{K}_\alpha \mathcal{H}_\alpha^{-1}\| \leq 1, \quad |\operatorname{Re}\alpha| \leq \frac{1}{2}.$$

Agora considere a função

$$T(\alpha) = \frac{1}{\tan \frac{\pi\alpha}{2}} \mathcal{K}_\alpha \mathcal{H}_\alpha^{-1}.$$

$T(\alpha)$ é uma função analítica em $|\operatorname{Re}\alpha| \leq \frac{1}{2}$ pois $\mathcal{K}_\alpha$ tem um zero em $\alpha = 0$. Como $|\tan \frac{\pi\alpha}{2}| = 1$ para α na fronteira da faixa segue que $\|T(\alpha)\| \leq 1$ na fronteira da faixa e portanto na faixa inteira. Restringindo α a $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ temos que (1) vale e mais

$$\|\mathcal{K}_\alpha \mathcal{H}_\alpha^{-1}\| \leq |\tan \frac{\pi\alpha}{2}|, \quad |\operatorname{Re}\alpha| \leq \frac{1}{2}$$

e

$$\|\mathcal{K}_\alpha u\| \leq |\tan \frac{\pi\alpha}{2}| \|\mathcal{H}_\alpha u\|, \quad u \in H, \quad |\operatorname{Re}\alpha| \leq \frac{1}{2}.$$

A desigualdade (2), $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, segue de (1) notando que $A^\alpha = \mathcal{H}_\alpha + i\mathcal{K}_\alpha$ e (3) segue de (2) notando que $(1 + \tan \frac{\pi\alpha}{2})/(1 - \tan \frac{\pi\alpha}{2}) = \tan \frac{\pi(1+2\alpha)}{4}$. Para provar (4) substituímos $\mathcal{H}_\alpha = (A^\alpha + A^{*\alpha})/2$ e $\mathcal{K}_\alpha = (A^\alpha - A^{*\alpha})/(2i)$ em (1) para obter

$$\tan \frac{\pi\alpha}{2} \|(A^\alpha + A^{*\alpha})u\| \leq \|(A^\alpha - A^{*\alpha})u\|.$$

Elevando a expressão acima ao quadrado e simplificando obtemos

$$0 \leq (\cos^2 \frac{\pi\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\pi\alpha}{2})(\|A^\alpha u\|^2 + \|A^{*\alpha} u\|^2) - 2\operatorname{Re}\langle A^\alpha u, A^{*\alpha} u \rangle$$

e

$$2\operatorname{Re}\langle A^\alpha u, A^{*\alpha} u \rangle \geq \cos \pi\alpha (\|A^\alpha u\|^2 + \|A^{*\alpha} u\|^2) \geq 2\cos \pi\alpha \|A^\alpha u\| \|A^{*\alpha} u\|$$

o que prova (4). A prova de (5) é obtida substituindo $i\mathcal{K}_\alpha = A^\alpha - \mathcal{H}_\alpha$ em (1) o que nos dá

$$\|A^\alpha u - \mathcal{H}_\alpha u\| \leq \tan \frac{\pi\alpha}{2} \|\mathcal{H}_\alpha u\|$$

que quando elevada ao quadrado nos dá

$$\|A^\alpha u\|^2 - \langle A^\alpha u, \mathcal{H}_\alpha u \rangle - \langle \mathcal{H}_\alpha u, A^\alpha u \rangle + \|\mathcal{H}_\alpha u\|^2 \leq \tan^2 \frac{\pi\alpha}{2} \|\mathcal{H}_\alpha u\|^2$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\langle A^\alpha u, \mathcal{H}_\alpha u \rangle &\geq (1 - \tan^2 \frac{\pi\alpha}{2}) \|\mathcal{H}_\alpha u\|^2 + \|A^\alpha u\|^2 \\ &\geq 2(1 - \tan^2 \frac{\pi\alpha}{2})^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{H}_\alpha u\| \|A^\alpha u\| \\ &\geq 2 \frac{(\sin^2 \frac{\pi\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\pi\alpha}{2})^{\frac{1}{2}}}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \|\mathcal{H}_\alpha u\| \|A^\alpha u\| \\ &= 2 \frac{(\cos \pi\alpha)^{\frac{1}{2}}}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \|\mathcal{H}_\alpha u\| \|A^\alpha u\| \end{aligned}$$

e (5) segue.

Em seguida assuma que A é ilimitado mas ainda tem inversa limitada. Seja

$$J_n = (I + n^{-1}A)^{-1}, \quad A_n = AJ_n = n(I - J_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Então $\|J_n\| \leq 1$ para todo n pois A é do tipo $(\pi/2, 1)$. Portanto os A_n são também limitados e de

$$\langle A_n u, u \rangle = \langle AJ_n u, (I + n^{-1}A)J_n u \rangle = \langle AJ_n u, J_n u \rangle + n^{-1} \|AJ_n u\|^2$$

de onde concluímos que A_n é acretivo e

$$\|A_n u\| \|u\| \geq \langle Au, u \rangle \geq n^{-1} \|A_n u\|^2$$

o que implica $\|A_n\| \leq n$. Adicionalmente $A_n^{-1} = A^{-1} + n^{-1}I$ e A_n^{-1} , $n = 1, 2, 3, \dots$ é uniformemente limitada. Portanto as desigualdades (1) a (5) são válidas para A_n , $\mathcal{H}_{n\alpha}$ e $\mathcal{K}_{n\alpha}$. A seguir mostraremos as mesmas desigualdades para A tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ com as caracterizações necessárias dos domínios.

Para este fim, primeiramente note que

$$A_n^\alpha = A^\alpha J_n^\alpha \supset J_n^\alpha A^\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Aqui $J_n^\alpha = (I + n^{-1}A)^{-\alpha}$ que existe pois $I + n^{-1}A$ é maximal acretivo e a relação acima segue de $J_n^\alpha = (A^{-1}A_n)^\alpha = A^{-\alpha}A_n^\alpha = A_n^\alpha A^{-\alpha}$ que é uma simples consequência do cálculo operacional. Note ainda que

$$\|J_n^\alpha\| \leq 1 \quad \text{e} \quad J_n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

A desigualdade acima segue do Lema 2.6.1. Para verificar a igualdade acima note que

$$(I + n^{-1}A)^{-\alpha} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mu + I + n^{-1}A)^{-1}}{\mu} d\mu.$$

E como

$$n(\mu + 1)(n(\mu + 1) + A)^{-1} \frac{1}{\mu + 1} e \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu + 1} e$$

e

$$\left\| \frac{(\mu + 1 + A)^{-1}}{\mu^\alpha} \right\| \leq \frac{1}{(\mu + 1)\mu^\alpha},$$

segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$(I + n^{-1}A)^{-\alpha} e \rightarrow \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(\mu + 1)\mu^\alpha} d\mu e = e.$$

Suponha agora que $u \in D(A^\alpha)$ então $A_n^\alpha u = J_n^\alpha A^\alpha u$ e portanto

$$\|A_n^\alpha u\| \leq \|A^\alpha u\|, \quad n \geq 1$$

$$A_n^\alpha u \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A^\alpha u,$$

mas para $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$,

$$\|A_n^\alpha u\| \leq \tan \frac{\pi(1 + 2\alpha)}{4} \|A_n^\alpha\| \leq \tan \frac{\pi(1 + 2\alpha)}{4} \|A^\alpha u\|$$

pois (3) vale para A_n . Isto mostra que $\|A_n^\alpha u\|$ é limitada e portanto toda subsequência possui subsequência fracamente convergente. Ainda, para $v \in D(A^\alpha)$

$$\langle A_n^{*\alpha} u, v \rangle = \langle A_n^{*\alpha} u, v \rangle = \langle u, A_n^\alpha v \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle u, A^\alpha v \rangle$$

e portanto $A_n^{*\alpha}u \xrightarrow{w} f$ e $\langle f, v \rangle \langle u, A^\alpha v \rangle$, para todo $v \in D(A^\alpha)$. Isto implica que $u \in D(A^{*\alpha}) = D(A^{\alpha*})$ e $f = A^{*\alpha}u = A^{\alpha*}u$. O mesmo argumento acima mostra que $A_n^{*\alpha} \xrightarrow{s} A^{*\alpha}$. Em vista da relação simétrica entre A e A^* fica provado que $D(A^\alpha) = D(A^{*\alpha}) = D_\alpha$ e que $A_n^\alpha u \rightarrow A^\alpha u$, $A_n^{*\alpha} u \rightarrow A^{*\alpha} u$, para todo $u \in D_\alpha$.

Os operadores $\mathcal{H}_\alpha$ e $\mathcal{K}_\alpha$ definidos anteriormente tem domínio D_α e $\mathcal{H}_{n\alpha}u \rightarrow \mathcal{H}_\alpha u$, $\mathcal{K}_{n\alpha}u \rightarrow \mathcal{K}_\alpha u$, para todo $u \in D_\alpha$. Segue das desigualdades (1) a (5) para A_n^α , $A_n^{*\alpha}$, $\mathcal{H}_{n\alpha}$ e $\mathcal{K}_{n\alpha}$, $u \in D_\alpha$, tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, que as desigualdades (1) a (5) para A^α , $A^{*\alpha}$, $\mathcal{H}_\alpha$ e $\mathcal{K}_\alpha$ valem para $u \in D_\alpha$. $\square$

Observação 2.6.1 *O teorema acima é devido a Kato que em [13] prova uma versão mais geral do resultado acima, sem a hipótese de $0 \in \rho(A)$.*

Teorema 2.6.3 *Seja A um operador limitado e maximal acretivo em um espaço de Hilbert H . Então A^α pode ser estendido a α complexo de forma que seja analítico para $\operatorname{Re} \alpha > 0$ e*

$$\|A^\alpha\| \leq \frac{\sin \pi \xi'}{\pi \xi' (1 - \xi')} \|A\|^\xi e^{\pi \frac{|\eta|}{2}} \leq \frac{4}{\pi} \|A\|^\xi \|e^{\pi \frac{|\eta|}{2}}\|, \quad \alpha = \xi + i\eta, \quad \xi' = \xi - [\xi]. \quad (2.36)$$

Se A não tem autovalor nulo A^α pode ser estendido a $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$ de forma que A^α é fortemente contínuo e (2.36) vale para $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$. Em particular $A^{i\eta}$ é um semigrupo fortemente contínuo em η com $\|A^{i\eta}\| \leq e^{\pi \frac{|\eta|}{2}}$.

Prova: As potências A^α de A podem ser definidas para $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$ por

$$A^\alpha = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} A(\lambda + A)^{-1} d\lambda.$$

Já vimos que A^α é analítica para $\operatorname{Re} \alpha > 0$ e que $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$ para α e β com parte real positiva. Segue que, para $0 < \xi < 1$

$$\begin{aligned} \|A^\xi\| &\leq \frac{\sin \pi \xi}{\pi} \left\{ \int_0^{\|A\|} \lambda^{\xi-1} d\lambda + \|A\| \int_{\|A\|}^\infty \lambda^{\xi-2} d\lambda \right\} \leq \frac{\sin \pi \xi}{\pi} \left\{ \frac{\|A\|^\xi}{\xi} + \frac{\|A\|^\xi}{1-\xi} \right\} \\ &= \frac{\sin \pi \xi}{\pi} \frac{\|A\|^\xi}{\xi(1-\xi)} \leq \frac{4}{\pi} \|A\|^\xi \end{aligned}$$

onde usamos que $\|A(\lambda + A)^{-1}\| \leq \min(1, \lambda^{-1}\|A\|)$. Assuma por um instante que $\operatorname{Re} A \geq \delta > 0$ de forma que A^α está definido para todo α complexo e mostremos que

$$\|A^{it}\| \leq e^{\pi \frac{|\eta|}{2}}. \quad (2.37)$$

Disto (2.36) notando que $A^\alpha = A^{\xi+i\eta} = A^{[\xi]} A^{\xi'} A^{i\eta}$.

O caso geral segue substituindo A por $A + \epsilon$ e fazendo $\epsilon \rightarrow 0$.

Para mostrar (2.37) observe que $A^\alpha = \mathcal{H}_\alpha + i\mathcal{K}_\alpha$ e $A^{*\alpha} = \mathcal{H}_\alpha - i\mathcal{K}_\alpha$, $\|\mathcal{K}_\alpha \mathcal{H}_\alpha^{-1}\| \leq |\tan \frac{\pi \alpha}{2}|$. Portanto

$$\|A^{*\alpha} A^{-\alpha}\| \leq \frac{1 + |\tan \frac{\pi \alpha}{2}|}{1 - |\tan \frac{\pi \alpha}{2}|}$$

que para $\alpha = i\eta$ nos dá

$$\|A^{i\eta}\|^2 \leq \|A^{*-i\eta} A^{i\eta}\| \leq e^{\pi |\eta|} \quad (2.38)$$

provando (2.37). Aqui usamos que

$$\langle A^{*-i\eta} A^{i\eta} u, u \rangle = \langle A^{i\eta} u, A^{*-i\eta} u \rangle = \|A^{i\eta} u\|^2$$

para concluir a primeira igualdade em (2.38) e

$$\tan \pi \frac{i\eta}{2} = \frac{e^{\pi \frac{-\eta}{2}} - e^{\pi \frac{+\eta}{2}}}{e^{\pi \frac{-\eta}{2}} + e^{\pi \frac{\eta}{2}}}$$

e

$$1 + \left| \tan \pi \frac{i\eta}{2} \right| = \frac{2e^{-\pi \frac{\eta}{2}}}{e^{-\pi \frac{\eta}{2}} + e^{+\pi \frac{\eta}{2}}}, \quad 1 - \left| \tan \pi \frac{i\eta}{2} \right| = \frac{2e^{\pi \frac{\eta}{2}}}{e^{-\pi \frac{\eta}{2}} + e^{+\pi \frac{\eta}{2}}}$$

e

$$\frac{1 + \left| \tan \pi \frac{i\eta}{2} \right|}{1 - \left| \tan \pi \frac{i\eta}{2} \right|} = e^{\pi|\eta|}.$$

Mostremos que $\alpha \rightarrow A^\alpha$ é contínuo para $u \in H$, $\alpha \in \{\xi + i\eta \in C : 0 < \xi \leq 1, |\eta| \leq R\}$. Como A^α é limitado para $\alpha \in D$ por (2.36) é suficiente mostra isto para um denso de H . Se A não tem autovalor nulo a imagem de A é densa como mostra o lemma a seguir, logo é suficiente mostrar que isto vale para $u = Av$. Então $A^\alpha u = A^{1+\alpha}v$ e isto é obviamente uniformemente contínuo em D . $\square$

Lema 2.6.2 *Seja A fechado e maximal acretivo em um espaço de Hilbert H , então*

$$H = \overline{D(A)}.$$

Se A é fechado e maximal acretivo e 0 não é um auto-valor de A então $\overline{R(A)} = H$.

Prova: Basta ver que se A é fechado e maximal acretivo então do Teorema 1.3.4, A tem domínio denso. A segunda afirmativa segue do fato que se A é fechado, maximal acretivo e 0 não é um autovalor de A então sua inversa sobre a imagem é um operador fechado e maximal acretivo. $\square$

Capítulo 3

Teoremas de Perturbação de Geradores

3.1 Geradores de Semigrupos Fortemente Contínuos

Nesta seção estudamos que tipos de operadores podem ser adicionados a geradores de semigrupos fortemente contínuos de forma que o resultado ainda seja o gerador de um semigrupo fortemente contínuo.

Teorema 3.1.1 *Seja $\{e^{At}, t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo em E_0 com gerador A e $B \in L(E_0)$. Então $A+B : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{e^{(A+B)t}, t \geq 0\}$. Se $\|e^{At}\|_{L(E_0)} \leq Me^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$, então*

$$\|e^{(A+B)t}\|_{L(E_0)} \leq Me^{(\omega+M\|B\|_{L(E_0)})t}, \quad t \geq 0.$$

Prova: De acordo com o Lema 1.2.1, podemos escolher uma norma $|\cdot|_{E_0}$ em E_0 tal que

$$\|\cdot\|_{E_0} \leq |\cdot|_{E_0} \leq M\|\cdot\|_{E_0}$$

e

$$|(\lambda - A)^{-1}|_{E_0} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}$$

para $\lambda > \omega$. Se $\lambda > \omega + \|B\|_{L(E_0)}$ então

$$|B(\lambda - A)^{-1}| \leq \|B\|_{L(E_0)} / (\lambda - \omega) < 1$$

e $I - B(\lambda - A)^{-1}$ é um isomorfismo em $L(E_0)$. Logo

$$\lambda - A - B = [I - B(\lambda - A)^{-1}](\lambda - A) : D(A) \rightarrow E_0$$

é também um isomorfismo e

$$|(\lambda - A - B)^{-1}|_{E_0} \leq \frac{1}{\lambda - \omega} \frac{1}{1 - \|B\|_{L(E_0)} / (\lambda - \omega)} = \frac{1}{\lambda - (\omega + \|B\|_{L(E_0)})}.$$

Do Teorema de Hille-Yosida, $A+B$ gera um semigrupo fortemente contínuo com $|e^{(A+B)t}|_{E_0} \leq e^{\omega + \|B\|t}$ para $t \geq 0$. Retornando a norma original temos a estimativa desejada. $\square$

Agora estaremos interessados nas relações entre o semigrupo $\{e^{At}; t \geq 0\}$ e o semigrupo $\{e^{(A+B)t}; t \geq 0\}$. Para este fim consideramos o operador $H(s) = e^{A(t-s)}e^{(A+B)s}$. Para $e \in D(A) = D(A+B)$, $s \mapsto H(s)e$ é diferenciável e $H'(s)e = e^{A(t-s)}Be^{(A+B)s}e$. Integrando $H'(s)e$ de 0 até t obtemos

$$e^{(A+B)t}e = e^{At}e + \int_0^t e^{A(t-s)}Be^{(A+B)s}eds, \quad e \in D(A).$$

Como os operadores em ambos os lados da expressão acima são limitados ela vale para todo $e \in E_0$. O semigrupo $\{e^{(A+B)t}; t \geq 0\}$ é portanto a solução da equação integral acima. Para tal equação integral temos:

Proposição 3.1.1 *Seja $\{e^{At}; t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados satisfazendo $\|e^{At}\|_{L(E_0)} \leq M e^{\omega t}$ e $B \in L(E_0)$. Então existe uma única família $\{V(t); t \geq 0\} \subset L(E_0)$ tal que $t \mapsto V(t)e$ é contínua em $[0, \infty)$ para todo $e \in E_0$ e*

$$V(t)e = e^{At}e + \int_0^t e^{A(t-s)}BV(s)eds, \quad e \in E_0. \quad (3.1)$$

Prova: Faça

$$V_0(t) = e^{At}$$

e defina $V_n(t)$ indutivamente por

$$V_{n+1}(t)e = \int_0^t e^{A(t-s)}BV_n(s)eds, \quad e \in E_0, n \geq 0.$$

Desta definição é óbvio que $t \mapsto V_n(t)e$ é contínua para $e \in E_0, t \geq 0, n \geq 0$. A seguir provamos por indução que,

$$\|V(t)\|_{L(E_0)} \leq M e^{\omega t} \frac{M^n \|B\|_{L(E_0)}^n t^n}{n!}.$$

De fato, isto vale para $n = 0$. Assuma que vale para n . Então temos que

$$\begin{aligned} \|V_{n+1}(t)e\|_{E_0} &\leq \int_0^t M e^{\omega(t-s)} \|B\|_{L(E_0)} \frac{M^n \|B\|_{L(E_0)}^n s^n}{n!} \|e\|_{E_0} ds \\ &= M e^{\omega t} \frac{M^{n+1} \|B\|_{L(E_0)}^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!} \|e\|_{E_0} \end{aligned}$$

e portanto a desigualdade vale para qualquer $n > 0$. Definindo

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t),$$

segue que a série converge uniformemente em intervalos limitados na topologia uniforme de operadores. Portanto $t \mapsto V(t)e$ é contínua para cada $e \in E_0$ e adicionalmente (3.1) está satisfeita. Isto conclui a prova da existência. Para provar a unicidade seja $\{U(t); t \geq 0\} \subset L(E_0)$ tal que $t \mapsto U(t)e$ é contínua para todo $e \in E_0$ e

$$U(t)e = e^{At}e + \int_0^t e^{A(t-s)}BU(s)eds, \quad e \in E_0. \quad (3.2)$$

Subtraindo as expressões (3.1) e (3.2) e estimando as diferenças obtemos

$$\|V(t)e - U(t)e\|_{E_0} = \int_0^t M e^{\omega(t-s)} \|B\|_{L(E_0)} \|V(s)e - U(s)e\|_{E_0} ds, \quad e \in E_0.$$

o que pela desigualdade de Gronwal implica que $\|V(t)e - U(t)e\|_{E_0} = 0, t \geq 0$ e portanto $V(t) = U(t)$. $\square$

Segue imediatamente do teorema anterior que

$$e^{(A+B)t} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t)$$

onde $S_0(t) = \mathbf{e}^{At}$,

$$S_{n+1}(t)e = \int_0^t \mathbf{e}^{A(t-s)} B S_n(s) e ds, \quad e \in E_0,$$

e a convergência da série é na topologia de operadores uniformemente para t em intervalos limitados de $\mathbb{R}$.

Para a diferença entre $\mathbf{e}^{At}$ e $\mathbf{e}^{(A+B)t}$ temos:

Corolário 3.1.1 *Seja A o gerador de um semigrupo fortemente contínuo satisfazendo $\|\mathbf{e}^{At}\|_{L(E_0)} \leq M \mathbf{e}^{\omega t}$. Seja $B \in L(E_0)$. Então*

$$\|\mathbf{e}^{(A+B)t} - \mathbf{e}^{At}\|_{L(E_0)} \leq M \mathbf{e}^{\omega t} (\mathbf{e}^{M\|B\|_{L(E_0)}t} - 1).$$

O teorema a seguir mostra que sob certas condições a soma, $-(A+B)$, de dois geradores de semigrupos fortemente contínuos que comutam, $-A$ e $-B$, resulta em um gerador de um semigrupo fortemente contínuo $\mathbf{e}^{-(A+B)t}$ que satisfaz $\mathbf{e}^{-(A+B)t} = \mathbf{e}^{-At} \mathbf{e}^{-Bt}$.

Teorema 3.1.2 *Assuma que $-A$ e $-B$ são geradores de semigrupos fortemente contínuos de operadores $\{\mathbf{e}^{-At}, t \geq 0\}$ e $\{\mathbf{e}^{-Bt}, t \geq 0\}$ tais que, para algum $M > 0$, $\|\mathbf{e}^{-At}\|_{L(E)} \leq M$ e $\|\mathbf{e}^{-Bt}\|_{L(E)} \leq M$. Assuma também que A e B comutam, que o operador $A+B$ é fechado, densamente definido com domínio $D(A) \cap D(B)$ e que $\lambda \in \rho(-A-B)$ para algum $\lambda > 0$. Então $-A-B$ gera um semigrupo fortemente contínuo de operadores tal que $\mathbf{e}^{-(A+B)t} = \mathbf{e}^{-At} \mathbf{e}^{-Bt}$ e que $\|\mathbf{e}^{-(A+B)t}\|_{L(E)} \leq M^2$.*

Prova: Por um momento vamos mudar a norma do espaço de Banach E de forma que $-A$ gera um semigrupo fortemente contínuo de contrações. Seja $-A_\lambda = -\lambda A(\lambda + A)^{-1}$ e $-B_\lambda = -\lambda B(\lambda + B)^{-1}$. Então $\|\mathbf{e}^{-A_\lambda t}\| \leq 1$ para todo $\lambda > 0$ e como $\mathbf{e}^{-A_\lambda t} e \rightarrow \mathbf{e}^{-At} e$ e $\mathbf{e}^{-B_\lambda s} e \rightarrow \mathbf{e}^{-Bs} e$ para todo $e \in E$, $s, t \geq 0$, temos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbf{e}^{-A_\lambda t - B_\lambda s} e = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbf{e}^{-A_\lambda t} \mathbf{e}^{-B_\lambda s} e = \mathbf{e}^{-At} \mathbf{e}^{-Bs} e.$$

É claro que isto continua verdadeiro se mudamos a norma do espaço para a norma original. Ainda, por um argumento similar, temos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbf{e}^{-B_\lambda t - A_\lambda s} e = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbf{e}^{-B_\lambda s} \mathbf{e}^{-A_\lambda t} e = \mathbf{e}^{-Bs} \mathbf{e}^{-At} e,$$

mostrando que $\mathbf{e}^{-At} \mathbf{e}^{-Bs} = \mathbf{e}^{-Bs} \mathbf{e}^{-At}$.

Em seguida vamos mostrar que $T(t) = \mathbf{e}^{-At} \mathbf{e}^{-Bt}$ é um semigrupo fortemente contínuo com gerador $-(A+B)$. Primeiro observe que a continuidade forte em $t = 0$ e a limitação são óbvias e de

$$T(t+s) = \mathbf{e}^{-A(t+s)} \mathbf{e}^{-B(t+s)} = \mathbf{e}^{-At} \mathbf{e}^{-As} \mathbf{e}^{-Bt} \mathbf{e}^{-Bs} = \mathbf{e}^{-At} \mathbf{e}^{-Bt} \mathbf{e}^{-As} \mathbf{e}^{-Bs} = T(t)T(s)$$

temos que $T(t)$ é um semigrupo. Resta mostrar que $-(A+B)$ é o gerador de $T(t)$.

Se $e \in D(A) \cap D(B) = D(A+B)$, então

$$\begin{aligned} T(t)e - e &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\mathbf{e}^{-tA_\lambda} \mathbf{e}^{-tB_\lambda} e - e) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\mathbf{e}^{-A_\lambda t} \mathbf{e}^{-B_\lambda t} e - \mathbf{e}^{-B_\lambda t} e + \mathbf{e}^{-B_\lambda t} e - e) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{e}^{-A_\lambda s} \mathbf{e}^{-B_\lambda t} (-A_\lambda e) ds + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{e}^{-B_\lambda s} (-B_\lambda e) ds \\ &= \int_0^t \mathbf{e}^{-As} \mathbf{e}^{-Bt} (-Ae) ds + \int_0^t T(s) (-Be) ds. \end{aligned}$$

Agora

$$\frac{1}{t} (T(t)e - e) = \int_0^t \mathbf{e}^{-As} \mathbf{e}^{-Bt} (-Ae) ds + \int_0^t T(s) (-Be) ds \rightarrow -(A+B)e \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+,$$

para todo $e \in D(A) \cap D(B) = D(A+B)$. Portanto o gerador $-C$ de $T(t)$ deve ser uma extensão de $-(A+B)$. Seja λ um número real no resolvente de $A+B$ e no resolvente do gerador de $T(t)$. Então

$$E = (\lambda + (A+B))D(A+B) = (\lambda + C)D(C),$$

e $A+B = C$ completando a prova. $\square$

Corolário 3.1.2 *Assuma que $-A$ e $-B$ são geradores de semigrupos fortemente contínuos de operadores $\{e^{-At}, t \geq 0\}$ e $\{e^{-Bt}, t \geq 0\}$ tais que, para algum $M > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\|e^{-At}\|_{L(E)} \leq Me^{\alpha t}$ e $\|e^{-Bt}\|_{L(E)} \leq Me^{\beta t}$. Assuma também que A e B comutam, que o operador $A+B$ é fechado, densamente definido com domínio $D(A) \cap D(B)$ e que $\lambda \in \rho(-A-B)$ para algum $\lambda > 0$. Então $-A-B$ gera um semigrupo fortemente contínuo de operadores tal que $e^{-(A+B)t} = e^{-At}e^{-Bt}$ e que $\|e^{-(A+B)t}\|_{L(E)} \leq M^2 e^{(\alpha+\beta)t}$.*

Prova: Basta aplicar o Teorema 3.1.2 aos operadores $-(A+\alpha)$ e a $-(B+\beta)$. $\square$

3.2 Perturbação de Operadores Setoriais

Teorema 3.2.1 *Seja $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ tal que $-A$ é setorial. Então A gera um semigrupo analítico. Seja $B : D(B) \subset E_0 \rightarrow E_0$, $D(B) \supset D(A)$, um operador linear tal que*

$$\|Be\|_{E_0} \leq \epsilon \|Ae\|_{E_0} + K\|e\|_{E_0}, \quad \forall e \in D(A),$$

para algum $\epsilon > 0$ e alguma constante K . Então, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 \leq \epsilon \leq \delta$, o operador $-(A+B)$ é setorial, $D(A+B) = D(A)$, e $\{e^{(A+B)t}; t \geq 0\}$ é um semigrupo analítico.

Prova: Sabemos que existem números reais a, φ, C , $\pi/2 < \varphi \leq \pi$, tais que para $|\arg(\lambda - a)| < \varphi$, λ está no resolvente de A e $\|(\lambda - A)^{-1}\|_{L(E_0)} \leq C/|\lambda - a|$. Escolha $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon(C+1) < 1$ e θ tal que $\epsilon(C+1) < \theta < 1$. Para tal λ , $B(\lambda - A)^{-1} \in L(E_0)$ e

$$\begin{aligned} \|B(\lambda - A)^{-1}\|_{L(E_0)} &\leq \epsilon \|A(\lambda - A)^{-1}\|_{L(E_0)} + K\|(\lambda - A)^{-1}\|_{L(E_0)} \\ &\leq \epsilon \left(1 + \frac{C|\lambda|}{|\lambda - a|}\right) + \frac{KC}{|\lambda - a|} \end{aligned}$$

que é menor ou igual a θ para $|\lambda - a| \geq R$, para algum R suficientemente grande. Segue que $|\arg(\lambda - a)| < \varphi$, $|\lambda - a| \geq R$ implica $\lambda \in \rho(A+B)$ e

$$\|(\lambda - (A+B))^{-1}\|_{L(E_0)} \leq \frac{C/(1-\theta)}{|\lambda - a|}.$$

Disto, é fácil obter que $-(A+B)$ é setorial. $\square$

Observação 3.2.1 *No Teorema 3.2.1, observamos que*

$$\|e^{(A+B)t}\|_{L(E_0)} \leq M e^{(\omega + \Lambda(K))t},$$

$\lim_{K \rightarrow 0} \Lambda(K) = 0$. Observamos também que o caso $\epsilon = 0$ corresponde a perturbação de um operador setorial por um operador limitado.

Corolário 3.2.1 *Se A e B e δ são como no Teorema 3.2.1, $K = 0$ e $\|e^{At}\|_{L(E_0)} \leq M$, $t \geq 0$ então*

$$\|e^{(A+B)t}\|_{L(E_0)} \leq M', \quad t \geq 0.$$

Corolário 3.2.2 *Seja A um operador setorial e $B : D(B) \subset E_0 \rightarrow E_0$ um operador fechado, $D(B) \supset D(A^\alpha)$, para algum $0 < \alpha < 1$. Então $A + B$ é setorial.*

Prova: Como $D(B) \supset D(A^\alpha)$ temos que $D(B) \supset D(A)$. Segue do Corolário 2.4.2 que

$$\|Bx\|_{E_0} \leq C(\mu^\alpha \|e\|_{E_0} + \mu^{\alpha-1} \|Ax\|_{E_0}), \quad e \in D(A), \quad \mu > 0.$$

Escolhendo $\mu > 0$ grande o resultado segue do Teorema 3.2.1. $\square$

3.3 Teoremas de Representação

No que se segue apresentamos teoremas que permitam obter informações sobre o semigrupo gerado pela soma $-(A + B)$ de dois geradores, $-A$ e $-B$, de semigrupos fortemente contínuos. Estes resultados serão de grande valia para transferir propriedades dos semigrupos gerados por $-A$ e $-B$ para o semigrupo gerado por $-(A + B)$. Estes resultados são consequência dos resultados de Trotter and Chernoff em [21, 8] e a apresentação abaixo segue [18].

O resultado acima está intimamente relacionado aos seguintes resultados:

Proposição 3.3.1 *Assuma que $-A$ e $-B$ são geradores de semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares, $D(A) \cap D(B)$ é denso em E e*

$$\|(\mathbf{e}^{-At} \mathbf{e}^{-Bt})^n\| \leq M \mathbf{e}^{\omega nt}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

para algum $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$. Se para algum λ com $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ a imagem de $\lambda I + A + B$ é densa em E , então o fecho de $-(A + B)$ é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares $\{T(t); t \geq 0$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq M \mathbf{e}^{\omega t}$, $t \geq 0$. Adicionalmente,

$$T(t)e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\mathbf{e}^{-A(\frac{t}{n})} \mathbf{e}^{-B(\frac{t}{n})} \right)^n e, \quad e \in E,$$

uniformly in bounded subsets of $\mathbb{R}^+$.

Proposição 3.3.2 *Se $-A$, $-B$, $-(A + B)$ geram semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares, $\|\mathbf{e}^{-(A+B)t}\| \leq M \mathbf{e}^{\omega t}$, $t \geq 0$, e*

$$\|[(I + tA)^{-1}(I + tB)^{-1}]^n\| \leq M \mathbf{e}^{\omega nt}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

então

$$\mathbf{e}^{-(A+B)t}e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(I + \frac{t}{n}A \right)^{-1} \left(I + \frac{t}{n}B \right)^{-1} \right]^n e, \quad e \in E.$$

Para uma prova das proposições acima veja [18], §3.5.

Capítulo 4

Positividade

O objetivo deste capítulo é tornar simples a verificação de condições suficientes para que soluções de problemas lineares com dado inicial “positivo” permaneçam positivas enquanto existirem. Estes resultados são a base dos critérios abstratos de comparação e positividade que serão desenvolvidos posteriormente e aplicados à equações parabólicas semilineares e a equações diferenciais ordinárias.

4.1 Espaços de Banach Ordenados e Positividade

Para que métodos de comparação possam ser desenvolvidos, vamos introduzir as propriedades básicas que uma ordem deve satisfazer em um Espaço de Banach.

Definição 4.1.1 *Um espaço de Banach **pré-ordenado** é um par $(X, \leq)$, onde X é um espaço de Banach e $\leq$ é uma relação em X que satisfaz:*

- i) $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$, $x, y, z \in X$.*
- ii) $x \leq y$ e $y \leq z$ implicam $x \leq z$.*
- iii) $x \leq y$ implica $\lambda x \leq \lambda y$, para $x, y \in X$, e número real $\lambda \geq 0$.*
- iv) O “cone positivo” $C = \{x \in X, x \geq 0\}$ é fechado em X .*

Se ainda,

$$C \cap -C = \{0\},$$

dizemos que X é um espaço de Banach **ordenado**

Observação 4.1.1

1. Observe que $x \leq y$ é equivalente a $y - x \geq 0$. Observe ainda que $x \leq 0$ se e somente se $0 \leq -x$ e que o cone C é convexo. Note ainda que se $\lambda < \mu$ e $x \geq 0$ então $0 \leq (\mu - \lambda)x$ e $\lambda x \leq \mu x$.
2. Todo subespaço fechado de um espaço de Banach ordenado é também um espaço de Banach ordenado com a ordem induzida.
3. Se $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ são espaços de Banach ordenados, então $X \times Y$ com a ordem definida por $(a, b) \leq_{X \times Y} (x, y)$ se e somente se $a \leq_X x$ e $b \leq_Y y$, é um espaço de Banach ordenado.
4. Para $1 \leq p \leq \infty$, $X = L^p(\Omega)$, com a ordem “ $f \leq g$ se e somente se $f(x) \leq g(x)$ quase sempre” é espaço de Banach pré-ordenado.

Definiremos agora o que entendemos por transformações que preservam ordem.

Definição 4.1.2 *Sejam $(X, \leq)$ $(Y, \preceq)$ espaços de Banach pré-ordenados. Uma função $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ é dita **crescente** se e somente se $x \leq y$, $x, y \in D(T)$, implica $T(x) \preceq T(y)$ e é chamada **positiva** se e somente se $x \leq 0$, $x \in D(T)$, implica $T(x) \preceq 0$.*

Observação 4.1.2 *Se na definição acima T é linear então ambos conceitos coincidem.*

Lema 4.1.1 *Seja $(X, \leq)$ um espaço de Banach pré-ordenado e $f \in L^1((t_0, t_1), X)$, tal que $f(t) \geq 0$ para quase todo $t \in (t_0, t_1)$. Então, $\int_{t_0}^{t_1} f(s) ds \geq 0$.*

Prova: Como a integral é um operador linear contínuo entre $L^1((t_0, t_1), X)$ e X e o cone C é fechado, é suficiente provar o resultado para f em um subconjunto denso de $L^1((t_0, t_1), X)$. Se $f \in C([t_0, t_1], X)$, e $t_0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = t_1$ é uma partição de $[t_0, t_1]$, com $n(a_i - a_{i-1}) = t_1 - t_0$, $0 \leq i \leq n$, $\zeta_i \in [a_{i-1}, a_i]$, então

$$\int_{t_0}^{t_1} f(s) ds = (t_1 - t_0) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \frac{(t_i - t_{i-1})}{(t_1 - t_0)} \in (t_1 - t_0) \overline{\text{co}}(f([t_0, t_1])),$$

onde

$$\overline{\text{co}}(f([t_0, t_1]))$$

é o fecho da envoltória convexa da imagem de f . Se $f(t) \geq 0$, para todo t , então sua imagem está em C e então $\overline{\text{co}}(f([t_0, t_1])) \subset C$, pois C é convexo, fechado e $\overline{\text{co}}(f([t_0, t_1]))$ é o menor convexo fechado contendo $\{f(t) : t \in [t_0, t_1]\}$. $\square$

Definição 4.1.3 *Seja $(X, \leq)$ um espaço de Banach real pré-ordenado. Podemos definir uma ordem “ $\preceq$ ” (que chamaremos ordem dual) no dual X' de X da seguinte forma: Dados $x', y' \in X'$ dizemos que $x' \preceq y'$ se e somente se*

$$\langle x', x \rangle_{X', X} \leq \langle y', x \rangle_{X', X}, \quad \forall 0 \leq x \in X$$

Temos que $(X', \preceq)$ é um espaço de Banach pré-ordenado.

As propriedades i), ii), iii) de espaços de Banach pré-ordenados são facilmente verificadas. A propriedade iv) é verificada da seguinte forma: Seja $0 \leq x'_n \in X'$ uma seqüência convergente para $x' \in X'$. Então, se $0 \leq x \in X$, $0 \leq \langle x'_n, x \rangle_{X', X} \rightarrow \langle x', x \rangle_{X', X}$ e $0 \leq \langle x', x \rangle_{X', X}$. Segue que $0 \leq x'$.

Definição 4.1.4 *Seja $(X, \leq)$ um espaço de Banach real pré-ordenado e seja “ $\preceq$ ” a ordem dual em X' . Dizemos que “ $\leq$ ” e “ $\preceq$ ” são compatíveis se*

$$\langle x', x \rangle_{X', X} \geq 0, \quad \forall 0 \leq x' \in X' \Rightarrow x \geq 0.$$

Consideremos o espaço $L^q(\Omega)$, $q \geq 1$ com a ordem natural e q' tal que $1/q + 1/q' = 1$. A ordem dual em $(L^q(\Omega))' = L^{q'}(\Omega)$, coincide com a ordem natural de $L^{q'}(\Omega)$. De fato, pois se $x', y' \in (L^q(\Omega))'$, temos:

$$\begin{aligned} x' \preceq y' &\Leftrightarrow \langle x', x \rangle_{((L^q(\Omega))', L^q(\Omega))} \leq \langle y', x \rangle_{((L^q(\Omega))', L^q(\Omega))}, \quad \forall 0 \leq x \in L^q(\Omega) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \langle y', x \rangle_{((L^q(\Omega))', L^q(\Omega))} - \langle x', x \rangle_{((L^q(\Omega))', L^q(\Omega))}, \quad \forall 0 \leq x \in L^q(\Omega) \\ &\Leftrightarrow \int_{\Omega} (y' - x')x \geq 0, \quad \forall 0 \leq x \in L^q(\Omega) \\ &\Leftrightarrow y' - x' \geq 0, \quad \text{em quase toda parte} \\ &\Leftrightarrow x' \leq y', \quad \text{em quase toda parte.} \end{aligned}$$

Temos também que a ordem de $L^q(\Omega)$ é compatível com a ordem dual de $(L^q(\Omega))'$. Isto é um conseqüência do fato que se $v \in L^{q'}(\Omega)$, então

$$\int_{\Omega} u(x)v(x)dx \geq 0 \quad \forall u \in L^q(\Omega), \quad 0 \leq u(x), \text{ q.s. em } \Omega \iff v(x) \geq 0 \text{ q.s. em } \Omega.$$

Lema 4.1.2 *Suponha que X é um espaço de Banach reflexivo e X' o seu dual. Seja $\leq$ uma ordem em X , " $\preceq$ " a ordem dual em X' . Se " $\leq$ " e " $\preceq$ " são compatíveis. Então a ordem definida em X'' por " $\preceq$ " coincide com a ordem " $\leq$ " de X quando os espaços X e X'' são identificados.*

Prova: Temos que x'' é menor ou igual a y'' relativamente a ordem induzida em X'' pela ordem de X' se e somente se

$$\langle x'', x' \rangle_{X'', X'} \preceq \langle y'', x' \rangle_{X'', X'}, \quad \forall 0 \preceq x' \in X'$$

E quando identificamos X e X'' temos

$$\langle x', x \rangle_{X', X} = \langle x'', x' \rangle_{X'', X'} \leq \langle y'', x' \rangle_{X'', X'} = \langle x', y \rangle_{X', X}, \quad \forall 0 \preceq x' \in X'.$$

o que implica,

$$0 \leq \langle x', y - x \rangle_{X', X}, \quad \forall 0 \preceq x' \in X'$$

E como " $\leq$ " e " $\preceq$ " são compatíveis segue que $x \leq y$. $\square$

Lema 4.1.3 *Sejam $(E, \leq_E)$ e $(F, \leq_F)$ espaços de Banach pré-ordenados e $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ uma transformação linear positiva tal que $\overline{D(A)} = E$. Se C denota o cone positivo de E , assumamos que $D(A) \cap C$ é denso em C . Então $A' : D(A') \subset F' \rightarrow E'$ é uma transformação linear positiva.*

Prova: Note que A é densamente definida e portanto A' está bem definida. Como A é positiva temos que $0 \leq_F Au$ sempre que $0 \leq_E u$ e $u \in D(A)$. Assim se $v \in D(A')$, $0 \leq_{F'} v'$ então da definição de A' e de ordem dual em F' obtemos que

$$0 \leq \langle Au, v' \rangle_{F, F'} = \langle u, A'v' \rangle_{E, E'}.$$

Portanto, temos que para $0 \leq_E u$ e $u \in D(A)$, $0 \leq \langle u, A'v' \rangle_{E, E'}$. Segue da densidade de $C \cap D(A)$ em C que $0 \leq_{E'} A'v' \square$

4.2 A Equação Linear

Os resultados a seguir estabelecem a equivalência entre a positividade do resolvente do gerador de um semigrupo e a positividade do semigrupo.

Proposição 4.2.1 *Suponha que $(X, \leq)$ é um espaço de Banach pré-ordenado, $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo em X e A o seu gerador. Seja $M > 0$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tais que $\|T(t)\|_{L(X)} \leq Me^{\omega t}$. Assuma que existe $\lambda_0 > 0$ tal que $(\lambda - A)^{-1}$ é crescente para todo $\lambda > \lambda_0$. Então, $T(t)$ é crescente para todo $t \geq 0$.*

Reciprocamente, se $X \ni u_0 \mapsto T(t)u_0 \in C([0, \infty), X)$ é crescente para todo $t \geq 0$, então $(\lambda - A)^{-1}$ é crescente para todo $\lambda > \omega$.

Prova: Pelo Teorema 1.4.2 temos que:

$$T(t)u_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{t} \left(\frac{n}{t} - A \right)^{-1} \right]^n u_0 \quad \forall u_0 \in X \text{ e } t \geq 0 \quad (4.1)$$

Tomando $u_0 \geq 0$ queremos provar que $T(t)u_0 \geq 0$, $t \geq 0$. O caso $t = 0$ é trivial, assumimos que $t > 0$. Por hipótese, para $\frac{n}{t} > \lambda_0$, temos que $\left(\frac{n}{t} - A\right)^{-1} u_0 \geq 0$. E assim, obtemos que

$$\left[\frac{n}{t} \left(\frac{n}{t} - A \right)^{-1} \right]^n u_0 \geq 0, \quad \forall n > t\lambda_0.$$

Portanto, obtemos uma seqüência de elementos em C que converge para $T(t)u_0$. Segue do fato que o cone positivo é fechado que $T(t)u_0 \geq 0$.

A recíproca segue do fato que a integral é um operador positivo e de

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty T(t)e^{-\lambda t} dt \geq 0$$

para todo $\lambda > \omega$. $\square$

Segue do resultado acima e do Teorema 2.3.1 que se o semigrupo gerado por $-A$ é crescente então o semigrupo gerado por $-A^\alpha$ também é crescente.

Observação 4.2.1

1. Observe que a hipótese acima sobre A é equivalente a um resultado de positividade para o problema “elíptico” $\lambda u - Au = f$: para todo $\lambda > \lambda_0$ e para todo $f \geq 0$, a solução satisfaz $u \geq 0$.

Equivalentemente, temos o resultado de comparação: para todo $\lambda > \lambda_0$ e $f \geq g$, se $\lambda u - Au = f$ e $\lambda v - Av = g$, então $u \geq v$.

2. Da mesma forma observe que a conclusão da proposição é equivalente a: para $u_0 \geq 0$ a solução da equação linear homogênea

$$\begin{cases} u_t = Au \\ u(0) = u_0 \in X \end{cases} \quad \text{verifica} \quad u(t) \geq 0 \quad \text{para todo} \quad t \geq 0.$$

ou equivalentemente, se $u_0 \geq v_0$, então $u(t) \geq v(t)$ para todo $t \geq 0$, onde u e v são soluções da equação linear homogênea com dados iniciais u_0 e v_0 respectivamente.

3. Se A verifica as hipóteses acima, então o mesmo acontece com $A + \mu$, para todo $\mu \in \mathbb{R}$.

Corolário 4.2.1 Suponha que $(X, \leq)$ é um espaço de Banach pré-ordenado, e seja A o gerador de um C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ tal que $\|T(t)\|_{L(X)} \leq Me^{\omega t}$. Assuma que para todo $\lambda > \lambda_0$, $(\lambda - A)^{-1}$ é crescente.

- i) Seja $u_0 \in D(A)$ tal que $Au_0 \leq 0$. Então se $u(t) = T(t)u_0$, temos

$$Au(t) \leq 0, \quad u_t(t) \leq 0, \quad u(t) \leq u(s) \leq u_0$$

para todo $0 \leq s \leq t$. O mesmo vale, com as desigualdades invertidas, se $Au_0 \geq 0$.

- ii) Seja $u_0 \in X$ tal que $u_0 \geq 0$ e sejam λ, μ números reais tais que $\lambda > \mu$. Então, se $u_\lambda(t)$ e $u_\mu(t)$ denotam respectivamente as soluções de $u_t = Au - \lambda u$ e $u_t = Au - \mu u$, com dado inicial u_0 , então $0 \leq u_\lambda(t) \leq u_\mu(t)$ para todo t .

Prova: i) Seja $u_0 \in D(A)$ tal que $Au_0 \leq 0$. De

$$\frac{d}{dt} T(t)u_0 = T(t)Au_0.$$

e da Proposição 4.2.1 segue que

$$\begin{aligned} Au(t) &= AT(t)u_0 = T(t)Au_0 \leq 0 \\ u_t(t) &= T(t)Au_0 \leq 0 \end{aligned}$$

E para finalizar tal item, temos que para todo $0 \leq s \leq t$,

$$\int_s^t u_t(t) \leq 0 \Rightarrow u(t) \leq u(s).$$

Analogamente, temos que: $u(s) \leq u_0$.

ii) Sabemos que $u_\lambda(t) = e^{-\lambda t}T(t)u_0$ e $u_\mu(t) = e^{-\mu t}T(t)u_0$. Como $\lambda < \mu$ implica $\lambda t \leq \mu t$, o resultado segue. $\square$

O resultado a seguir, garante que quando tratamos de semigrupos de operadores lineares positivos o cone positivo contém um subconjunto denso de funções suaves.

Lema 4.2.1 *Seja $(X, \leq)$ um espaço de Banach pré-ordenado e A o gerador de um C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ tal que $T(t)$ é positivo para todo $t \geq 0$. Então $C_\infty := \cap_{k \geq 1} D(A^k) \cap C$ é denso em C .*

Prova: Como $T(t)$ é positivo para todo $t \geq 0$ segue que se $x \in C$, então $T(t)x \in C$.

Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função infinitamente diferenciável, com suporte contido compactamente em $(0, \infty)$. Dado $x \in C$ e $f = \int_0^\infty \phi(t)T(t)x dt$. Temos que $f \in D(A)$. De fato, dado $h > 0$, fazendo uma mudança de variáveis, obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1}[T(h)f - f] &= \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} \left\{ \int_h^\infty [\phi(t-h) - \phi(t)]T(t)x dt \right\} \\ &= - \int_0^\infty \phi'(t)T(t)x dt. \end{aligned}$$

Portanto, $f \in D(A)$. E como $-\phi'$ se comporta como o ϕ , Af tem as mesmas propriedades de f , logo $f \in D(A^2)$. Indutivamente, obtemos que $f \in D(A^n)$, $\forall n \geq 1$.

Escolha ϕ tal que $\int_0^\infty \phi(t)dt = 1$. e seja $f_n = \int_0^\infty n\phi(nt)T(t)x ds \geq 0$. Então

$$\cap_{k \geq 1} D(A^k) \ni f_n = \int_0^\infty \phi(t)T(t/n)x ds \geq 0$$

e $f_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$. Claramente $f_n \in C_\infty$ e o resultado segue. $\square$

Agora mostraremos que estes conceitos e resultados podem ser transferidos para as potências fracionárias de operadores setoriais.

Seja $-A$ um operador setorial e X^α os espaços de potência fracionária associados a $-A$. Se $(X, \leq)$ é um espaço de Banach ordenado podemos definir em X^α , $\alpha > 0$, a ordem induzida por X ; isto é, denotando por C o cone positivo de X definimos o cone positivo de X^α por $C_\alpha = C \cap X^\alpha$. Denotaremos por $\leq_\alpha$ a ordem induzida em X^α pela ordem de X .

É fácil verificar que $(X^\alpha, \leq_\alpha)$ é um espaço de Banach ordenado, de fato: as propriedades i) e ii) da Definição 4.1.1 são imediatas; a propriedade iii) segue do fato que se $x_n \rightarrow x$ em X^α então $x_n \rightarrow x$ em X e do fato que C é fechado.

O resultado a seguir, resume as propriedades importantes das ordens em espaços de potência fracionária.

Proposição 4.2.2 *Seja $(X, \leq)$ um espaço de Banach pré-ordenado, $-A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial e $\{T(t) : t \geq 0\} \subset L(X)$ o semigrupo gerado por A . Assuma que $T(t)$ é um operador positivo para cada $t \geq 0$. Então $(X^\alpha, \leq_\alpha)$ é um espaço de Banach ordenado, para todo $\alpha \geq 0$ e se $\alpha > \beta$, $\overline{C_\alpha}^{X^\beta} = C_\beta$; isto é, se $\phi \geq 0$ em X^β , então existe $\phi_n \geq 0$ em X^α tal que $\phi_n \rightarrow \phi$ em X^β .*

Adicionalmente, se $\|T(t)\|_{L(X)} \leq M e^{\omega t}$ e $(\lambda - A)^{-1} : X^\alpha \rightarrow X^\alpha$ é crescente para todo $\lambda > \omega$, $\alpha \geq 0$, e conseqüentemente a transformação

$$X^\alpha \ni u_0 \mapsto T(t)u_0 \in C([0, \infty), X^\alpha)$$

é linear crescente.

Prova: A única afirmativa que precisa ser verificada é

$$\overline{C_\alpha}^{X^\beta} = C_\beta, \quad \alpha > \beta \geq 0.$$

Assuma que $f \in C_\beta$ seja $g(t) = e^{-At}f$. Então, pelo efeito de regularização, $g(t) \in X^\alpha$. De $f \in C_\beta$ e $T(t) = e^{-At}$ é crescente, segue que $g(t) \in C_\beta$. Portanto, $g(t) \in C_\beta \cap X^\alpha = C_\alpha$ e $g(t) \rightarrow f$ em X^β , quando $t \rightarrow 0$. Conseqüentemente, $\overline{C_\alpha}^{X^\beta} = C_\beta$. $\square$

Observe que a propriedade acima dos cones positivos mostra a consistência das definições “ $f \geq 0$ ”, independentemente do espaço X^α no qual f está. Portanto, de agora em diante, não faremos distinção entre as ordens $\leq_\alpha$, $\alpha \geq 0$.

4.3 Alguns Operadores com Resolvente Positivo

Os resultados das seções precedentes são dependentes da possibilidade de encontrarmos geradores de semi-grupos fortemente contínuos, A , cujo operador resolvente, $(\lambda - A)^{-1}$, seja um operador crescente para todo $\lambda \in (\omega, \infty)$. Nesta seção asseguramos que há uma classe interessante de operadores com esta propriedade. Mostramos anteriormente que se A tem resolvente crescente então $-(-A)^\alpha$ também tem.

Lema 4.3.1 *Seja H um espaço de Hilbert e $f \in H$. Suponha que existe $\tilde{f} \in H$ tal que $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$ e que*

$$\langle \tilde{f}, f \rangle \geq |\langle f, f \rangle|.$$

Então $f = \tilde{f}$.

Prova: Sabemos que $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$ e que

$$\|f\|^2 = |\langle f, f \rangle| \leq \langle \tilde{f}, f \rangle = |\langle f, f \rangle| \leq \|\tilde{f}\| \|f\|.$$

Segue que $\|f\| = \|\tilde{f}\|$ e

$$0 \leq \langle f - \tilde{f}, f - \tilde{f} \rangle = 2\|f\|^2 - 2\langle \tilde{f}, f \rangle \leq 0$$

implica que $f = \tilde{f}$. $\square$

Definição 4.3.1 *Seja H um espaço de Hilbert ordenado e C o seu cone positivo. Dizemos que um operador auto-adjunto $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é positivo, se $\langle Au, u \rangle \geq 0$ para todo $u \in D(A)$. E ainda, dizemos que $(A + \alpha)^{-1}$ é crescente se $(A + \alpha)^{-1}f \in C$ sempre que $f \in C$.*

Teorema 4.3.1 *Sejam H , A e C como acima. Assuma que H possui um subconjunto denso D tal que:*

- $(A + \alpha)^{-1}D \subset D$;
- Para cada $d \in D$ podemos definir $|d| \in D \cap C$ e esta relação satisfaz: Um elemento $d \in D$ está em C se e somente se $d = |d|$ e $\|d\| = \||d|\|$;
- $\langle |d|, g \rangle \geq |\langle d, g \rangle|$, $\forall d \in D, \forall g \in C$.

Considere as seguintes afirmativas:

(i) Se $u \in D(A^{\frac{1}{2}})$ então $|u| \in D(A^{\frac{1}{2}})$ e

$$\langle A^{\frac{1}{2}}|u|, A^{\frac{1}{2}}|u| \rangle \leq \langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}u \rangle.$$

(ii) $(A + \alpha)^{-1}$ é crescente para todo $\alpha > 0$.

Então (i) implica (ii).

Prova: Em $D(A^{\frac{1}{2}})$ adotamos o produto interno

$$\langle f, g \rangle_1 = \langle A^{\frac{1}{2}}f, A^{\frac{1}{2}}g \rangle + \alpha \langle f, g \rangle$$

onde $\alpha > 0$. Denotamos por $H^{\frac{1}{2}}$ o espaço de Hilbert $(D(A^{\frac{1}{2}}), \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$.

Se $D \ni g \geq 0$ e $c = (A + \alpha)^{-1}g$, ($c \in D$, pois $(A + \alpha)^{-1}D \subset D$)

$$\begin{aligned} \langle |c|, c \rangle_1 &= \langle |c|, (A + \alpha)^{-1}g \rangle_1 = \langle A^{\frac{1}{2}}|c|, A^{\frac{1}{2}}(A + \alpha)^{-1}g \rangle + \alpha \langle |c|, (A + \alpha)^{-1}g \rangle \\ &= \langle |c|, g \rangle \geq |\langle c, g \rangle| = |\langle (A + \alpha)c, (A + \alpha)^{-1}g \rangle| \\ &= |\langle c, (A + \alpha)^{-1}g \rangle_1| = |\langle c, c \rangle_1|. \end{aligned}$$

Adicionalmente, pela propriedade (i)

$$\begin{aligned} \| |c| \|_1^2 &= \langle A^{\frac{1}{2}}|c|, A^{\frac{1}{2}}|c| \rangle + \alpha \| |c| \|^2 \\ &\leq \langle A^{\frac{1}{2}}c, A^{\frac{1}{2}}c \rangle + \alpha \| c \|^2 \\ &= \| c \|_1^2. \end{aligned}$$

Usando o Lema 4.3.1 com $f = c$ e $\tilde{f} = |c|$ concluímos que se $g \in D \cap C$ então

$$|(A + \alpha)^{-1}g| = (A + \alpha)^{-1}g$$

e $(A + \alpha)^{-1}g \in C$. Da densidade de $D \cap C$ em C e da continuidade de $(A + \alpha)^{-1}$, segue que

$$(A + \alpha)^{-1}g \in C \quad \forall g \in C.$$

Portanto $(A + \alpha)^{-1}$ é crescente. $\square$

O resultado a seguir é uma consequência simples do Teorema 2.3.1, fórmula (2.25).

Corolário 4.3.1 *Suponha que $(X, \leq)$ é um espaço de Banach pré-ordenado, $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo em X com decaimento exponencial e $-A$ o seu gerador. Se $-A$ tem resolvente positivo então $-A^\alpha$ tem resolvente positivo.*

Os resultados a seguir são consequências imediatas do Theorem 3.1.2, Proposição 3.3.1 e Proposição 3.3.2. Esses resultados asseguram que, sob certas condições, a soma de operadores com resolvente crescente é um operador com resolvente crescente.

Corolário 4.3.2 *Se $-A$, $-B$, $-(A + B)$ são geradores de semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares, A e B comutam e tem resolvente crescente, então $-(A + B)$ tem resolvente crescente.*

Corolário 4.3.3 *Se ou as hipóteses da Proposição 3.3.1 ou as hipóteses da Proposição 3.3.2 estão satisfeitas, então*

$$e^{-(A+B)t} \geq 0, \quad t \geq 0$$

ou, equivalentemente, $(\lambda + A + B)^{-1}$ é crescente para $\lambda > \omega$.

O Corolário 4.3.3 fornece ferramentas para mostrar que o resolvente da soma de operadores crescentes é um operador com resolvente crescente, sem impor que os operadores comutem. Estes tem aplicação simples no caso em que os operadores envolvidos são dissipativos. Para os casos em que os operadores não são dissipativos pode ser mais conveniente utilizar o Theorem 3.1.2.

A propriedade de ter resolvente crescente é preservada quando mudamos a norma do espaço para uma norma equivalente. Isto nos leva a concluir que pode ser útil saber quando podemos mudar a norma do espaço para uma norma equivalente de forma que A e B tornem-se simultaneamente dissipativos. As condições que devemos impor aos operadores A e B que permitem essa mudança de norma são semelhantes as condições impostas na Proposição 3.3.1 e na Proposição 3.3.2.

Os resultados acima devem contribuir para mostrar que um número considerável de operadores tem resolvente crescente.

Capítulo 5

Problema de Cauchy não homogêneo

5.1 Existência, Unicidade e Regularidade

A seguir estudamos problemas de Cauchy (problemas de valor inicial) para equações lineares não homogêneas da forma

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= Ae + f(t), \quad t_0 < t < t_1 \\ e(t_0) &= e_0 \in E_0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde A é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo $\{e^{At}; t \geq 0\} \subset L(E_0)$ e $f : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ é contínua por partes e contínua a direita.

Definição 5.1.1

- a) Uma **solução forte** de (5.1), é uma função contínua $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ tal que $e(t_0) = e_0$ e para $t_0 < t < t_1$, $e(t) \in D(A)$,

$$\frac{d^+}{dt}e(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e(t+h) - e(t)}{h}$$

existe, (5.1) vale com $\frac{d}{dt}e(t)$ substituído por $\frac{d^+}{dt}e(t)$ e $t \mapsto \frac{d^+}{dt}e(t)$ é contínua onde f é contínua. Note que se $t \mapsto f(t)$ é uma função contínua e $t \mapsto e(t)$ é uma solução forte de (5.1) então $t \mapsto e(t)$ é continuamente diferenciável e (5.1) se verifica para cada $t \in (t_0, t_1)$.

- b) Uma **solução fraca** de (5.1) em $[t_0, t_1)$ é uma função contínua $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ tal que $e(t_0) = e_0$ e para todo $e^* \in D(A^*)$, $t \mapsto \langle e^*, e(t) \rangle$ tem derivada a direita e

$$\frac{d^+}{dt}\langle e^*, e(t) \rangle = \langle A^*e^*, e(t) \rangle + \langle e^*, f(t) \rangle, \quad t_0 < t < t_1. \quad (5.2)$$

Note que se $t \mapsto \langle e^*, f(t) \rangle$ é uma função contínua e $t \mapsto e(t)$ é uma solução fraca de (5.1) então $t \mapsto \langle e^*, e(t) \rangle$ é continuamente diferenciável e (5.2) se verifica com $\frac{d^+}{dt}$ substituído por $\frac{d}{dt}$.

Definição 5.1.2 Um subconjunto $S^* \subset E_0^*$ é dito **total** se: $e \in E_0$, $\langle e^*, e \rangle = 0$, $\forall e^* \in S^*$ implica $e = 0$.

O **anulador** $S^\perp \subset E_0^*$ de um subconjunto $S \subset E_0$ é o conjunto de todos os elementos $e^* \in E_0^*$ tais que $\langle e^*, e \rangle = 0$, $\forall e \in S$. Sabemos que se $S \subset E_0$ é um espaço vetorial então $(S^\perp)^\perp = \bar{S}$ (veja [6]).

Lema 5.1.1 Se $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ é fechado e densamente definido então $D(A^*)$ é total.

Prova: Seja $e \in E_0$ tal que $\langle e^*, e \rangle = 0$ para todo $e^* \in D(A^*)$. Queremos mostrar que $e = 0$. Como o gráfico de A^* , $G(A^*) = \{(e^*, A^*e^*) : e^* \in D(A^*)\}$ é o anulador em $E_0^* \times E_0^*$ de $\Gamma = \{(-Ae, e) : e \in D(A)\}$; isto é, $G(A^*) = \Gamma^\perp$. Note que $G(A^*)$ também anula $(e, 0)$, segue que $(e, 0) \in G(A^*)^\perp = \Gamma$ e portanto $e = 0$. $\square$

O teorema a seguir nos dá formas de manuseio mais simples para as soluções fracas e estabelece algumas relações importantes entre soluções fracas e fortes.

Teorema 5.1.1

1. Se $e : [t_0, t_1] \rightarrow E_0$ é uma solução forte de (5.1) então é também uma solução fraca de (5.1).
2. Se $e : [t_0, t_1] \rightarrow E_0$ é uma solução fraca de (5.1), então

$$e(t) = \mathbf{e}^{A(t-t_0)}e_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A(t-s)}f(s)ds, \quad t_0 \leq t < t_1. \quad (5.3)$$

Em particular, existe uma única solução fraca de (5.1).

3. Se $e : [t_0, t_1] \rightarrow E_0$ é definido por (5.3), então $e : [t_0, t_1] \rightarrow E_0$ é uma solução fraca de (5.1).
4. Se $e : [t_0, t_1] \rightarrow E_0$ é uma solução fraca e para algum $t \in (t_0, t_1)$ ou $e(t) \in D(A)$ ou $\frac{d^+}{dt}e(t)$ existe, então ambos são verdadeiros e para este instante

$$\frac{d^+}{dt}e(t) = Ae(t) + f(t).$$

Prova: A afirmativa 1) é trivial. Provaremos 3) e a unicidade de soluções fracas o que implicará 2).

Prova de 3). Defina $e : [t_0, t_1] \rightarrow E_0$ por (5.3) e seja $e^* \in D(A^*)$. Para qualquer $e \in E_0$ $t \mapsto \langle e^*, \mathbf{e}^{At}e \rangle$ é diferenciável com derivada $\langle A^*e^*, \mathbf{e}^{At}e \rangle$ pois

$$\langle e^*, \mathbf{e}^{At}e \rangle - \langle e^*, e \rangle = \int_0^t \langle A^*e^*, \mathbf{e}^{As}e \rangle ds$$

para $e \in D(A)$ e por continuidade para todo $e \in E_0$. Usando isto calculamos $\frac{d^+}{dt}\langle e^*, e(t) \rangle$ e vemos que $e : [t_0, t_1] \rightarrow E_0$ é uma solução fraca; de fato,

$$\begin{aligned} & \langle e^*, \int_{t_0}^{t+h} \mathbf{e}^{A(t+h-s)}f(s)ds \rangle - \langle e^*, \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A(t-s)}f(s)ds \rangle \\ &= \langle e^*, \int_t^{t+h} \mathbf{e}^{A(t+h-s)}f(s)ds \rangle - \langle e^*, (\mathbf{e}^{Ah} - I) \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A(t-s)}f(s)ds \rangle \\ &= h[\langle e^*, f(t) \rangle + \langle A^*e^*, \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A(t-s)}f(s)ds \rangle] + o(h) \end{aligned}$$

onde na última passagem utilizamos que A^* é o gerador infinitesimal do semigrupo fortemente contínuo $\{T^\circ(t) = (T(t))^*|_Y : t \geq 0\}$ em $L(Y)$, $Y = \overline{D(A^*)}^{E_0^*}$ (veja Teorema 1.6.1).

Prova da unicidade em 2). Se existem duas soluções de (5.1), a diferença entre elas $u : [t_0, t_1] \rightarrow E_0$ é uma função contínua com $u(t_0) = 0$ e $\frac{d^+}{dt}\langle e^*, u(t) \rangle = \langle A^*e^*, u(t) \rangle$, $t_0 \leq t < t_1$ e $e^* \in D(A^*)$. É conveniente trabalhar com uma função C^1 , logo seja $U(t) = \int_{t_0}^t u(s)ds$; então

$$\langle e^*, u(t) \rangle = \int_{t_0}^t \langle A^*e^*, u(s) \rangle ds$$

$$\text{e } \langle e^*, \frac{d}{dt} U(t) \rangle = \langle A^* e^*, U(t) \rangle.$$

Agora observe que $(e^{At})^* D(A^*) \subset D(A^*)$ para $t \geq 0$, já que $\langle (e^{At})^* e^*, Ae \rangle = \langle A^* e^*, e^{At} e \rangle$ para $e^* \in D(A^*)$, $e \in D(A)$. Logo, para qualquer $t^* \in (t_0, t_1)$

$$\langle e^*, e^{A(t^*-t)} \frac{d}{dt} U(t) \rangle = \langle A^* e^*, e^{A(t^*-t)} U(t) \rangle$$

$$\text{e } \frac{d}{dt} \langle e^*, e^{A(t^*-t)} U(t) \rangle = 0 \text{ para } t_0 \leq t \leq t^*.$$

Como $U(t_0) = 0$, $\langle e^*, U(t^*) \rangle = 0$ para todo $e^* \in D(A^*)$, portanto $U(t^*) = 0$ e $u(s) = 0$ para $t_0 \leq s \leq t_1$.

Prova de 4). Se $e(\cdot)$ é uma solução fraca, dada por (5.3), então para $t_0 \leq t < t+h < t_1$

$$\frac{e(t+h) - e(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{A(t+h-s)} f(s) ds + \frac{1}{h} (e^{Ah} - I) e(t).$$

O termo do meio converge para $f(t^+) = f(t)$ quando $h \rightarrow 0^+$, logo se um dos outros termos converge, ambos devem convergir. $\square$

A seguir damos condições simples que asseguram a diferenciabilidade de uma solução fraca.

Teorema 5.1.2 *Assuma que A e f são como antes e $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ é uma solução fraca de (5.1). Se $e_0 \in D(A)$ e ou*

1. $f(t) \in D(A)$ com $t \mapsto Af(t) \in E_0$ contínua a direita em $[t_0, t_1)$ ou
2. $\frac{d^+}{dt} f(t) = \dot{f}(t)$ existe e é contínua a direita em $[t_0, t_1)$

então $\frac{d^+}{dt} e(t)$ existe, $e(t) \in D(A)$ e $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ é uma solução forte.

Prova: Seja $u(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f(s) ds$, logo $e(t) = e^{A(t-t_0)} e_0 + u(t)$; como $e_0 \in D(A)$, $t \mapsto e^{A(t-t_0)} e_0 \in C^1$. Se $t_0 \leq t < t+h < t_1$,

$$\begin{aligned} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{A(t+h-s)} f(s) ds + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} \frac{e^{Ah} - I}{h} f(s) ds \\ &= \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} e^{A(t+h-s)} f(s) ds + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} \frac{f(s+h) - f(s)}{h} ds \end{aligned} \quad (5.4)$$

e usando as primeira e segunda expressões nos casos (1) e (2) respectivamente, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{d^+}{dt} u(t) &= f(t) + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} Af(s) ds, \quad \text{no caso (1),} \\ &= e^{A(t-t_0)} f(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} \dot{f}(s) ds, \quad \text{no caso (2).} \end{aligned}$$

Pelo Teorema 5.1.1 (4), $u(t) \in D(A)$ e a prova está completa. $\square$

Corolário 5.1.1 *Seja $(X, \leq)$ um espaço de Banach ordenado e A o gerador de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$. Assuma que existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que para $\lambda > \lambda_0$, $(\lambda - A)^{-1}$ é crescente.*

Seja $u = u(t, u_0, f)$ a solução de

$$\begin{cases} u_t = Au + f(t) \\ u(t_0) = u_0 \in X \end{cases}$$

com $f \in L^1((t_0, t_1), X)$.

Assuma $u_0 \geq u_1$ and $f_0(t) \geq f_1(t)$ para quase todo $t \in (t_0, t_1)$, então $u(t, u_0, f_0) \geq u(t, u_1, f_1)$ para todo $t \in (t_0, t_1)$. Em particular, se $u_0 \geq 0$ e $f(t) \geq 0$ para quase todo $t \in (t_0, t_1)$, então $u(t, u_0, f) \geq 0$ para todo $t \in (t_0, t_1)$.

Prova: Observe que a solução é dada pela fórmula da variação das constantes

$$u_i(t) = T(t - t_0)u_i + \int_{t_0}^t T(t - s)f_i(s) ds$$

para $i = 0, 1$, e já sabemos que $T(t - t_0)$ é crescente. Por outro lado, para todo $t_0 < s < t < t_1$, $T(t - s)f_0(s) \geq T(t - s)f_1(s)$ e como a integral é crescente obtemos o resultado. $\square$

5.2 Comparação em Problemas não Homogêneos

O resultado a seguir garante que quando tratamos de semigrupos de operadores lineares positivos o cone positivo contém um subconjunto denso de funções suaves.

Como nos Corolários 4.2.1 e 5.1.1, obtemos resultados de comparação e positividade para a equação linear não homogênea

$$\begin{cases} u_t = Au + f(t) \\ u(0) = u_0 \in X^\alpha \end{cases}.$$

Corolário 5.2.1 *Seja $(X, \leq)$ um espaço de Banach ordenado e $\{T(t) : t \geq 0\} \subset L(X)$ um semigrupo de operadores lineares positivos com gerador A .*

i) Seja $u_0 \in D(A)$ tal que $Au_0 \leq 0$. Então, se $u(t) = T(t)u_0$ temos

$$Au(t) \leq 0, \quad u_t(t) \leq 0, \quad u(t) \leq u(s) \leq u_0$$

para todo $0 \leq s \leq t$. O mesmo é verdade, com as desigualdades invertidas, se $Au_0 \geq 0$.

ii) Seja $u_0 \in X$ tal que $u_0 \geq 0$ e seja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda > \mu$. Então, se $u_\lambda(t)$ e $u_\mu(t)$ denota respectivamente as soluções de $u_t = Au - \lambda u = 0$ e $u_t = Au - \mu u = 0$, com dado inicial u_0 , então $0 \leq u_\lambda(t) \leq u_\mu(t)$ para todo t .

iii) Se $-A$ é setorial, para qualquer $\alpha \geq 0$, a transformação

$$X^\alpha \times L^1((t_0, t_1), X^\alpha) \ni (u_0, f) \mapsto u \in C([t_0, t_1], X^\alpha)$$

é crescente.

Capítulo 6

O Problema de Cauchy Semilinear

6.1 O Caso Hiperbólico

Nesta seção consideramos o problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e &= Ae + f(t, e) \\ e(t_0) &= e_0 \in E_0,\end{aligned}\tag{6.1}$$

onde A é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo, f é uma função contínua que está definida em um subconjunto U de $\mathbb{R} \times E_0$ e toma valores em E_0 e $(t_0, e_0) \in U$.

Definição 6.1.1

- a) Uma **solução forte** de (6.1) em $[t_0, t_1)$ é uma função contínua $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ tal que $e : (t_0, t_1) \rightarrow E_0$ é continuamente diferenciável, $e(t_0) = e_0$, $(t, e(t)) \in U$, $e(t) \in D(A)$ e (6.1) vale, $t_0 < t < t_1$.
- b) Uma **solução fraca** de (6.1) em $[t_0, t_1)$ é uma função contínua $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ tal que $e(t_0) = e_0$, $(t, e(t)) \in U$, para todo $e^* \in D(A^*)$, $t \mapsto \langle e^*, e(t) \rangle$ é diferenciável e

$$\frac{d}{dt}\langle e^*, e(t) \rangle = \langle A^* e^*, e(t) \rangle + \langle e^*, f(t, e(t)) \rangle, \quad t_0 < t < t_1.\tag{6.2}$$

Com isto temos o seguinte teorema

Teorema 6.1.1

- 1. Se $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ é uma solução forte de (6.1) então é também uma solução fraca de (6.1).
- 2. Uma solução fraca $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ de (6.1) é também uma solução forte se e somente se é continuamente diferenciável em (t_0, t_1) se e somente se $e(t) \in D(A)$ com $t \mapsto Ae(t)$ contínua em (t_0, t_1) .
- 3. Se $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ é uma solução fraca de (6.1), então

$$e(t) = e^{A(t-t_0)}e_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(s, e(s))ds, \quad t_0 \leq t < t_1.\tag{6.3}$$

- 4. Se $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ é contínua com $(t, e(t)) \in U$, $t_0 \leq t < t_1$ e satisfaz (6.3), então $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ é uma solução fraca de (6.1).

Prova: As afirmativas do teorema seguem imediatamente do Teorema 5.1.1 uma vez que $t \mapsto f(t, e(t)) : [t_0, t_1] \rightarrow E_0$ é uma função contínua. $\square$

Teorema 6.1.2 *Assuma que $\{e^{At}; t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo, $U \subset \mathbb{R} \times E_0$ um aberto e $f : U \rightarrow E_0$ contínua e localmente Lipschitz contínua em seu segundo argumento; isto é, dado $(t_0, e_0) \in U$ existe $\delta > 0$ e L tal que*

$$\|f(t, e_1) - f(t, e_2)\|_{E_0} \leq L\|e_1 - e_2\|_{E_0} \quad (6.4)$$

quando $|t - t_0| \leq \delta$ e $\|e_i - e_0\|_{E_0} \leq \delta$, $i = 1, 2$. Então, dado qualquer $(t_0, e_0) \in U$ existe $t_1 > t_0$ e uma solução fraca $e : [t_0, t_1] \rightarrow E_0$ de (6.1). Adicionalmente, qualquer solução fraca $\tilde{e} : [t_0, \tilde{t}_1] \rightarrow E_0$ é tal que $\tilde{e}(t) = e(t)$ para $t_0 \leq t < \min\{t_1, \tilde{t}_1\}$.

Prova: Existe $\delta > 0$ e constantes L, M tais que se $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$, $\|e_i - e_0\|_{E_0} \leq \delta$, $i = 1, 2$, então

$$\begin{aligned} \|f(t, e_1) - f(t, e_2)\|_{E_0} &\leq L\|e_1 - e_2\|_{E_0} \\ \|f(t, e_1)\|_{E_0} &\leq M. \end{aligned}$$

Escolha $t_1 > t_0$ tal que

$$0 < t_1 - t_0 \leq \min \left\{ \frac{\delta}{2MM_0}, \frac{1}{2M_0L}, \delta, \epsilon \right\}$$

onde $\|e^{A\tau}\|_{L(E_0)} \leq M_0$, $0 \leq \tau \leq \epsilon$, $\|e^{A\tau}e_0 - e_0\|_{E_0} \leq \delta/2$ quando $0 \leq \tau \leq \epsilon$.

Seja S o conjunto das funções contínuas $e : [t_0, t_1] \rightarrow E_0$ tal que $\|e(t) - e_0\|_{E_0} \leq \delta$ para $t_0 \leq t \leq t_1$. Se $e, \tilde{e} \in S$, defina $d(e, \tilde{e}) = \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \|e(t) - \tilde{e}(t)\|_{E_0}$; então (S, d) é um espaço métrico completo. Para $e \in S$ defina $G(e) : [t_0, t_1] \rightarrow E_0$ por

$$G(e)(t) = e^{A(t-t_0)}e_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(s, e(s))ds, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Então $G(S) \subset S$, $d(G(e), G(\tilde{e})) \leq \frac{1}{2}d(e, \tilde{e})$ para $e, \tilde{e} \in S$ e, do princípio da contração de Banach, G tem um único ponto fixo em S . Isto prova a afirmativa pelo Teorema 6.1.1 partes (3) e (4). $\square$

A seguir obtemos resultados sobre extensões de soluções de (6.1) e a existência de intervalos maximais de definição para soluções de (6.1). Estes resultados são essenciais no estudo do comportamento assintótico de soluções de (6.1) permitindo, em muitos casos, obter a existência global de soluções através de alguma estimativa apriori.

Teorema 6.1.3 *Assuma que A , U e f são como no Teorema 6.1.2. Para $(t_0, e_0) \in U$ existe uma única solução fraca maximal $e : [t_0, \tau_{\max}) \rightarrow E_0$ de (6.1). Para esta solução suponha que $\tau_{\max} < \infty$. Então ou existe $e_1 \in E_0$ tal que $(\tau_{\max}, e_1) \in \partial U$ e $e(t) \rightarrow e_1$ quando $t \rightarrow \tau_{\max}$ ou*

$$\limsup_{t \rightarrow \tau_{\max}} \frac{\|f(t, e(t))\|_{E_0}}{1 + \|e(t)\|_{E_0}} = \infty.$$

Se $U = \mathbb{R} \times E_0$ e f leva subconjunto limitados de $\mathbb{R} \times E_0$ em subconjuntos limitados de E_0 o segundo caso só ocorre se $\limsup_{t \rightarrow \tau_{\max}} \|e(t)\|_{E_0} = \infty$.

Prova: Seja $\tau_{\max} = \sup\{t_1 : \text{existe uma solução de 6.1 definida em } [t_0, t_1]\}$. Para qualquer $t \in [t_0, \tau_{\max})$ defina $e(t) = \{\text{o valor em } t \text{ de uma solução fraca } \tilde{e} : [t_0, t_1] \rightarrow E_0 \text{ de (6.1), } t_1 > t\}$. Toda solução fraca dá o mesmo valor para $e(t)$, pelo Teorema 6.1.2, e $e : [t_0, \tau_{\max}) \rightarrow E_0$ é claramente maximal.

Suponha que $\tau_{\max} < \infty$ e o limite $e_1 = \lim_{t \rightarrow \tau_{\max}^-} e(t)$ exista. Se $(\tau_{\max}, e_1) \in U$ existe uma solução fraca $\tilde{e} : [\tau_{\max}, \tau_{\max} + \delta] \rightarrow E_0$ para algum $\delta > 0$ com $\tilde{e}(\tau_{\max}) = e_1$. Então se $\hat{e} : [t_0, \tau_{\max} + \delta] \rightarrow E_0$ é dada por $\hat{e}(t) = e(t)$, $t_0 \leq t < \tau_{\max}$ e $\hat{e}(t) = \tilde{e}(t)$, $\tau_{\max} \leq t \leq \tau_{\max} + \delta$, então $\hat{e}$ é uma solução fraca de (6.1) o que contradiz a definição de $\tau_{\max}$. Portanto, se o limite existe devemos ter $(\tau_{\max}, e_1) \in \partial U$.

Mostremos que

$$\frac{\|f(t, e(t))\|_{E_0}}{1 + \|e(t)\|_{E_0}} \leq B < \infty, \quad t_0 \leq t < \tau_{\max},$$

implica que $\lim_{t \rightarrow \tau_{\max}^-} e(t)$ existe e isto completará a prova. Primeiramente note que pela desigualdade de Gronwal $\|e(t)\|_{E_0}$ é limitada, logo $\|f(t, e(t))\|_{E_0} \leq B_1$, $t_0 \leq t < \tau_{\max}$. Provamos que $\|e(s) - e(r)\|_{E_0} \rightarrow 0$ quando $s, t \rightarrow \tau_{\max}^-$. Podemos assumir que $\|\mathbf{e}^{At}\| \leq M$ para $0 \leq t \leq \tau_{\max} - t_0$. Dado $\epsilon > 0$ escolha $0 < \epsilon_1 < \tau_{\max} - t_0$ com $\epsilon_1 \leq \frac{\epsilon}{4MB_1}$. Seja $t^* = \tau_{\max} - \epsilon_1$ e $0 < \delta \leq \epsilon_1$ tal que $\|(\mathbf{e}^{A(s-t^*)} - \mathbf{e}^{A(r-t^*)})e(t^*)\|_{E_0} \leq \frac{\epsilon}{4}$ se $|s - r| \leq \delta$. Então para $t^* \leq \tau_{\max} - \delta \leq s, r < \tau_{\max}$,

$$e(s) = \mathbf{e}^{A(s-t^*)}e(t^*) + \int_{t^*}^s \mathbf{e}^{A(s-\theta)}f(\theta, e(\theta))d\theta,$$

$$\text{logo, se } s \leq r, \|e(s) - e(r)\|_{E_0} \leq \frac{\epsilon}{4} + 2 \int_{t^*}^s MB_1 d\theta + \int_s^r MB_1 d\theta \leq \epsilon. \square$$

Teorema 6.1.4 *Assuma que A , U e f são como no Teorema 6.1.2 e suponha que $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ é uma solução fraca de (6.1). Se $e(t_0) = e_0 \in D(A)$ e $f : U \rightarrow E_0$ é continuamente diferenciável, então $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ é continuamente diferenciável e portanto uma solução forte. Adicionalmente*

$$\frac{d^+}{dt}e(t_0) = Ae(t_0) + f(t_0, e(t_0)).$$

Observação 6.1.1 *É suficiente que $(t, e) \mapsto \frac{\partial}{\partial t}f(t, e) \in E_0$ é contínua e que $(t, e) \mapsto \frac{\partial}{\partial e}f(t, e) \in L(E_0)$ seja fortemente contínua; isto é, $(t, e) \mapsto \frac{\partial}{\partial e}f(t, e)r \in E_0$ é contínua para cada $r \in E_0$.*

Prova: Escolha qualquer $t_2 \in (t_0, t_1)$; provamos que e é continuamente diferenciável em $[t_0, t_2]$. Defina $v : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ a solução fraca de

$$\begin{aligned} \dot{v} &= Av + f_t(t, e(t)) + f_e(t, e(t))v, \\ v(t_0) &= Ae_0 + f(t_0, e_0). \end{aligned}$$

Para $0 < h < t_1 - t_2$, defina $\Delta_h(t) = e(t+h) - e(t) - hv(t)$, $t_0 \leq t \leq t_2$, é suficiente provar que $\Delta_h(t) = o(h)$ quando $h \rightarrow 0^+$, uniformemente em $t_0 \leq t \leq t_2$. Agora

$$\begin{aligned} \Delta_h(t) &= (\mathbf{e}^{Ah} - I - hA)\mathbf{e}^{A(t-t_0)}e_0 \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+h} (\mathbf{e}^{A(t+h-s)}f(s, e(s)) - \mathbf{e}^{A(t-t_0)}f(t_0, e_0)) \\ &+ \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A(t-s)}[f(s+h, e(s+h)) - f(s, e(s+h)) - hf_t(s, e(s))]ds \\ &+ \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A(t-s)}[f(s, e(s+h)) - f(s, e(s)) - hf_e(s, e(s))v(s)]ds \end{aligned}$$

e só a última linha apresenta dificuldades. Se $\bar{f}_e(s, h) = \int_0^1 f_e(s, \theta e(s+h) + (1-\theta)e(s))d\theta$. A última linha é

$$\int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A(t-s)}[\bar{f}_e(s, h)\Delta_h(s) + h(\bar{f}_e(s, h) - f_e(s, e(s)))v(s)]ds.$$

como f_e é limitado em uma vizinhança do conjunto compacto $\{(s, e(s)) : t_0 \leq s \leq t_2\}$ obtemos

$$\|\Delta_h(t)\|_{E_0} \leq C \int_{t_0}^t \|\Delta_h(s)\|_{E_0} ds + o(h),$$

quando $h \rightarrow 0$ uniformemente para $t_0 \leq t \leq t_2$, para alguma constante C . Logo $\|\Delta_h(t)\|_{E_0} \leq o(h)$, da desigualdade de Gronwall. $\square$

Teorema 6.1.5 *Assuma que A , U e f são como no Teorema 6.1.2 e suponha que E_0 é reflexivo. Se E_A é $D(A)$ com a norma do gráfico $\|e\|_A = \|e\|_{E_0} + \|Ae\|_{E_0}$, f leva $U \cap (\mathbb{R} \times E_A)$ continuamente em E_A e*

$$\|Af(t, e)\|_{E_0} \leq C(t, e)\|e\|_{E_A}$$

em $U \cap (\mathbb{R} \times E_A)$ onde $C : U \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente limitada. Então, qualquer solução fraca $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ de (6.1) com $e(t_0) \in D(A)$ é uma solução forte e $\|Ae(t) - Ae(t_0)\|_{E_0} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow t_0^+$.

Prova: Seja $t_0 < t_2 < t_1$; o método de iteração

$$e_{n+1}(t) = e^{A(t-t_0)}e(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(s, e_n(s))ds$$

($n = 0, 1, 2, \dots$) convergirá uniformemente em $[t_0, t_2]$ se a aproximação inicial $e_0(t)$ é escolhida uniformemente próxima a $e(t)$ em $[t_0, t_2]$ e podemos assumir que $e_0 : [t_0, t_2] \rightarrow E_A$ é contínua. Por exemplo, tome $e_0(t) = (I - \epsilon A)^{-1}e(t)$ para algum $\epsilon > 0$. Portanto $\|Ae_0(t)\|_{E_0}$ é limitado e $e_n(t) \rightarrow e(t)$ uniformemente em $[t_0, t_2]$. Provaremos que $\|Ae_n(t)\|_{E_0}$ é uniformemente limitada, $e(t) \in D(A)$ com $Ae_n(t) \xrightarrow{w} Ae(t)$ e $t \rightarrow Ae(t)$ é contínua.

Primeiro note que $\{(t, e_n(t)) : t_0 \leq t \leq t_2, n \geq 0\}$ está em um subconjunto compacto de U . Logo

$$\|Af(t, e_n(t))\|_{E_0} \leq C_1(1 + \|Ae_n(t)\|_{E_0})$$

para alguma constante C_1 independente de n, t . Portanto

$$\begin{aligned} \|Ae_{n+1}(t)\|_{E_0} &\leq \|e^{A(t-t_0)}Ae(t_0)\|_{E_0} + \int_{t_0}^t \|e^{A(t-s)}C_1(1 + \|Ae_n(s)\|_{E_0})\|_{E_0}ds \\ &\leq C_2 + C_3 \int_{t_0}^t \|Ae_n(s)\|_{E_0}ds, \quad t_0 \leq t \leq t_2. \end{aligned}$$

Podemos assumir que $C_2 \geq \|Ae_0(t)\|_{E_0}$ para $t_0 \leq t \leq t_2$ e então se $\|Ae_n(s)\|_{E_0} \leq C_2 e^{C_3(s-t_0)}$ em $[t_0, t_2]$, segue que $\|Ae_{n+1}(t)\|_{E_0} \leq C_2 e^{C_3(t-t_0)}$ portanto $Ae_n(t)$ e $Af(t, e_n(t))$ são uniformemente limitadas. Note que o gráfico de A é fechado e portanto fracamente fechado e $e_n(t) \rightarrow e(t)$; se uma subsequência é tal que $Ae_n(t) \xrightarrow{w} y(t)$, então $e(t) \in D(A)$, $Ae(t) = y(t)$. Portanto, $Ae_n(t) \xrightarrow{w} Ae(t)$. Semelhantemente $Af(t, e_n(t)) \xrightarrow{w} Af(t, e(t))$. Ainda $t \mapsto Ae(t), Af(t, e(t))$ são fracamente contínuas; por exemplo, dado $e^* \in E_0^*$ e $\epsilon > 0$, primeiro escolha $e_1^* \in D(A^*)$ próximo a e^* e então

$$\begin{aligned} |\langle e^*, Ae(t) - Ae(s) \rangle| &\leq |\langle e^* - e_1^*, Ae(t) - Ae(s) \rangle| + |\langle A^*e_1^*, e(t) - e(s) \rangle| \\ &\leq C\|e^* - e_1^*\|_{E_0^*} + \|A^*e_1^*\|_{E_0^*}\|e(t) - e(s)\|_{E_0} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

se $|t - s|$ é suficientemente pequeno dependendo de e_1^*, ϵ . Note que $D(A^*)$ é denso em E_0^* , já que E_0 é reflexivo (veja Lemma 1.6.3).

Agora mostramos que $t \mapsto Ae(t)$ é contínua, ou especificamente,

$$t \mapsto u(t) \equiv \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Af(s, e(s))ds$$

é contínua. O integrando aqui é pelo menos fracamente contínuo, logo a integral faz (fraco) sentido. Primeiro observe que

$$u(t+h) - u(t) = (e^{Ah} - I)u(t) + \int_t^{t+h} e^{A(t+h-s)}Af(s, e(s))ds$$

e $\|Af(s, e(s))\|_{E_0}$ é limitado, logo $\|u(t+h) - u(t)\|_{E_0} \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0^+$ para cada $t \geq 0$; isto é, $u(t)$ é contínua a direita. Segue que $Ae(t)$ é contínua a direita, logo $s \mapsto Af(s, e(s))$ é também contínua a direita. Agora para cada $t_0 < t \leq t_2$

$$\begin{aligned} u(t) - u(t-h) &= \int_{t_0}^{t_0+h} \mathbf{e}^{A(t-s)} Af(s, e(s)) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{t-h} \mathbf{e}^{A(t-h-s)} [Af(s+h, e(s+h)) - Af(s, e(s))] ds \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $h \rightarrow 0^+$. Logo u é também contínuo a esquerda, $Ae(\cdot)$ é contínua e e é uma solução forte. O argumento aqui apela para o teorema da convergência dominada. $\square$

Teorema 6.1.6 *Assuma que A , U e f são como no Teorema 6.1.2 e suponha que $f_n : U \rightarrow E_0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) também satisfaz as condições do Teorema 6.1.2. Suponha que $e : [t_0, t_1) \rightarrow E_0$ é uma solução fraca de (6.1) e que $f_n(t, e) \rightarrow f(t, e)$ quando $n \rightarrow \infty$ uniformemente para (t, e) em uma vizinhança de cada ponto $(\tau, e(\tau))$, $t_0 \leq \tau < t_1$. Seja $\{e_{n0}\}$ uma seqüência em E_0 convergente para $e_0 \in E_0$ e e_n uma solução fraca de*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e_n &= Ae_n + f_n(t, e_n(t)) \\ e_n(t_0) &= e_{n0} \end{aligned} \tag{6.5}$$

em um intervalo maximal $[t_0, t_n)$. Dado $t_0 < t^* < t_1$, para n grande, e_n está definido em $[t_0, t^*]$; isto é, $t_n > t^*$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t_0 \leq t \leq t^*} \|e_n(t) - e(t)\|_{E_0} = 0.$$

Prova: Pela compacidade de $\{(\tau, e(\tau)) : t_0 \leq \tau \leq t^*\} \subset U$, podemos escolher $r > 0$, L e $\epsilon_n > 0$ tal que, para y, z na bola fechada de raio r em torno de $e(\tau)$,

$$\|f(\tau, y) - f(\tau, z)\|_{E_0} \leq L\|y - z\|_{E_0}$$

e $\|f_n(\tau, y) - f(\tau, y)\|_{E_0} \leq \epsilon_n$, $t_0 \leq \tau \leq t^*$, $\epsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Também $\|\mathbf{e}^{At}\|_{L(E_0)} \leq M$ em $0 \leq t \leq t^* - t_0$.

Escolha n_0 tal que $n \geq n_0$ implica

$$M[\|e_n(t_0) - e(t_0)\|_{E_0} + \epsilon_n(t^* - t_0)] \mathbf{e}^{ML(t^* - t_0)} < r.$$

Então $\|\mathbf{e}^{A(t-t_0)}(e_n(t_0) - e(t_0))\| < r$ e $\|e_n(t) - e(t)\|_{E_0} < r$ para t próximo a t_0 . De fato: digamos que $n \geq n_0$ e $\|e_n(s) - e(s)\|_{E_0} \leq r$ para $t_0 \leq s < t \leq t^*$; então

$$\begin{aligned} \|e_n(t) - e(t)\|_{E_0} &\leq \|\mathbf{e}^{A(t-t_0)}(e_n(t_0) - e(t_0))\|_{E_0} \\ &\quad + \left\| \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A(t-s)} (f_n(s, e_n(s)) - f(s, e_n(s))) ds \right\|_{E_0} \\ &\quad + \left\| \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A(t-s)} (f(s, e_n(s)) - f(s, e(s))) ds \right\|_{E_0} \\ &\leq M\|e_n(t_0) - e(t_0)\|_{E_0} + M\epsilon_n(t - t_0) \\ &\quad + \int_{t_0}^t ML\|e_n(s) - e(s)\|_{E_0} ds. \end{aligned}$$

A desigualdade de Gronwall mostra que $\|e_n(t) - e(t)\|_{E_0} < r$ (se $n \geq n_0$) logo a desigualdade vale para todo $t_0 \leq t \leq t^*$ e

$$\|e_n(t) - e(t)\|_{E_0} \leq M[\|e_n(t_0) - e(t_0)\|_{E_0} + \epsilon_n(t - t_0)] \mathbf{e}^{ML(t-t_0)} \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$. $\square$

Corolário 6.1.1 *Assuma que A, U e f são como no Teorema 6.1.2 e que f é também continuamente diferenciável. Dado qualquer solução fraca $e : [t_0, t_1] \rightarrow E_0$ e $t_0 < t^* < t_1$, existem soluções fortes $e_n : [t_0, t^*] \rightarrow E_0$, ($n = 1, 2, 3, \dots$), tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t_0 \leq t \leq t^*} \|e_n(t) - e(t)\|_{E_0} = 0$.*

Prova: Seja $f_n = f$, $e_n(t_0) \in D(A)$ com $\|e_n(t_0) - e(t_0)\|_{E_0} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Cada solução fraca e_n é uma solução forte pelo Teorema 6.1.4. $\square$

6.2 O Caso Parabólico

Nesta seção consideramos problemas de Cauchy da forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e &= -Ae + f(t, e), \\ e(t_0) &= e_0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ é um operador setorial positivo.

Recorde que se o operador A ou (uma translação deste) é de tipo positivo podemos definir as suas potências fracionárias A^α , $\alpha \in \mathbb{R}$. Denote por E^α o domínio de A^α dotado com a norma do gráfico. É claro que E^α é um espaço de Banach e que a restrição de $\{e^{-At}; t \geq 0\}$ a E^α é um semigrupo fortemente contínuo em E^α , visto que

$$A^\alpha e^{-At}e = e^{-At}A^\alpha e, \quad \forall t \geq 0, e \in E^\alpha.$$

Com as informações que temos até agora podemos obter teoremas de existência e regularidade apropriados para o caso parabólico. Alguns argumentos são paralelos a aqueles dados para o caso hiperbólico e portanto serão apenas indicados aqui. Note que, como $-A$ é gerador de um semigrupo fortemente contínuo, os resultados obtidos para o caso hiperbólico também se aplicam a (6.6). O que faremos aqui é mostrar que, sob condições bastante razoáveis, toda solução de (6.6) com dados iniciais em algum E^α , $\alpha < 1$ são soluções fortes. Também estaremos lidando com uma classe mais ampla de não linearidades f , permitindo que dependa de $A^\alpha e$, por exemplo.

Definição 6.2.1 *Seja E_0 um espaço de Banach, $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ um operador setorial e escolha $a \geq 0$ (se necessário) tal que $(-\infty, 0] \subset \rho(A + a)$. Seja $0 \leq \alpha \leq 1$ e $E^\alpha = D((A + a)^\alpha)$ com a norma do gráfico $\|\cdot\|_\alpha = \|(A + a)^\alpha \cdot\|_{E_0}$.*

Seja $U \subset \mathbb{R} \times E^\alpha$ um aberto e $f : U \rightarrow E_0$ contínua. Uma solução de (6.6) em $[t_0, t_1]$ é uma função contínua $e : [t_0, t_1] \rightarrow E_0$ que é diferenciável em (t_0, t_1) e tal que $(t, e(t)) \in U$, $t_0 \leq t < t_1$, $e(t) \in D(A)$, $t_0 < t < t_1$, $t \mapsto Ae(t) : (t_0, t_1) \rightarrow E_0$ é contínua e (6.6) está satisfeita.

O teorema a seguir mostra que o conceito de solução fraca não se faz necessário para (6.6).

Teorema 6.2.1 *Suponha que E_0, A, α, U e f são como na Definição (6.2.1) e assuma que f é localmente Hölder contínua; isto é, qualquer ponto de U tem uma vizinhança $V \subset U$ e constantes $K, \eta > 0$, tais que quando (τ_1, e_1) e (τ_2, e_2) estão em V*

$$\|f(\tau_1, e_1) - f(\tau_2, e_2)\|_{E_0} \leq K(|\tau_1 - \tau_2|^\eta + \|e_1 - e_2\|_{E^\alpha}^\eta).$$

Se $e : [t_0, t_1] \rightarrow E^\alpha$ é contínua, $(t, e(t)) \in U$, $t_0 \leq t \leq t_1$, e

$$e(t) = e^{-A(t-t_0)}e(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}f(s, e(s))ds, \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

então $e(t)$ é uma solução forte de (6.6).

Prova: Primeiramente mostraremos que $e : (t_0, t_1] \rightarrow E^\alpha$ é Hölder contínua. Como $\{(t, e(t)) : t_0 \leq t \leq t_1\}$ é um subconjunto compacto de U , existe B tal que $\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \|f(t, e(t))\|_{E_0} \leq B$. Então para $t_0 < t \leq t+h \leq t_1$,

$$\begin{aligned} e(t+h) - e(t) &= (\mathbf{e}^{-Ah} - I)[\mathbf{e}^{-A(t-t_0)}e(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A(t-s)}f(s, e(s))ds] \\ &\quad + \int_t^{t+h} \mathbf{e}^{-A(t+h-s)}f(s, e(s))ds \end{aligned}$$

logo, se $0 < \theta < 1 - \alpha$, e M é dada pelo Teorema 2.5.1

$$\begin{aligned} \|e(t+h) - e(t)\|_\alpha &\leq Mh^\theta(t-t_0)^{-\theta}\|e(t_0)\|_\alpha + \int_{t_0}^t Mh^\theta(t-s)^{-\alpha-\theta}Bds \\ &\quad + \int_t^{t+h} M(t+h-s)^{-\alpha}Bds \\ &= O(h^\theta(t-t_0)^{-\theta}). \end{aligned}$$

Segue que $t \mapsto f(t, e(t)) \equiv g(t)$ é contínua em $[t_0, t_1]$ e satisfaz uma condição de Hölder

$$\|g(t+h) - g(t)\|_{E_0} \leq K(t-t_0)^{-\delta}h^\delta, \quad t_0 < t \leq t+h \leq t_1,$$

para alguma escolha de $K, \delta > 0$ (e $0 < \delta < 1 - \alpha$, sem perda de generalidade). É suficiente provar que

$$G(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A(t-s)}g(s)ds$$

toma valores em $D(A)$ com $t \rightarrow AG(t)$ contínua em $(t_0, t_1]$, e portanto mostraremos que $h^{-1}(\mathbf{e}^{-Ah} - I)G(t)$ converge quando $h \rightarrow 0^+$, uniformemente para $t_0^* \leq t \leq t_1$, qualquer que seja $t_0^* > t_0$. Agora

$$\begin{aligned} h^{-1}(\mathbf{e}^{-Ah} - I)G(t) &= \int_{t_0}^t h^{-1}(\mathbf{e}^{-Ah} - I)\mathbf{e}^{-A(t-s)}(g(s) - g(t))ds \\ &\quad + h^{-1} \int_{t_0}^{t_0+h} \mathbf{e}^{-A(t+h-s)}g(t)ds - h^{-1} \int_{t-h}^t \mathbf{e}^{-A(t-s)}g(t)ds \end{aligned}$$

e os dois últimos termos são claramente convergentes uniformemente em t . Para o outro termo, primeiramente note que

$$\int_{t_0}^t \|A\mathbf{e}^{-A(t-s)}\|_{L(E_0)}\|g(t) - g(s)\|_{E_0}ds < \infty$$

da condição de Hölder, e

$$\begin{aligned} &\|h^{-1} \int_{t_0}^t (\mathbf{e}^{-Ah} - I + hA)\mathbf{e}^{-A(t-s)}(g(s) - g(t))ds\|_{E_0} \\ &= \left\| \int_{t_0}^t h^{-1} \int_0^h (I - \mathbf{e}^{-A\sigma})d\sigma A\mathbf{e}^{-A(t-s)}(g(s) - g(t))ds \right\|_{E_0} \\ &\leq \int_{t_0}^t Mh^\epsilon(t-s)^{-1-\epsilon}K(s-t_0)^{-\delta}(t-s)^\delta ds \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0, \quad 0 < \epsilon < \delta \end{aligned}$$

uniformemente para $t_0^* \leq t \leq t_1$.

Portanto, $h^{-1}(\mathbf{e}^{-Ah} - I)G(t) \rightarrow - \int_{t_0}^t A\mathbf{e}^{-A(t-s)}(g(s) - g(t))ds + \mathbf{e}^{-A(t-t_0)}g(t) - g(t)$ quando $h \rightarrow 0^+$ uniformemente em $[t_0^*, t_1]$, e a prova está completa. $\square$

As integrais impróprias que aparecem nas estimativas obtidas através da formula da variação das constantes no caso parabólico tornam necessário a obtenção de uma desigualdade de Gronwal onde as funções conhecidas possuem singularidades. Uma dessas desigualdades é obtida no lema a seguir (veja [11]).

Lema 6.2.1 *Assuma que $a, b \geq 0$, $0 \leq \alpha, \beta < 1$ e $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável com*

$$0 \leq u(t) \leq at^{-\alpha} + b \int_0^t (t-s)^{-\beta} u(s) ds \quad (6.7)$$

quase sempre em $(0, T)$. Então, existe uma constante K dependendo somente de b, β, T tal que

$$u(t) \leq \frac{K}{1-\alpha} at^{-\alpha}$$

quase sempre em $(0, T)$.

Prova: Defina a transformação $B : \phi \mapsto \{b \int_0^t (t-s)^{-\beta} \phi(s) ds, 0 \leq t \leq T\}$. Então, a desigualdade (6.7) pode ser escrita na forma

$$0 \leq u(t) \leq u_0(t) + Bu(t),$$

onde $u_0(t) = at^{-\alpha}$. É claro que B preserva ordem e portanto

$$0 \leq u(t) \leq u_0(t) + Bu(t) \leq u_0(t) + Bu_0(t) + B^2u(t) \leq \dots \leq \sum_{k=0}^{m-1} B^k u_0(t) + B^m u(t)$$

para $m = 1, 2, 3, \dots$. Vamos mostrar que a série $\sum_{n=0}^{\infty} B^n u_0(t)$ converge e que $B^n u(t) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e depois obter a estimativa

$$\sum_{n=0}^{\infty} B^n u_0(t) \leq \frac{K}{1-\alpha} at^{-\alpha}.$$

Suponha, por indução, que

$$B^{n-1} \phi(t) = \int_0^t \frac{(b\Gamma(1-\beta))^{n-1}}{\Gamma((n-1)(1-\beta))} (t-s)^{(n-1)(1-\beta)-1} \phi(s) ds \quad n \geq 2,$$

então obtemos

$$\begin{aligned} B(B^{n-1} \phi)(t) &= b \int_0^t (t-s)^{-\beta} \left[\int_0^s \frac{(b\Gamma(1-\beta))^{n-1}}{\Gamma((n-1)(1-\beta))} (s-\theta)^{(n-1)(1-\beta)-1} \phi(\theta) d\theta \right] ds \\ &= \frac{b^n \Gamma(1-\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)(1-\beta))} \int_0^t \phi(\theta) \left[\int_{\theta}^t (t-s)^{-\beta} (s-\theta)^{(n-1)(1-\beta)-1} \phi(\theta) ds \right] d\theta \\ &= \frac{b^n \Gamma(1-\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)(1-\beta))} \int_0^t \phi(\theta) \left[\int_0^{t-\theta} (t-\theta-u)^{-\beta} u^{(n-1)(1-\beta)-1} du \right] d\theta \\ &= \frac{b^n \Gamma(1-\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)(1-\beta))} \int_0^t \phi(\theta) (t-\theta)^{n(1-\beta)-1} \int_0^1 (1-z)^{-\beta} z^{(n-1)(1-\beta)-1} dz d\theta \\ &= \frac{b^n \Gamma(1-\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)(1-\beta))} \mathbf{B}(1-\beta, (n-1)(1-\beta)) \int_0^t \phi(\theta) (t-\theta)^{n(1-\beta)-1} d\theta \\ &= \frac{b^n \Gamma(1-\beta)^n}{\Gamma(n(1-\beta))} \int_0^t \phi(\theta) (t-\theta)^{n(1-\beta)-1} d\theta \end{aligned}$$

onde utilizamos que $\mathbf{B}(x, y) = \int_0^1 z^{x-1} (1-z)^{y-1} dz = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Agora vamos estudar a convergência da série

$$S_\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n(1-\beta))}$$

note que se $a_n = \Gamma(n(1-\beta))^{-1}$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\Gamma(n(1-\beta))}{\Gamma((n+1)(1-\beta))} = \frac{\mathbf{B}((1-\beta), n(1-\beta))}{\Gamma(1-\beta)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^1 t^{-\beta} (1-t)^{n(1-\beta)-1} dt \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$ pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Isto mostra que $B^n \phi(t) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e segue que

$$u(t) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (B^n u_0)(t).$$

Resta encontrar uma estimativa para a série acima. Note que

$$\begin{aligned} B^n u_0(t) &= a \frac{b^n \Gamma(1-\beta)^n}{\Gamma(n(1-\beta))} \int_0^t (t-s)^{n(1-\beta)-1} s^{-\alpha} ds \\ &= a t^{-\alpha} \frac{z^{n(1-\beta)}}{\Gamma(n(1-\beta))} \mathbf{B}(1-\alpha, n(1-\beta)) \\ &\leq \frac{a}{1-\alpha} t^{-\alpha} z^{n(1-\beta)} \Gamma(n(1-\beta)) \end{aligned}$$

onde $z = t(b\Gamma(1-\beta))^{1/(1-\beta)}$. Defina, para $z \geq 0$,

$$E_\beta(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n(1-\beta)}}{\Gamma(n(1-\beta) + 1)}.$$

A convergência da série acima pode ser garantida como antes. Pode ser provado (veja [10], página 38) que $E_\beta(z) \leq c e^z$.

Escolha um número natural k tal que $k(1-\beta) > 1$, então

$$\begin{aligned} S_\beta(z) &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{z^{j(1-\beta)}}{\Gamma(j(1-\beta))} + \frac{z^{k(1-\beta)}}{\Gamma(k(1-\beta))} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n(1-\beta)}}{\Gamma(n(1-\beta) + 1)} \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{z^{j(1-\beta)}}{\Gamma(j(1-\beta))} + c \frac{z^{k(1-\beta)}}{\Gamma(k(1-\beta))} e^z \end{aligned}$$

para algum $c > 0$. Disto obtemos que

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \frac{a}{1-\alpha} t^{-\alpha} \left[\sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^{j(1-\beta)} (b\Gamma(1-\beta))^j}{\Gamma(j(1-\beta))} \right. \\ &\quad \left. + c (b\Gamma(1-\beta))^k \frac{t^{k(1-\beta)}}{\Gamma(k(1-\beta))} e^{t(b\Gamma(1-\beta))^{1/(1-\beta)}} \right] \end{aligned}$$

e o resultado segue. Observe que de fato provamos mais do que está enunciado. A prova do resultado enunciado somente utiliza a continuidade de S_β , não fazendo uso dos resultados em ([10]). $\square$

Teorema 6.2.2 *Assuma que E_0 é um espaço de Banach, A é um operador setorial em E_0 , $0 \leq \alpha < 1$, E^α é definido como anteriormente e U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times E^\alpha$. Suponha que $f : U \rightarrow E_0$ é localmente Hölder contínua e localmente Lipschitz contínua em seu segundo argumento; ou seja, em uma vizinhança de qualquer ponto de U temos*

$$\|f(t, e_1) - f(s, e_2)\|_{E_0} \leq C(|t - s|^\theta + \|e_1 - e_2\|_{E^\alpha})$$

para algum $\theta > 0$. Dado qualquer $(t_0, e_0) \in U$, existe uma única solução $e : [t_0, t_1] \rightarrow E_0$ de (6.6) definida em um intervalo maximal. Adicionalmente, se $e_0 \in D(A)$ a derivada é contínua quando $t \rightarrow t_0^+$. Se $t_1 < \infty$ então, quando $t \rightarrow t_1$ ou $(t, e(t))$ tende para algum ponto de ∂U ou

$$\frac{\|f(t, e(t))\|_{E_0}}{1 + \|e(t)\|_{E^\alpha}}$$

é ilimitada (ou ambos).

Prova: Como no Teorema 6.1.2 e no Teorema 6.1.3, primeiramente provamos a existencia local obtendo que a transformação

$$G(e)(t) = e^{-A(t-t_0)}e_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(s, e(s))ds, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T$$

é uma contração em uma bola fechada $B_r \subset C([t_0, t_0 + T], E^\alpha)$, quando $e : [t_0, t_0 + T] \rightarrow E^\alpha$ é contínua com $\sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + T} \|e(t) - e_0\|_{E^\alpha} \leq r$; isto é, $e(\cdot) \in B_r$. Escolhemos $r, T > 0$ pequenos de forma que para $t \in [t_0, t_0 + T]$ e $\|e_i - e_0\|_{E^\alpha} \leq r$, temos $(t, e_i) \in U$, $\|f(t, e_i)\|_{E_0} \leq B$, $i = 1, 2$ e

$$\|f(t, e_1) - f(t, e_2)\|_{E_0} \leq L\|e_1 - e_2\|_{E^\alpha}, \quad 0 \leq s \leq T$$

$$\|e^{-As}z\|_{E^\alpha} \leq M\|z\|_{E^\alpha}, \quad 0 \leq s \leq T$$

$$\|e^{-As}z\|_{E^\alpha} \leq Ms^{-\alpha}\|z\|_{E_0}, \quad 0 < s \leq T$$

$$\|e^{-As}e_0 - e_0\|_{E^\alpha} \leq r/2, \quad 0 \leq s \leq T$$

$$\frac{MBT^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq r/2,$$

$$\frac{MLT^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq 1/2,$$

onde adotamos o procedimento seguinte: primeiramente escolha r e um T_0 para encontrar B, L, M ; então escolha um T menor que T_0 para ter as condições acima satisfeitas.

Com estas escolhas, G leva B_r nela mesma e é uma contração na norma de $C([t_0, t_0 + T], E^\alpha)$, logo existe um ponto fixo. Segue do Teorema 6.2.1, ela é uma solução de (6.6).

Para provar a unicidade, suponha que $e, \tilde{e}$ são duas soluções de (6.6), ambas definidas em $[t_0, t_2]$. Se elas coincidem em $[t_0, t_3]$ mas não coincidem em um intervalo maior, podemos substituir t_0 por t_3 . Logo, assumamos que $e(t) \neq \tilde{e}(t)$ para t arbitrariamente próximo de t_0 , $t > t_0$. Como $e, \tilde{e}$ são contínuas, podemos assumir que isto ocorre para $t \in [t_0, t_0 + T]$ e $\|e(t) - e_0\|_{E^\alpha} \leq r$, $\|\tilde{e}(t) - e_0\|_{E^\alpha} \leq r$. Mas as restrições de $e, \tilde{e}$ a $[t_0, t_0 + T]$ são pontos fixos de G , contradizendo a unicidade dos pontos fixos.

Estendemos as soluções locais ao intervalo maximal de existência como no Teorema 6.1.3 e completamos a prova aplicando a desigualdade de Gronwall do Lema 6.2.1. $\square$

O teorema a seguir nos dá informações adicionais sobre a regularidade das soluções de (6.6).

Teorema 6.2.3 *Assuma que E_0, A, α, U, f são como no Teorema 6.2.2 e assumamos que $t \mapsto f(t, e)$ satisfaz uma condição de Hölder local com expoente $\theta \leq 1$, próximo de cada $(t, e) \in U$. Então, qualquer solução $e : [t_0, t_1] \rightarrow E^\alpha$ de (6.6) é tal que $t \mapsto \frac{d}{dt}e(t) \in E^\gamma$ é localmente Hölder contínua em (t_0, t_1) para qualquer $0 \leq \gamma < \theta$ e $\|\frac{d}{dt}e(t)\|_{E^\gamma} = O((t - t_0)^{\alpha-\gamma-1})$ quando $t \rightarrow t_0$.*

Prova: Como $[t_0, t_1]$ é um intervalo compacto, para algum $h_0 > 0$, se $t_0 \leq t \leq t+h \leq t_1$, $0 \leq h \leq h_0$, $\|f(t, e(t))\|_{E_0} \leq B$ e

$$\|f(t+h, e(t+h)) - f(t, e(t))\|_{E_0} \leq L(h^\theta + \|e(t+h) - e(t)\|_{E^\alpha}),$$

para alguma escolha de B, L . Se M é tal que

$$\|\mathbf{e}^{-As}z\|_{E^\alpha} \leq M\|z\|_{E^\alpha}, \quad 0 \leq s \leq t_1 - t_0$$

$$\|\mathbf{e}^{-As}z\|_{E^\alpha} \leq Ms^{-\alpha}\|z\|_{E_0}, \quad 0 \leq s \leq t_1 - t_0$$

$$\|\mathbf{e}^{-As}z - z\|_{E_0} \leq Ms^\theta\|z\|_{E^\theta}, \quad 0 \leq s \leq t_1 - t_0$$

temos

$$\begin{aligned} \|e(t+h) - e(t)\|_{E^\alpha} &\leq M^2 h^\theta (t-t_0)^{-\theta} \|e(t_0)\|_{E^\alpha} + \int_{t_0}^{t_0+h} M(t+h-s)^{-\alpha} B ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t M(t-s)^{-\alpha} L[h^\theta + \|e(s+h) - e(s)\|_{E^\alpha}] ds \\ &\leq C h^\theta [(t-t_0)^{-\theta} + (t-t_0)^{-\alpha}] \\ &\quad + ML \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} \|e(s+h) - e(s)\|_{E^\alpha} ds. \end{aligned}$$

Em seguida, usamos o Lema 6.2.1 para concluir $\|e(t+h) - e(t)\|_{E^\alpha} = O(h^\theta [(t-t_0)^{-\theta} + (t-t_0)^{-\alpha}])$ e portanto $g(t) := f(t, e(t))$ satisfaz

$$\|g(t+h) - g(t)\|_{E_0} \leq Kh^\theta [(t-t_0)^{-\theta} + (t-t_0)^{-\alpha}], \quad \|g(t)\|_{E_0} \leq B$$

para $t_0 < t \leq t+h \leq t_1$, $0 \leq h \leq h_0$.

Mostramos na prova do Teorema 6.2.1 que

$$-A \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A(t-s)} g(s) ds = - \int_{t_0}^t A \mathbf{e}^{-A(t-s)} (g(s) - g(t)) ds + \mathbf{e}^{-A(t-t_0)} g(t) - g(t)$$

e segue que

$$\frac{d}{dt} e(t) = -Ae(t) + g(t) = -A\mathbf{e}^{-A(t-t_0)} e(t_0) + \mathbf{e}^{-A(t-t_0)} g(t) + G(t)$$

onde $G(t) = \int_{t_0}^t A \mathbf{e}^{-A(t-s)} (g(s) - g(t)) ds$. Somente o último termo G apresenta dificuldades. Mostraremos que $\|G(t+h) - G(t)\|_{E^\gamma} = O(h^{\theta-\gamma})$ quando $h \rightarrow 0^+$, sempre que $0 \leq \gamma < \theta$ e $t_0 < t \leq t_1$.

Agora,

$$\begin{aligned} G(t+h) - G(t) &= \int_{t_0}^{t_0+h} A \mathbf{e}^{-A(t+h-s)} (g(s) - g(t+h)) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t A \mathbf{e}^{-A(t-s)} (g(s+h) - g(t+h) - g(s) + g(t)) ds \end{aligned}$$

e $\|g(t+h) - g(s+h) - g(t) + g(s)\|_{E_0} \leq 2K[(s-t_0)^{-\theta} + (s-t_0)^{-\alpha}] \min\{(t-s)^\theta, h^\theta\}$ logo

$$\begin{aligned} \|G(t+h) - G(t)\|_{E^\gamma} &\leq O(h) \\ &\quad + O\left(\int_{t_0}^{t-h} h^\theta (t-s)^{-1-\gamma} [(s-t_0)^{-\theta} + (s-t_0)^{-\alpha}] ds\right) \\ &\quad + O\left(\int_{t-h}^t (t-s)^{-1-\gamma+\theta} [(s-t_0)^{-\theta} + (s-t_0)^{-\alpha}] ds\right) \\ &= O(h^{\theta-\gamma}), \quad \text{quando } h \rightarrow 0^+. \square \end{aligned}$$

No caso particular de problemas autônomos temos o seguinte resultado:

Corolário 6.2.1 *Assuma que E_0, A, α, U, f são como no Teorema 6.2.2 e assumamos que f é independente de t . Então, qualquer solução $e : [t_0, t_1] \rightarrow E^\alpha$ de (6.6) é tal que $t \mapsto \frac{d}{dt}e(t) \in E^\gamma$ é localmente Hölder contínua em (t_0, t_1) para qualquer $0 \leq \gamma < 1$ e $\|\frac{d}{dt}e(t)\|_{E^\gamma} = O((t - t_0)^{\alpha-\gamma-1})$ quando $t \rightarrow t_0$.*

Capítulo 7

Teoremas Espectrais e Dicotomias

7.1 Introdução

Antes de começarmos a estudar as informações contidas no espectro de um semigrupo ou de seu gerador recordamos alguns fatos básicos da teoria espectral de operadores fechados. Seja $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ um operador fechado. Sabemos que se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $\lambda - A$ é um a um e sobre então do Teorema do Gráfico fechado $(\lambda - A)^{-1} \in L(E_0)$ e dizemos que λ está no conjunto resolvente $\rho(A)$ de A . O espectro $\sigma(A)$ de A é o conjunto dos pontos que não estão no conjunto resolvente $\rho(A)$; isto é, $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Note que se $\xi_0 \in \rho(A)$ temos que

$$\xi - A = \xi - \xi_0 + \xi_0 - A = [(\xi - \xi_0)(\xi_0 - A)^{-1} + I](\xi_0 - A)$$

e se $|\xi - \xi_0| < \|(\xi_0 - A)^{-1}\|_{L(E_0)}^{-1}$ temos que $\xi \in \rho(A)$. Segue disto que $\rho(A)$ é aberto e $\sigma(A)$ é fechado. Além disso

$$(\xi - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\xi_0 - \xi)^n (\xi_0 - A)^{-n-1}, \quad (7.1)$$

mostrando que $\xi \mapsto (\xi - A)^{-1}$ é uma função analítica em $\rho(A)$ e que

$$\left(\frac{d}{d\xi}\right)^n (\xi - A)^{-1} = (-1)^n n! (\xi - A)^{-n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Note também que

$$\begin{aligned} (\lambda - A)^{-1} - (\xi - A)^{-1} &= (\lambda - A)^{-1}((\xi - A) - (\lambda - A))(\xi - A)^{-1} \\ &= -(\lambda - A)^{-1}(\xi - \lambda)(\xi - A)^{-1} \\ &= (\xi - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\xi - A)^{-1}. \end{aligned}$$

Sendo esta última identidade conhecida como identidade do resolvente.

Cada componente conexa de $\rho(A)$ é o domínio natural de $(\xi - A)^{-1}$; isto é, $(\xi - A)^{-1}$ não pode ser estendida analiticamente além das fronteiras de $\rho(A)$.

No que segue assuma que $A \in L(E_0)$. Primeiramente mostremos que a sequência $\{\|A^n\|_{L(E_0)}^{1/n}\}_{n \geq 1}$ é convergente e que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|_{L(E_0)}^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|A^n\|_{L(E_0)}^{1/n}$$

este limite será chamado *raio espectral* e denotado por $r(A)$. Escrevendo a_n para $\log \|A^n\|_{L(E_0)}$, temos que provar que

$$a_n/n \rightarrow b = \inf_{n \geq 1} a_n/n.$$

Sabemos que

$$a_{m+n} \leq a_n + a_m.$$

Se m é um inteiro positivo fixo, faça $n = mq + r$, onde q, r são inteiros não negativos com $0 \leq r < m$. Então temos que $a_n \leq qa_m + a_r$ e

$$a_n/n \leq q/n a_m + 1/n a_r.$$

Se $n \rightarrow \infty$ e m é fixo, $q/n \rightarrow 1/m$ enquanto que r fica restrito a um dos números $0, 1, 2, \dots, m-1$. Portanto $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n/n \leq a_m/m$. Como m é arbitrário temos que $\limsup a_n/n \leq b$. Por outro lado $a_n/n \geq b$ e $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n/n \geq b$ e o resultado está provado.

Note que o raio de convergência da série (7.1) é o raio espectral do operador $(\xi_0 - A)^{-1}$. Por outro lado, se $|\xi|$ é grande temos que $(\xi - A)^{-1} = \xi^{-1}(1 - \xi^{-1}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{-n-1}A^n$ que é convergente sempre que $|\xi| > r(A)$. Reciprocamente se $\rho(A)$ contém o exterior do disco de raio r' então $r(A) \leq r'$.

7.2 Decomposição Espectral de Operadores Fechados

As vezes o espectro $\sigma(A)$ de um operador fechado A contém uma parte limitada σ' separada do resto σ'' de forma que uma curva fechada e retificável (ou mais geralmente um número finito de tais curvas) pode ser desenhada de forma a conter um conjunto aberto contendo σ' em seu interior e com σ'' em seu exterior. Em tal circunstância temos o seguinte teorema de decomposição

Teorema 7.2.1 *Assuma que $\sigma(A)$ pode ser decomposto em duas partes σ' e σ'' na forma descrita acima. Então temos uma decomposição de A de acordo com uma decomposição $E = E' \oplus E''$ do espaço de forma que o espectro das partes A' e A'' de A em E' e em E'' coincide com σ' e σ'' respectivamente e $A' \in L(E')$.*

Prova: Seja

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\xi - A)^{-1} d\xi.$$

É fácil ver que $P^2 = P \in L(E)$, de fato, se Γ' é uma outra curva com as mesmas propriedades de Γ e exterior a Γ , temos

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (\xi - A)^{-1} d\xi \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\eta - A)^{-1} d\eta \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\Gamma'} \int_{\Gamma} (\xi - A)^{-1} (\eta - A)^{-1} d\eta d\xi \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\Gamma'} \int_{\Gamma} \frac{(\xi - A)^{-1} - (\eta - A)^{-1}}{\eta - \xi} d\eta d\xi \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\Gamma'} \int_{\Gamma} \frac{1}{\eta - \xi} d\eta (\xi - A)^{-1} d\xi + \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} \frac{1}{\xi - \eta} d\xi (\eta - A)^{-1} d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\eta - A)^{-1} d\eta = P. \end{aligned}$$

Portanto P é uma projeção sobre $E' = R(P)$ ao longo de $E'' = N(P)$. Adicionalmente

$$P(\xi - A)^{-1} = (\xi - A)^{-1}P, \quad \xi \in \rho(A),$$

logo P comuta com A , o que significa que A pode ser decomposto de acordo com a decomposição $E = E' \oplus E''$ e as partes A' e A'' de A estão definidas.

É fácil ver que as partes de $(\xi - A)^{-1}$ em E' e E'' , são as inversas de $(\xi - A')$ e $(\xi - A'')$, respectivamente. Isto mostra que $\rho(A') \cap \rho(A'') \supset \rho(A)$. Contudo, $\rho(A')$ também contém σ'' . Para ver isto primeiramente observe que $(\xi - A)^{-1}|_{E'} u = (\xi - A)^{-1}u = (\xi - A)^{-1}Pu$ para $u \in E'$, $\xi \in \rho(A)$. Mas para cada $\xi \in \rho(A)$ que não está em Γ , temos

$$(\xi - A)^{-1}P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\xi - A)^{-1}(\xi' - A)^{-1} d\xi' = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} ((\xi - A)^{-1} - (\xi' - A)^{-1}) \frac{d\xi'}{\xi - \xi'}.$$

Se ξ está fora de Γ , isto nos dá

$$(\xi - A)^{-1}P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\xi' - A)^{-1} \frac{d\xi'}{\xi' - \xi}.$$

Como o lado direito da expressão acima é analítico fora de Γ , segue que $(\xi - A)^{-1}P$, e portanto $(\xi - A)^{-1}|_{E'}$, tem uma continuação analítica fora de Γ e esta é o resolvente de A' . Portanto $\rho(A')$ contém o exterior de Γ e portanto $\sigma(A') \subset \sigma'$.

Semelhantemente, segue que para ξ dentro de Γ

$$(\xi - A)^{-1}P = (\xi - A)^{-1} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\xi' - A)^{-1} \frac{d\xi'}{\xi' - \xi}.$$

Isto mostra que $(\xi - A)^{-1}(I - P)$ tem uma continuação analítica dentro de Γ . Como antes, isto leva a conclusão que $\sigma(A'') \subset \sigma''$.

Por outro lado, um ponto $\xi \in \sigma(A)$ não pode pertencer a ambos $\rho(A')$ e $\rho(A'')$; caso contrário pertenceria a $\rho(A)$ já que $(\xi - A)^{-1}|_{E'} P + (\xi - A)^{-1}|_{E''} (I - P)$ seria igual à inversa de $(\xi - A)$. Isto mostra que $\sigma(A) \subset \sigma(A') \cup \sigma(A'')$ e portanto $\sigma(A') = \sigma'$, $\sigma(A'') = \sigma''$.

Finalmente note que

$$PA \subset AP = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} A(\xi - A)^{-1} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \xi(\xi - A)^{-1} d\xi.$$

Isto mostra que $A' \in L(E')$ e completa a prova. $\square$

7.3 Decomposição Espectral de Semigrupos

Quando aplicamos semigrupos a teoria de estabilidade um dos problemas fundamentais é determinar o espectro do semigrupo de operadores. Em geral o semigrupo é desconhecido e somente o seu gerador é conhecido. Se podemos calcular algumas das propriedades espectrais do gerador de um semigrupo gostaríamos de utilizar estas propriedades para entender o espectro do semigrupo.

Primeiramente mostramos que informações o conhecimento do espectro do semigrupo nos fornece.

Teorema 7.3.1 *Assuma que $\{T(t), t \geq 0\} \subset L(E_0)$ é um semigrupo fortemente contínuo e suponha que para algum $t_0 > 0$ o espectro $\sigma(T(t_0))$ é disjunto da circunferência $\mathcal{C} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = e^{\alpha t_0}\}$ para algum α real. Então existe uma projeção $P \in L(E_0)$, $P^2 = P$, $PT(t) = T(t)P$ para todo $t \geq 0$ tal que com $E_+ = R(P)$ e $E_- = N(P)$, as restrições $T(t)|_{E_{\pm}}$ estão em $L(E_{\pm})$ e*

$$\sigma(T(t)|_{E_+}) = \sigma(T(t)) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < e^{\alpha t}\}$$

$$\sigma(T(t)|_{E_-}) = \sigma(T(t)) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > e^{\alpha t}\}.$$

Existem constantes $M \geq 1$, $\delta > 0$ tais que

$$\|T(t)|_{E_+}\|_{L(E_+)} \leq M e^{(\alpha - \delta)t}, \quad \forall t \geq 0;$$

$\{T(t)|_{E_-}; t \geq 0\}$ se estende a um grupo em $L(E_-)$ com $T(t)|_{E_-} = (T(-t)|_{E_-})^{-1}$ para $t < 0$, e

$$\|T(t)|_{E_-}\|_{L(E_+)} \leq M e^{(\alpha+\delta)t}, \quad \forall t \leq 0.$$

Observação 7.3.1 A separação acima do espaço E_0 é um caso particular de dicotomia exponencial. Um caso ainda mais especial, mas claramente útil, é o caso em que $\sigma(T(t_0)) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < e^{\alpha t_0}\}$; isto é, $P = I$ e $E_- = \{0\}$; então

$$\|T(t)\|_{L(E_0)} \leq M e^{(\alpha-\delta)t}, \quad t \geq 0.$$

Prova: Defina

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} (\lambda - T(t_0))^{-1} d\lambda \in L(E).$$

Então, do Teorema 7.2.1, $P^2 = P$ e P é uma projeção contínua.

É fácil ver que $T(t)P = PT(t)$ para todo $t \geq 0$. Logo, se $E_+ = R(E_0)$ e $E_- = N(E_0)$ temos que $T(t)$ leva E_+ em E_+ e E_- em E_- .

Note ainda, do Teorema 7.2.1, que $\sigma(T(t_0)|_{E_+})$ é a parte de $\sigma(T(t_0))$ dentro de $\mathcal{C}$ e $\sigma(T(t_0)|_{E_-})$ é a parte de $\sigma(T(t_0))$ fora de $\mathcal{C}$ e que as partes de $(\lambda - T(t_0))^{-1}$ em E_+ e E_- coincidem com $((\lambda - T(t_0))|_{E_+})^{-1}$ e $((\lambda - T(t_0))|_{E_-})^{-1}$ respectivamente.

Agora o raio espectral de $T(t_0)|_{E_+}$ é estritamente menor que $e^{\alpha t_0}$, digamos

$$r(T(t_0)|_{E_+}) < e^{(\alpha-\delta)t_0},$$

para algum $\delta > 0$.

Se $t > 0$,

$$\begin{aligned} r(T(t)|_{E_+}) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|T(mt)|_{E_+}\|_{L(E_+)}^{\frac{1}{m}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(nt_0 + \tau)|_{E_+}\|_{L(E_+)}^{\frac{t}{nt_0 + \tau}}, \quad 0 \leq \tau < t_0 \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(nt_0)|_{E_+}\|_{L(E_+)}^{\frac{t}{nt_0 + \tau}} \|T(\tau)|_{E_+}\|_{L(E_+)}^{\frac{t}{nt_0 + \tau}} \\ &= r(T(t_0)|_{E_+})^{t/t_0} < e^{(\alpha-\delta)t} \end{aligned}$$

Também existe inteiro $N \geq 1$ tal que $Nt_0 \geq t$, consequentemente

$$T(Nt_0 - t)(T(t_0)|_{E_-})^{-N}$$

é a inversa de $T(t)|_{E_-}$ isto é, $T(-t)|_{E_-}$ e um argumento como aquele acima mostra que

$$r(T(t)|_{E_-}) < e^{(\alpha+\delta)t}, \quad t < 0.$$

É fácil ver que (considerando as componentes nos dois espaços)

$$\sigma(T(t)) = \sigma(T(t)|_{E_+}) \cup \sigma(T(t)|_{E_-}), \quad t > 0,$$

e as estimativas acima sobre os raios espectrais provam as afirmativas sobre o espectro.

As estimativas das normas são simples. Por exemplo, como $r(T(t_0)|_{E_+}) < e^{(\alpha-\delta)t_0}$,

$$\|T(nt_0)|_{E_+}\|_{L(E_+)}^{1/n} < e^{(\alpha-\delta)t_0}$$

quando n é grande, logo

$$\|T(nt_0)\|_{E_+} \leq M_0 e^{n(\alpha-\delta)t_0}$$

para todo $n \geq 0$ e algum $M_0 \geq 1$. Logo, para $n = 0, 1, 2, \dots$ e $0 \leq \tau < t_0$,

$$\|T(nt_0 + \tau)\|_{E_+} \leq M_0 e^{n(\alpha-\delta)t_0} \|T(\tau)\|_{E_+} \leq M e^{(\alpha-\delta)(nt_0 + \tau)}$$

onde $M = M_0 \sup_{0 \leq \tau \leq t_0} e^{-(\alpha-\delta)\tau} \|T(\tau)\|_{E_+}$. $\square$

7.4 Teoremas Espectrais para Semigrupos

O teorema da aplicação espectral (Veja [9], VII.3.11) diz que $\sigma(e^{At}) = e^{t\sigma(A)}$ quando $A \in L(E_0)$; isto não é verdade, em geral, se A é um operador ilimitado. O problema é que e^{At} pode ter pontos no espectro que não são autovalores e que não estão relacionados ao espectro de A .

Lema 7.4.1 *Seja $\{e^{At} : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo. Se*

$$B_\lambda(t)e = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} e^{As} ds \quad (7.2)$$

então

$$(\lambda - A)B_\lambda(t)e = e^{\lambda t}e - e^{At}e, \quad \forall e \in E_0 \quad (7.3)$$

e

$$B_\lambda(t)(\lambda - A)e = e^{\lambda t}e - e^{At}e, \quad \forall e \in D(A). \quad (7.4)$$

Prova: Para todo λ fixo e t , $B_\lambda(t)$ definido por (7.2) é um operador em $L(E_0)$. Adicionalmente, para todo $e \in E_0$ temos

$$\begin{aligned} \frac{e^{Ah} - I}{h} B_\lambda(t)e &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_h^t e^{\lambda(t-s)} e^{As} ds + \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_t^{t+h} e^{\lambda(t-s)} e^{As} ds \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_0^h e^{\lambda(t-s)} e^{As} ds. \end{aligned}$$

Quando $h \rightarrow 0^+$ o lado direito da expressão acima converge para $\lambda B_\lambda(t)e + e^{At}e - e^{\lambda t}e$ e consequentemente $B_\lambda(t)e \in D(A)$ e

$$AB_\lambda(t)e = \lambda B_\lambda(t)e + e^{At}e - e^{\lambda t}e$$

o que implica (7.3). Da definição $B_\lambda(t)$ é claro para $e \in D(A)$, $AB_\lambda(t)e = B_\lambda(t)Ae$ e (7.4) segue. $\square$

Teorema 7.4.1 *Seja $\{e^{At}; t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo. Então,*

$$\sigma(e^{At}) \supset e^{t\sigma(A)}, \quad t \geq 0. \quad (7.5)$$

Prova: Seja $e^{\lambda t} \in \rho(e^{At})$ e seja $Q = (e^{\lambda t} - e^{At})^{-1}$. O operador $B_\lambda(t)$, definido por (7.2) e Q claramente comutam. De (7.3) e (7.4) deduzimos que

$$(\lambda - A)B_\lambda(t)Qe = e, \quad \forall e \in E_0$$

e

$$QB_\lambda(t)(\lambda - A)e = e, \quad \forall e \in D(A).$$

Como B_λ e Q comutam também temos que

$$B_\lambda(t)Q(\lambda - A)e = e, \quad \forall e \in D(A).$$

Portanto, $\lambda \in \rho(A)$, $B_\lambda(t)Q = (\lambda - A)^{-1}$ e $\rho(e^{At}) \subset e^{t\rho(A)}$, o que implica (7.5). $\square$

Agora recorde que o espectro de A consiste de três partes mutualmente exclusivas: o espectro pontual $\sigma_p(A)$; o espectro residual $\sigma_r(A)$ e o espectro contínuo $\sigma_c(A)$. Estas partes são definidas da seguinte forma: $\lambda \in \sigma_p(A)$ se $(\lambda - A)$ não é injetiva; $\lambda \in \sigma_c(A)$ se $(\lambda - A)$ é injetiva, sua imagem é densa em E_0 mas não é sobrejetora e finalmente $\lambda \in \sigma_r(A)$ se $(\lambda - A)$ é um a um e sua imagem não é densa em E_0 . Dessas definições, é claro que $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ e $\sigma_r(A)$ são mutualmente exclusivos e sua união é $\sigma(A)$. A seguir estudamos as relações entre cada parte do espectro de A e a sua parte correspondente no espectro de e^{At} . Começamos com o espectro pontual.

Teorema 7.4.2 *Seja $\{e^{At}; t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo. Então*

$$e^{t\sigma_p(A)} \subset \sigma_p(e^{At}) \subset e^{t\sigma_p(A)} \cup \{0\}.$$

Mais precisamente, se $\lambda \in \sigma_p(A)$ então $e^{\lambda t} \in \sigma_p(e^{At})$ e se $e^{\lambda t} \in \sigma_p(e^{At})$ existe um inteiro k tal que $\lambda_k = \lambda + 2\pi i k/t \in \sigma_p(A)$.

Prova: Se $\lambda \in \sigma_p(A)$ existe um $e_0 \in D(A)$, $e_0 \neq 0$ tal que $(\lambda - A)e_0 = 0$. De (7.4) segue que $(e^{\lambda t} - e^{At})e_0 = 0$ e portanto $e^{\lambda t} \in \sigma_p(e^{At})$ o que prova a primeira inclusão. Para provar a segunda inclusão seja $e^{\lambda t} \in \sigma_p(e^{At})$ e seja $e_0 \neq 0$ tal que $(e^{\lambda t}I - e^{At})e_0 = 0$. Isto implica que a função contínua $s \mapsto e^{-\lambda s}T(s)e_0$ é periódica com período t e como ela não é identicamente nula, um de seus coeficientes de Fourier deve ser diferente de zero. Portanto, existe k tal que

$$e_k = \frac{1}{t} \int_0^t e^{-(2\pi i k/t)s} (e^{-\lambda s}T(s)e_0) ds \neq 0.$$

Mostraremos que $\lambda_k = \lambda + 2\pi i k/t$ é um autovalor de A . Seja $\|e^{At}\|_{L(E_0)} \leq M e^{\omega t}$. Para $\operatorname{Re} \mu > \omega$ temos

$$\begin{aligned} (\mu - A)^{-1}e_0 &= \int_0^\infty e^{-\mu s} e^{As} e_0 ds = \sum_{n=0}^\infty \int_{nt}^{(n+1)t} e^{-\mu s} e^{As} e_0 ds \\ &= \sum_{n=0}^\infty e^{n(\lambda - \mu)t} \int_0^t e^{-\mu s} e^{As} e_0 ds \\ &= (1 - e^{(\lambda - \mu)t})^{-1} \int_0^t e^{-\mu s} e^{As} e_0 ds \end{aligned} \tag{7.6}$$

onde usamos a periodicidade da função $s \mapsto e^{-\lambda s} e^{As} e_0$. A integral do lado direito de (7.6) é claramente uma função inteira e portanto $(\mu - A)^{-1}e_0$ pode ser estendida a uma função analítica com possíveis polos em $\lambda_n = \lambda + 2\pi i n/t$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Usando (7.6) é fácil mostrar que

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda_k} (\mu - \lambda_k)(\mu - A)^{-1}e_0 = e_k$$

e

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda_k} (\lambda_k - A)[(\mu - \lambda_k)(\mu - A)^{-1}]e_0 = 0.$$

Do fato que A é fechado segue que $e_k \in D(A)$ e que $(\lambda_k - A)e_k = 0$; isto é, $\lambda_k \in \sigma_p(A)$. $\square$

Agora lidamos com o espectro residual de A .

Teorema 7.4.3 *Seja $\{e^{At}; t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo. Então,*

1. *Se $\lambda \in \sigma_r(A)$ e $\lambda_n = \lambda + 2\pi i n/t \notin \sigma_p(A)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, então $e^{\lambda t} \in \sigma_r(e^{At})$.*

2. Se $\mathbf{e}^{\lambda t} \in \sigma_r(\mathbf{e}^{At})$ então, $\lambda_n = \lambda + 2\pi in/t \notin \sigma_p(A)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, e existe um k tal que $\lambda_k \in \sigma_r(A)$.

Prova: Se $\lambda \in \sigma_r(A)$ então existe $e^* \in E_0^*$, $e^* \neq 0$ tal que $\langle e^*, (\lambda - A)e \rangle = 0$ para todo $e \in D(A)$. De (7.3) segue que $\langle e^*, (\mathbf{e}^{\lambda t} - \mathbf{e}^{At})e \rangle = 0$ para todo $e \in E_0$ e portanto a imagem de $\mathbf{e}^{\lambda t} - \mathbf{e}^{At}$ não é densa em E_0 . Se $\mathbf{e}^{\lambda t} - \mathbf{e}^{At}$ não é um-a-um, pelo Teorema 7.4.2 existe k tal que $\lambda_k \in \sigma_p(A)$ contradizendo a hipótese de que $\lambda_n \notin \sigma_p(A)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Portanto $\mathbf{e}^{\lambda t} - \mathbf{e}^{At}$ é um a um e $\mathbf{e}^{\lambda t} \in \sigma_r(\mathbf{e}^{At})$ o que conclui a prova da primeira parte do teorema.

Para provar a segunda parte do teorema primeiramente note que se para algum k , $\lambda_k = \lambda + 2\pi ik/t \in \sigma_p(A)$ temos pelo Teorema 7.4.2 que $\mathbf{e}^{\lambda t} \in \sigma_p(\mathbf{e}^{At})$ contradizendo a hipótese que $\mathbf{e}^{\lambda t} \in \sigma_r(\mathbf{e}^{At})$. Resta mostrar que para algum k , $\lambda_k \in \sigma_r(A)$. Isto segue imediatamente se mostramos que $\{\lambda_n\} \subset \rho(A) \cup \sigma_c(A)$ é impossível. De (7.4) temos

$$(\mathbf{e}^{\lambda_n t} - \mathbf{e}^{At})e = B_{\lambda_n}(t)(\lambda_n - A)e, \quad e \in D(A), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.7)$$

Como por hipótese $\mathbf{e}^{\lambda t} = \mathbf{e}^{\lambda_n t} \in \sigma_r(\mathbf{e}^{At})$ o lado esquerdo de (7.7) pertence a um subespaço fixo Y que não é denso em E_0 . Por outro lado se $\lambda_n \in \rho(A) \cup \sigma_c(A)$ então a imagem de $\lambda_n - A$ é densa em E_0 o que implica, por (7.7), que a imagem de $B_{\lambda_n}(t)$ está em $\bar{Y}$ para todo n . Escrevendo a série de Fourier da função contínua $s \mapsto \mathbf{e}^{-\lambda s} \mathbf{e}^{As} e$, $e \in E_0$ temos

$$\mathbf{e}^{-\lambda s} \mathbf{e}^{As} e \sim \frac{\mathbf{e}^{-\lambda t}}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{e}^{(2\pi in/t)s} B_{\lambda_n}(t)e \quad (7.8)$$

e cada termo da série do lado direito de (7.8) pertence a Y . Como a série é Cesàro somável para $\mathbf{e}^{-\lambda s} \mathbf{e}^{As} e$, $0 < s < t$, temos que $\mathbf{e}^{-\lambda s} \mathbf{e}^{As} e \in \bar{Y}$ para $0 < s < t$. Fazendo $s \rightarrow 0^+$ temos $e \in \bar{Y}$ e $\bar{Y} = E_0$, o que é absurdo. $\square$

Teorema 7.4.4 *Seja $\{\mathbf{e}^{At}; t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo. Se $\lambda \in \sigma_c(A)$ e se $\lambda_n = \lambda + 2\pi in/t \notin \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, então $\mathbf{e}^{\lambda t} \in \sigma_c(\mathbf{e}^{At})$.*

Prova: Do Teorema 7.4.1 segue que se $\lambda \in \sigma_c(A)$ então $\mathbf{e}^{\lambda t} \in \sigma(\mathbf{e}^{At})$. Se $\mathbf{e}^{\lambda t} \in \sigma_p(\mathbf{e}^{At})$ então pelo Teorema 7.4.2 algum $\lambda_k \in \sigma_p(A)$ e portanto $\mathbf{e}^{\lambda t} \notin \sigma_p(\mathbf{e}^{At})$. Semelhantemente se $\mathbf{e}^{\lambda t} \in \sigma_r(\mathbf{e}^{At})$ então algum $\lambda_k \in \sigma_r(A)$ e novamente $\mathbf{e}^{\lambda t} \notin \sigma_r(\mathbf{e}^{At})$. $\square$

Observação 7.4.1 *A recíproca do Teorema 7.4.4 não vale. É possível que $\mathbf{e}^{\lambda t} \in \sigma_c(\mathbf{e}^{At})$ enquanto que todos os $\lambda_n = \lambda + 2\pi in/t$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, estão em $\rho(A)$.*

7.5 Decomposição Espectral de Operadores Setoriais

O teorema acima juntamente com o Teorema 7.3.1 implicam o resultado a seguir. Este resultado será de fundamental importância no estudo de pontos de equilíbrios do tipo sela para problemas parabólicos semilineares.

Teorema 7.5.1 *Se $-A$ é um operador setorial e, para algum α real, $\sigma(A)$ é disjunto da reta $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda = \alpha\}$, seja*

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

onde γ envolve $\sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \alpha\}$ e $Q = 0$ se esta interseção é vazia. Então Q é uma projeção contínua, $Q^2 = Q$, Q é um operador real se A é real e $Q\mathbf{e}^{At} = \mathbf{e}^{At}Q$ para todo $t \geq 0$. Seja $E_+ = N(Q)$, $E_- = R(Q)$; então $\mathbf{e}^{At}|_{E_{\pm}} \in L(E_{\pm})$ e temos a situação descrita no Teorema 7.3.1 já que $\sigma(\mathbf{e}^{At})$ não intersepta $\{u \in \mathbb{C} : |u| = e^{\alpha t}\}$, $t > 0$. A decomposição do espaço $E_0 = E_+ \oplus E_-$ é a mesma que no Teorema 7.3.1 e a projeção P daquele teorema é $I - Q$. Se E_- tem dimensão finita, $A|_{E_-}$ e $\mathbf{e}^{At}|_{E_-} = \mathbf{e}^{A|_{E_-} t}$ tem representação matricial relativamente a qualquer base para $E_- = R(Q)$. Os elementos de E_- são autovetores ou autovetores generalizados de A .

Prova: Note que $\{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda > \alpha\}$ é um conjunto compacto, possivelmente vazio. Com Q , E_+ e E_- definidos acima, temos do Teorema 7.2.1 que

$$A|_{E_-} \in L(E_-), \quad \sigma(A|_{E_-}) = \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda > \alpha\}.$$

Pelo teorema da aplicação espectral $\sigma(e^{A|_{E_-} t}) = e^{\sigma(A|_{E_-})}$ está em $\{u \in \mathbb{C} : |u| > e^{\alpha t}\}$ para todo $t > 0$.

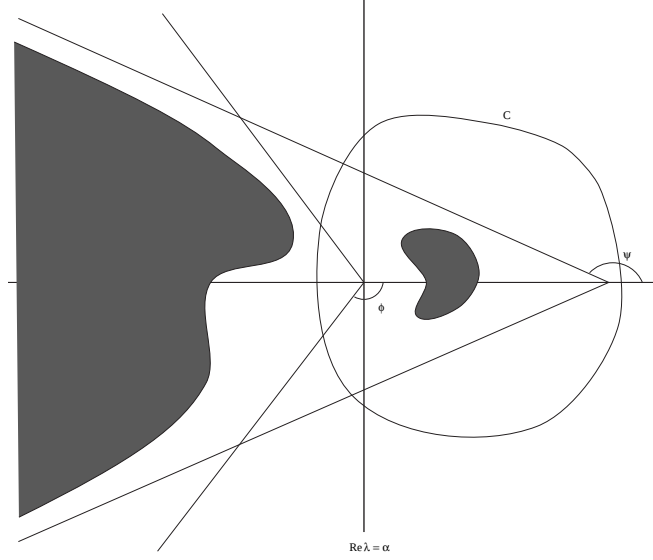


Figura 7.1: Decomposição Espectral

Se provamos que o raio espectral $r(e^{A|_{E_+} t}) = r(e^{A|_{E_+}}) < e^{\alpha^-}$, para algum $\alpha^- < \alpha$, especificamente,

$$\|e^{A|_{E_+} t}\| \leq C e^{\alpha^- t}, \quad t \geq 0,$$

então o Teorema 7.3.1 se aplica. Isto seguirá do Teorema 1.8.1 se mostrarmos que $-A_+ := -A|_{E_+}$ é setorial e

$$\|(\lambda - A_+)^{-1}\|_{L(E_+)} \leq \frac{C}{|\lambda - \alpha^-|},$$

para todo λ com $|\arg(\lambda - \alpha^-)| < \phi$, $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$ e $1 \leq C < \infty$. Agora, $\{\operatorname{Re} \lambda \geq \alpha^-\}$ está em $\rho(A_+)$, para algum $\alpha^- < \alpha$, e $\lambda \in \rho(A)$ implica $\lambda \in \rho(A_+)$ com $\|(\lambda - A_+)^{-1}\|_{L(E_+)} \leq \|(\lambda - A)^{-1}\|_{L(E)}$, logo $-A_+$ é setorial com espectro em $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < \alpha\}$. A estimativa acima agora é clara da figura (7.1). $\square$

Capítulo 8

Vizinhança de Um Ponto de Equilíbrio

8.1 Estabilidade e Instabilidade

Consideremos A um operador setorial em um espaço de Banach E e seja $f : U \rightarrow E$ onde U é uma vizinhança cilíndrica em $\mathbb{R} \times E^\alpha$ de $(\tau, \infty) \times \{e_0\}$. Dizemos que e_0 é um ponto de equilíbrio se $e(t) \equiv e_0$ é uma solução de

$$\frac{d}{dt}e + Ae = f(t, e), \quad t > t_0, \quad (8.1)$$

isto é, se $e_0 \in D(A)$ e $Ae_0 = f(t, e_0)$ para todo $t > t_0$.

Definição 8.1.1 *Uma solução $\bar{u}(t)$ sobre $[t_0, \infty)$ é estável (em E^α) se para qualquer $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que qualquer solução u com $\|u(t_0) - \bar{u}(t_0)\|_\alpha < \delta$ está definida para $t \in [t_0, \infty)$ e satisfaz $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_\alpha < \epsilon$ para $t \geq t_0$; ou seja, a aplicação $E^\alpha \ni e_0 \rightarrow u(t; t_0, e_0) \in E^\alpha$ é contínua em $e_0 = \bar{u}(t_0)$, uniformemente em $t \geq t_0$.*

Uma solução $\bar{u}$ é uniformemente estável se $E^\alpha \ni e_1 \rightarrow u(t; t_1, e_1) \in E^\alpha$ é contínua quando $e_1 \rightarrow \bar{u}(t_1)$, uniformemente em $t \geq t_1$ e $t_1 \geq t_0$.

A solução $\bar{u}$ é uniformemente assintoticamente estável se ela é uniformemente estável e $\|u(t; t_1, e_1) - \bar{u}(t)\|_\alpha \rightarrow 0$ quando $t - t_1 \rightarrow \infty$ uniformemente em $t_1 \geq t_0$ e $\|e_1 - \bar{u}(t_1)\|_\alpha < \delta$ para algum $\delta > 0$.

Teorema 8.1.1 (Estabilidade) *Sejam A e f como acima e e_0 um ponto de equilíbrio de (8.1). Suponha que*

$$f(t, e_0 + z) = f(t, e_0) + Bz + g(t, z)$$

onde B é um operador linear limitado de E^α em E e $\|g(t, z)\| = o(\|z\|_\alpha)$ quando $\|z\|_\alpha \rightarrow 0$, uniformemente em $t > \tau$ e, $f(t, z)$ é localmente Hölder contínua em t , localmente Lipschitziana em e , sobre U .

Se o espectro de $A - B$ permanece em $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \beta\}$ para algum $\beta > 0$, ou equivalentemente se a linearização em e_0

$$\frac{dz}{dt} + Az = Bz$$

é uniformemente assintoticamente estável, então a solução e_0 é uniformemente assintoticamente estável em E^α . Mais precisamente, existe $\rho > 0$, $M \geq 1$ tal que se $t_0 > \tau$ e $\|e_1 - e_0\|_\alpha \leq \frac{\rho}{2M}$ então existe uma única solução de

$$\frac{de}{dt} + Ae = f(t, e), \quad t > t_0, \quad e(t_0) = e_1$$

definida em $[t_0, \infty)$ e satisfazendo

$$\|e(t; t_0, e_1) - e_0\|_\alpha \leq 2Me^{-\beta(t-t_0)}\|e_1 - e_0\|_\alpha, \quad t \geq t_0.$$

Prova: Do fato que A é setorial, temos que $A^{-\alpha}$ é limitado e, como B limitado, $BA^{-\alpha}$ é limitado. Assim, pelo Corolário (3.2.2) temos que $L = A - B$ é setorial.

Escolha $0 < \beta < \beta' < \operatorname{Re}\sigma(L)$. Pelo Corolário (2.4.3) e Teorema (2.5.1), existe $M \geq 1$ tal que, para $t > 0$ e $e \in E^\alpha$,

$$\begin{aligned}\|e^{-Lt}z\|_\alpha &\leq \|A^\alpha e^{-Lt}z\| \leq C\|L^\alpha e^{-Lt}z\| \leq Mt^{-\alpha}e^{-\beta't}\|z\|, \\ \|e^{-Lt}z\|_\alpha &\leq \|A^\alpha e^{-Lt}z\| = \|e^{-Lt}A^\alpha z\| \leq Me^{-\beta't}\|z\|_\alpha.\end{aligned}$$

Seja $\sigma > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$M\sigma \int_0^\infty s^{-\alpha}e^{-(\beta'-\beta)s} < 1/2$$

e, como $\|g(t, z)\| = o(\|z\|_\alpha)$ quando $\|z\|_\alpha \rightarrow 0$, uniformemente em $t > \tau$, escolhemos $\rho > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\|g(t, z)\| \leq \sigma\|z\|_\alpha \text{ para } \|z\|_\alpha \leq \rho \text{ e } t > \tau.$$

Seja $z(t) = e(t; t_0, e_1) - e_0$; se $\|e_1 - e_0\|_\alpha \leq \rho/2M$, assim sobre algum intervalo de tempo existirá solução e $\|z(t)\|_\alpha \leq \rho$. Se $\|z(s)\|_\alpha < \rho$ para $0 < s < t$ então

$$\begin{aligned}\|z(t)\|_\alpha &= \|e^{-L(t-t_0)}z(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-L(t-s)}g(s, z(s))ds\|_\alpha \\ &\leq Me^{-\beta'(t-t_0)}\|z(t_0)\|_\alpha + \sigma M \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha}e^{-\beta'(t-s)}\|z(s)\|_\alpha ds \\ &\leq \rho/2 + \rho\sigma M \int_{-\infty}^t (t-s)^{-\alpha}e^{-\beta'(t-s)}ds < \rho\end{aligned}$$

Se $\|z(t)\|_\alpha < \rho$ sobre $t_0 \leq t < t_1$ com t_1 maximal, então $t_1 = \infty$ ou $\|z(t_1)\|_\alpha = \rho$, assim pelo cálculos acima temos $t_1 = \infty$.

Se $u(t) = \sup\{\|z(s)\|_\alpha e^{\beta(s-t_0)}, t_0 \leq t \leq t\}$ então

$$\begin{aligned}\|z(t)\|_\alpha e^{\beta(t-t_0)} &\leq M\|z(t_0)\|_\alpha + M\sigma \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha}e^{-(\beta'-\beta)(t-s)}ds u(t) \\ &\leq M\|z(t_0)\|_\alpha + \frac{1}{2}u(t)\end{aligned}$$

portanto, $u(t) \leq 2M\|z(t_0)\|_\alpha$ e assim

$$\|e(t; t_0, e_1) - e_0\|_\alpha \leq 2Me^{-\beta(t-t_0)}\|e_1 - e_0\|_\alpha. \square$$

Lema 8.1.1 *Consideremos A e f como acima e seja e_0 um ponto de equilíbrio. Suponha que*

$$f(t, e_0 + z) = f(t, e_0) + Bz + g(t, z)$$

onde B é um operador linear limitado de E^α em E e $\|g(t, z_1) - g(t, z_2)\| \leq k(\rho)\|z_1 - z_2\|_\alpha$ para $\|z_1\|_\alpha \leq \rho$ e $\|z_2\|_\alpha \leq \rho$ e $k(\rho) \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow 0^+$.

Assuma que o espectro de $L = A - B$ é disjunto de $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda = 0\}$. Defina $\sigma_1 = \sigma(L) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ e $\sigma_2 = \sigma(L) \setminus \sigma_1$ e assuma que $\sigma_1 \neq \emptyset$. Seja P a projeção do Teorema (7.5.1) e $E = E_1 \oplus E_2$, $E_1 = R(P)$, $E_2 = N(P)$. Então $\sigma_i = \sigma(L_i)$ onde L_i é a restrição de L a E_i , $i = 1, 2$.

Considere seguinte equação integral:

$$y(t) = e^{-L_1(t-\tau)}a + \int_\tau^t e^{-L_1(t-s)}P(g(s, y(s)))ds + \int_{-\infty}^t e^{-L_2(t-s)}(I - P)(g(s, y(s)))ds, \quad t \leq \tau. \quad (8.2)$$

Então, existe $\rho > 0$ tal que, se $\|a\|_\alpha \leq \rho/2M$, (8.2) tem uma única solução $y(t)$ sobre $-\infty < t \leq \tau$ com $\|y(t)\|_\alpha \leq \rho e^{2\beta(t-\tau)}$. Esta solução da equação integral é também uma solução de

$$\dot{z} + Az = g(t, z).$$

Prova: Note que podemos escolher $\beta > 0$ tal que

$$\|e^{-L_2 t}(I - P)e\|_\alpha \leq Me^{\beta t}\|e\|_\alpha, \quad \|e^{-L_2 t}(I - P)e\|_\alpha \leq Mt^{-\alpha}e^{\beta t}\|e\|, \quad t > 0$$

$$\|e^{-L_1 t}Pe\|_\alpha \leq Me^{3\beta t}\|e\|_\alpha, \quad \|e^{-L_1 t}Pe\|_\alpha \leq Me^{3\beta t}\|e\| \quad t \leq 0.$$

Considere o conjunto S das funções contínuas definidas em $(-\infty, \tau]$ e tomando valores em E_1^α tais que $\sup_{t \leq \tau} e^{-2\beta(t-\tau)}\|y(t)\|_\alpha < \rho$ onde ρ é escolhido pequeno para que a condição abaixo esteja satisfeita

$$Mk(\rho)(\|P\|\beta^{-1} + \|(I - P)\| \int_0^\infty u^{-\alpha} e^{-\beta u} du) \leq \frac{1}{4M} < \frac{1}{2}. \quad (8.3)$$

Se em S definimos a métrica

$$d(y, \tilde{y}) = \sup_{t \leq \tau} e^{-2\beta(t-\tau)}\|y(t) - \tilde{y}(t)\|_\alpha$$

então S é um espaço métrico completo. Em seguida defina a transformação

$$(Ty)(t) = e^{-L_1(t-\tau)}a + \int_\tau^t e^{-L_1(t-s)}P(g(s, y(s)))ds + \int_{-\infty}^t e^{-L_2(t-s)}(I - P)(g(s, y(s)))ds, \quad t \leq \tau. \quad (8.4)$$

Mostremos que T leva S nele mesmo e que $d(Ty, T\tilde{y}) \leq \frac{1}{2}d(y, \tilde{y})$ para todo $y, \tilde{y} \in S$. Isto mostrará que T é uma contração em S e portanto tem um único ponto fixo em S . De fato:

$$\begin{aligned} e^{-2\beta(t-\tau)}\|(Ty)(t)\|_\alpha &\leq M\|a\|_\alpha + \int_t^\tau Me^{3\beta(t-s)}e^{-2\beta(t-s)}\|P\|k(\rho)e^{-2\beta(s-\tau)}\|y(s)\|_\alpha ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^t M(t-s)^{-\alpha}e^{-\beta(t-s)}\|(I - P)\|k(\rho)e^{-2\beta(s-\tau)}\|y(s)\|_\alpha ds \\ &\leq M\|a\|_\alpha + \int_t^\tau Me^{\beta(t-s)}\|P\|k(\rho)e^{-2\beta(s-\tau)}\|y(s)\|_\alpha ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^t M(t-s)^{-\alpha}e^{-\beta(t-s)}\|(I - P)\|k(\rho)e^{-2\beta(s-\tau)}\|y(s)\|_\alpha ds \\ &\leq M\|a\|_\alpha + Mk(\rho)[\|P\|\int_t^\tau e^{\beta(t-s)}ds + \|(I - P)\|\int_{-\infty}^t (t-s)^{-\alpha}e^{-\beta(t-s)}ds] \sup_{t \leq \tau} e^{-2\beta(t-\tau)}\|y(t)\|_\alpha \\ &\leq M\|a\|_\alpha + Mk(\rho)[\|P\|\beta^{-1} + \|(I - P)\|\int_0^\infty s^{-\alpha}e^{-\beta s}ds] \sup_{t \leq \tau} e^{-2\beta(t-\tau)}\|y(t)\|_\alpha \\ &\leq \rho/2 + \rho/2 = \rho \end{aligned}$$

o que mostra que T está definido e toma valores em S . Para mostrar que T é uma contração uniforme em S

note que

$$\begin{aligned}
e^{-2\beta(t-\tau)} \|(Ty)(t) - (T\tilde{y})(t)\|_\alpha &\leq \int_t^\tau M e^{3\beta(t-s)} e^{-2\beta(t-s)} \|P\| k(\rho) e^{-2\beta(s-\tau)} (\|y(s) - \tilde{y}(s)\|_\alpha) ds \\
&+ \int_{-\infty}^t M e^{\beta(t-s)} \|(I-P)\| k(\rho) \|y(s) - \tilde{y}(s)\|_\alpha ds \\
&\leq \int_t^\tau M e^{\beta(t-s)} \|P\| k(\rho) e^{-2\beta(s-\tau)} \|y(s) - \tilde{y}(s)\|_\alpha ds \\
&+ \int_{-\infty}^t M e^{-\beta(t-s)} \|(I-P)\| k(\rho) e^{-2\beta(s-\tau)} \|y(s) - \tilde{y}(s)\|_\alpha ds \\
&\leq M k(\rho) [\|P\| \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} ds + \|(I-P)\| \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} ds] \sup_{t \leq \tau} e^{-2\beta(t-\tau)} \|y(t) - \tilde{y}(t)\|_\alpha \\
&\leq M k(\rho) [\|P\| \beta^{-1} + \|(I-P)\| \int_0^\infty s^{-\alpha} e^{-\beta s} ds] \sup_{t \leq \tau} e^{-2\beta(t-\tau)} \|y(t) - \tilde{y}(t)\|_\alpha \\
&\leq \frac{1}{2} \sup_{t \leq \tau} e^{-2\beta(t-\tau)} \|y(t) - \tilde{y}(t)\|_\alpha.
\end{aligned}$$

Se $y(t)$ é solução de (8.2), considere $\gamma(s) = g(s, y(s))$ e $t_0 \leq \tau$ e com $t_0 \leq t \leq \tau$ temos:

$$\begin{aligned}
(I-P)y(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-L_2(t-s)} (I-P)\gamma(s) ds \\
&= e^{-L_2(t-t_0)} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-L_2(t_0-s)} (I-P)\gamma(s) ds + \int_{t_0}^t e^{-L_2(t-s)} (I-P)\gamma(s) ds
\end{aligned}$$

Assim, $y(t) = (I-P)y(t) + Py(t)$ é também solução da equação

$$\frac{dy}{dt} + Ly = \gamma(t), \quad t_0 < t < \tau,$$

pois satisfaz a fórmula da variação das constantes para esta equação. Isto conclui a prova do lemma. $\square$

Teorema 8.1.2 (*Instabilidade*) *Assuma que A, f, B, g, L e e_0 são como no Lemma 8.1.1. Então o ponto de equilíbrio e_0 é instável. Mais precisamente, existe $\epsilon_0 > 0$ e $\{e_n, n \geq 1\}$ com $\|e_n - e_0\|_\alpha \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ tal que, para todo n ,*

$$\sup \|e(t; t_0, e_n) - e_0\|_\alpha \geq \epsilon_0 > 0$$

o supremo é tomado no intervalo maximal de existência de $e(\cdot; t_0, e_n)$.

Prova: Escolhendo ρ como no Lemma 8.1.1 e $\|a\|_\alpha \leq \rho/2M$, segue que a equação integral (8.2) tem uma única solução $y(t)$ sobre $-\infty < t \leq \tau$ com $\|y(t)\|_\alpha \leq \rho e^{2\beta(t-\tau)}$. Denotando por $y(t) = y^*(t; \tau, a)$ esta solução, sabemos que

$$\|y^*(t; \tau, a)\|_\alpha \leq 2M \|a\|_\alpha e^{2\beta(t-\tau)}$$

e mostraremos que $\|y^*(\tau, \tau, a)\| \geq 1/2 \|a\|_\alpha$. Além disso $y^*(\cdot; \tau, a)$ é uma solução de

$$\frac{dz}{dt} + Lz = g(t, z), \quad t < \tau.$$

A conclusão segue destes fatos pois se $z_n = y^*(t_0; t_0 + n, a)$ então a solução $z(t; t_0, z_n)$ tem $z(t, t_0, z_n) = y^*(t, t_0 + n, a)$ para $t_0 \leq t \leq t_0 + n$ e $\sup\{\|z(t; t_0, z_n)\|_\alpha, t \leq t_0\} \geq \|z(t_0 + n; t_0, z_n)\|_\alpha = \|y^*(t_0 + n; t_0 + n, z_n)\|_\alpha \geq 1/2\|a\|_\alpha$ enquanto que $\|z_n\|_\alpha \rho e^{-2\beta n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Finalmente,

$$\|y^*(t; \tau, a)\|_\alpha \leq 2M\|a\|_\alpha e^{2\beta(t-\tau)}$$

para $t \leq \tau$ e

$$\begin{aligned} \|y^*(\tau; \tau, a) - a\|_\alpha &\leq \left\| \int_{-\infty}^{\tau} e^{-L_2(\tau-s)} (I - P)g(s, y^*(s)) ds \right\|_\alpha \\ &\leq \|(I - P)\| k(\rho) 2M\|a\|_\alpha \int_{-\infty}^{\tau} M(\tau - s)^{-\alpha} e^{-\beta(\tau-s)} e^{2\beta(\tau-s)} ds \\ &\leq 1/2\|a\|_\alpha \end{aligned}$$

e assim, $\|y^*(\tau; \tau, a)\|_\alpha \geq 1/2\|a\|_\alpha$. $\square$

8.2 A Propriedade do Ponto de Sela

Teorema 8.2.1 *Suponha que A, f, e_0 são como no Teorema 8.1.1, com*

$$f(t, e_0 + z) = Ae_0 + Bz + g(t, z),$$

$B \in L(E^\alpha, E)$, $g(t, 0) = 0$ e $\|g(t, z_1) - g(t, z_2)\| \leq k(\rho)\|z_1 - z_2\|_\alpha$ para $\|z_i\|_\alpha \leq \rho$, $i = 1, 2$, onde $k(\rho) \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow 0^+$; podemos assumir que $k(\cdot)$ é não decrescente.

Suponha que $A - B$ e $\sigma(L)$ é disjunto do eixo imaginário e decompõe o espaço $E = E_1 \oplus E_2$ correspondente aos conjuntos espectrais $\sigma_1 = \sigma(L) \cap \{\operatorname{Re} \lambda < 0\}$ e $\sigma_2 = \sigma(L) \cap \{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$ e seja P , $(I - P)$ as projeções sobre E_1 , E_2 . Então existe $\rho > 0$, $M \geq 1$ tais que o seguinte vale:

1. *A variedade estável $S(t_0, \rho)$*

$$S = \{z_0 : \|(I - P)z_0\|_\alpha \leq \rho/2M, \|z(t, t_0, z_0)\|_\alpha \leq \rho \text{ for } t \geq t_0\}$$

é um homeomorfo sob $(I - P)|_S$ à bola fechada de raio $\rho/2M$ em E_2^α . Adicionalmente S é tangente a E_2^α na origem e quando $z_0 \in S$,

$$\|z(t, t_0, z_0)\|_\alpha \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

2. *A variedade instável $U = U(t_0, \rho)$, $U = \{z_0 : \|Pz_0\|_\alpha \leq \rho/2M, z(t, t_0, z_0) \text{ é uma solução definida em } (-\infty, t_0), \|z(t, t_0, z_0)\|_\alpha \leq \rho, t \leq t_0\}$ é homeomorfa sob $P|_U$ à bola fechada de raio $\rho/2M$ em E_1 . Adicionalmente U é tangente a E_1 na origem e quando $z_0 \in U$, $z(t, t_0, z_0) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$.*

3. *Se $\|P_{1,2}z_0\|_\alpha \leq \rho/2M$ e $\|z(t, t_0, z_0)\|_\alpha \leq \rho$ para todo $t \geq t_0$ ou para todo $t \leq t_0$, então $z_0 \in S \cup U$.*

Prova: Assuma, sem perda de generalidade que $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$. Suponha que $M > 0$ e $\beta > 0$ são tais que

$$\|A^\alpha e^{-L_1 t}\| \leq M e^{\beta t}, \quad \|e^{-L_1 t}\| \leq M e^{\beta t}, \quad \text{para } t \leq 0,$$

$$\|A^\alpha e^{-L_2 t} E_2 A^{-\alpha}\| \leq M e^{-\beta t}, \quad \|A^\alpha e^{-L_2 t}\| \leq M t^{-\alpha} e^{-\beta t}, \quad \text{para } t > 0.$$

Assuma que $z_0 \in S$; então $z(t) = z_1(t) + z_2(t) \in E_1 \oplus E_2$

$$z_1(t) = e^{-L_1(t-t_0)} P z_0 + \int_{t_0}^t e^{-L_1(t-s)} P g(s, z(s)) ds$$

logo

$$e^{L_1 t} z_1(t) = e^{t_0} P z_0 + \int_{t_0}^t e^{L_1 s} P g(x, z(s)) ds \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Portanto $P z_0 = - \int_{t_0}^{\infty} e^{L_1(t-s)} g(s, z(s)) ds$, logo para $t \geq t_0$

$$z(t) = e^{-L_2(t-t_0)} a + \int_{t_0}^t e^{-L_2(t-s)} (I - P) g(s, z(s)) ds - \int_t^{\infty} e^{-L_1(t-s)} P g(s, z(s)) ds,$$

onde $a = (I - P)z(t_0)$.

Reciprocamente, suponha que $a \in E_2$, $\|a\|_{\alpha} \leq \rho/2M$; mostramos (para $\rho > 0$ suficientemente pequeno) existe uma única solução $z(t) = z(t, t_0, a)$ da equação integral com $(I - P)z_0 = (I - P)(t_0, t_0, a) = a$ e $\|z(t, t_0, a_0)\|_{\alpha} \leq \rho$ para todo $t \geq t_0$.

Especificamente, se $\rho > 0$ é escolhido de forma que

$$MK(\rho) \{ \|(I - P)\| \int_0^{\infty} u^{-\alpha} e^{-\beta u} du + \|P\| \int_0^{\infty} e^{-\beta u} du \} < 1/2$$

então o lado direito desta equação integral define uma contração do espaço das funções contínuas $z : [t_0, \infty) \rightarrow E$ com $\sup \|z(t)\|_{\alpha} \leq \rho$ e $(I - P)z(t_0) = a$, desde que $\|a\|_{\alpha} \leq \rho/2M$ e portanto existe um único ponto fixo $z(t, t_0, z)$. Esta solução da equação integral é uma função Lipschitz contínua de $a \in E_2^{\alpha}$, $\|a\|_{\alpha} \leq \rho/2M$, na norma $\|\cdot\|_{\alpha}$. Então pode ser mostrado que $t \rightarrow z(t, t_0, a)$ é localmente Hölder contínua, e portanto $z(t, t_0, a)$ é a solução de $\frac{dz}{dt} + Lz = g(t, z)$, $t > 0$, com valor inicial

$$h(a) = z(t_0, t_0, z) = a - \int_{t_0}^{\infty} e^{-L_1(t_0-s)} P g(s, z(s, t_0, a)) ds.$$

Então $(I - P)h(a) = a$, e $h(\cdot)$ é Lipschitz contínua, logo

$$S = \{h(a) : a \in E_2^{\alpha}, \|a\|_{\alpha} \leq \rho/2M\}$$

é a representação afirmada acima.

Também

$$\|h(a) - a\|_{\alpha} \leq \int_{t_0}^{\infty} M e^{\beta(t_0-s)} \|P\| \|g(s, z(s, t_0, a))\| ds$$

e $\sup_{s \geq t_0} \|z(s, t_0, a)\| = O(\|a\|_{\alpha})$ quando $\|a\|_{\alpha} \rightarrow 0$, $a \in E_2$, portanto $\|h(a) - a\|_{\alpha} = o(\|a\|_{\alpha})$, o que prova que S é tangente a E_2^{α} na origem. A prova que, quando $z(t_0) \in S$, então $\|z(t, t_0, z_0)\|_{\alpha} \rightarrow 0$ exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$ é direta usando a equação integral acima.

O argumento correspondente para a variedade instável usa uma equação integral como aquela da prova do Teorema 8.1.2 mas podemos trabalhar com a norma uniforme no lugar da norma com peso exponencial utilizada aqui. $\square$

Capítulo 9

O Problema Parabólico com Expoentes Críticos

9.1 Introdução

In what follows we consider problems of the type

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(t, x), \quad t > t_0 \\ x(t_0) &= x_0,\end{aligned}\tag{9.1}$$

where the linear operator $-A : D(A) \subset X^0 \rightarrow X^0$ is a sectorial operator in the Banach space X^0 . We will denote by X^α , $\alpha \geq 0$ the fractional power spaces associated to the operator A (see [11, 1, 2, 3]) and by e^{At} the analytic semigroup generated by A . Without loss of generality we can assume that it is uniformly bounded, that is

$$\begin{aligned}\|e^{At}x\|_{X^\alpha} &\leq M\|x\|_{X^\alpha}, \quad \alpha \geq 0 \\ \|e^{At}x\|_{X^\alpha} &\leq Mt^{-\alpha}\|x\|_X, \quad \alpha \geq 0.\end{aligned}\tag{9.2}$$

In order to initiate the discussion let us consider for a moment that the map f is time independent and $t_0 = 0$. Therefore the problem above reads

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(x), \quad t > 0 \\ x(0) &= x_0.\end{aligned}\tag{9.3}$$

It is well known now that if the map $f : X^1 \rightarrow X^\alpha$, for certain $\alpha > 0$, and it is Lipschitz on bounded sets of X^1 , that is $\|f(x) - f(y)\|_{X^\alpha} \leq C(R)\|x - y\|_{X^1}$, for $\|x\|_{X^1}, \|y\|_{X^1} \leq R$, then the problem (9.3) is locally well posed in X^1 . For each $x_0 \in X^1$ one seeks fixed points of the map T in the space $K(\tau, \mu) = \{x(t) \in C([0, \tau], X^1); x(0) = x_0, \|x(t)\|_{L^\infty(0, \tau, X^1)} \leq \|x_0\|_{X^1} + \mu\}$, where T is given by

$$(Tx)(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(x(s))ds.\tag{9.4}$$

The simple computations,

$$\begin{aligned}\|(Tx)(t) - (Ty)(t)\|_{X^1} &\leq M \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} \|f(x(s)) - f(y(s))\|_{X^\alpha} ds \\ &\leq CM \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} \|x(s) - y(s)\|_{X^1} ds \\ &\leq (CM \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} ds) \sup_{0 \leq s \leq t} \{\|x(s) - y(s)\|_{X^1}\}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \|(Tx)(t)\|_{X^1} &\leq \|e^{At}x_0\|_{X^1} + M \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} \|f(x(s))\|_{X^\alpha} ds \\ &\leq \|e^{At}x_0\|_{X^1} + CM \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} ds + (CM \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} ds) \sup_{0 \leq s \leq t} \{\|x(s)\|_{X^1}\} \end{aligned}$$

together with the fact that $\|e^{At}x_0\|_{X^1} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \|x_0\|_{X^1}$, $\int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} ds = t^\alpha \int_0^1 (1-s)^{-1+\alpha} ds \rightarrow 0$ as $t \rightarrow 0^+$, suggest that for $\mu > 0$ fixed we can choose $\tau > 0$ small enough such that $T : K(\tau, \mu) \rightarrow K(\tau, \mu)$ and that T is a strict contraction in $K(\tau, \mu)$. Once this is accomplished, the Banach fixed point theorem takes care of the existence and uniqueness of solutions of the integral equation. With some extra effort one can show that the solution found is a solution of the differential equation (9.3).

In the analysis above, the convergence of the improper integral $\int_0^1 (1-s)^{-1+\alpha} ds$, which is equivalent to the fact that $\alpha > 0$, is essential and the whole argument breaks down when $\alpha = 0$. In other words, since $A : X^1 \rightarrow X^0$, the fact that $f : X^1 \rightarrow X^\alpha$ with $\alpha > 0$ means that the solutions of problem (9.3) can be obtained as perturbations of the solutions of the linear problem $\dot{x} = Ax$.

Here we address the question of local solvability of problem (9.1), (9.3) when $\alpha = 0$.

It is clear that if the only requirements on f is that $f : X^1 \rightarrow X^0$ being locally Lipschitz, it will be impossible to show that problem (9.3) is well posed. For example, taking $f(x) = -2Ax$, which satisfies $f : X^1 \rightarrow X^0$ and is globally Lipschitz, we will have $\dot{x} = Ax + f(x) = -Ax$, which is not locally well posed, in general (if $A = \Delta$ then $\dot{x} = -Ax$ is the backwards heat equation). Hence, some extra conditions should be imposed on f to guarantee the existence of solutions of the above problem.

In order to illustrate the main ideas and techniques contained in this chapter let us consider the particular example given by the equation,

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u + u|u|^{\rho-1}, & \Omega \\ u &= 0 & \partial\Omega \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{9.5}$$

where Ω is a bounded and smooth domain in $\mathbb{R}^3$ and $\rho > 1$.

It is well known that the operator Δ can be regarded as an unbounded operator in $X^0 = H^{-1}(\Omega)$ with domain $X^1 = H_0^1(\Omega)$. Moreover, the fractional power spaces are given by X^α which satisfy the following embedding properties,

$$\begin{aligned} X^\alpha &\hookrightarrow H^{2\alpha-1}(\Omega), & \alpha > 1/2 \\ X^{\frac{1}{2}} &= L^2(\Omega), \\ X^\alpha &\hookleftarrow H^{2\alpha-1}(\Omega), & \alpha < 1/2 \end{aligned} \tag{9.6}$$

(see [11, 2]).

If $f(u) = u|u|^{\rho-1}$, then with some Sobolev embeddings and with (9.6), we can show that for $1 < \rho \leq 3$, we have $f : X^1 \equiv H_0^1(\Omega) \rightarrow X^{\frac{1}{2}} \equiv L^2$; for $4 < \rho \leq 5$ we have $f : X^1 \equiv H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{3-\rho}{2}} \hookrightarrow X^{\frac{5-\rho}{4}}$. Hence, for $1 < \rho < 5$, $f : X^1 \rightarrow X^\alpha$ for some $\alpha > 0$. For $\rho = 5$, $f : X^1 \rightarrow X^0$ and we are in the critical case $\alpha = 0$. But observe that for $\rho = 5$, again with some Sobolev embeddings and (9.6), we get that if $\epsilon > 0$ is small then $f : X^{1+\epsilon} \rightarrow X^{5\epsilon}$, while the linear operator $A : X^{1+\epsilon} \rightarrow X^\epsilon$. This means that, although A and f can be regarded as of the same order in X^1 , if we consider an slightly better space, $X^{1+\epsilon}$, then the map f regularizes more than A ($X^{5\epsilon}$ is a better space than X^ϵ). Moreover, it can be seen that f satisfies,

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(v)\|_{X^{5\epsilon}} &\leq c\|u - v\|_{X^{1+\epsilon}} (\|u\|_{X^{1+\epsilon}}^4 + \|v\|_{X^{1+\epsilon}}^4 + 1) \quad \forall u, v \in X^{1+\epsilon} \\ \|f(u)\|_{X^{5\epsilon}} &\leq c\|u\|_{X^{1+\epsilon}}^5 \end{aligned}$$

In particular, this means that we can solve problem (9.5) with initial data in $X^{1+\epsilon}$.

Moreover, if we consider now a sequence of initial data $u_n \in X^{1+\epsilon}$ with $u_n \rightarrow u_0 \in X^1$ in X^1 , with the following computation,

$$\begin{aligned} t^\epsilon \|u_n(t)\|_{X^{1+\epsilon}} &\leq t^\epsilon \|e^{At} u_n\|_{X^{1+\epsilon}} + t^\epsilon \int_0^t (t-s)^{-1+4\epsilon} \|u_n(s)\|_{X^{5\epsilon}}^5 ds \\ &\leq t^\epsilon \|e^{At} u_n\|_{X^{1+\epsilon}} + t^\epsilon \int_0^t (t-s)^{-1+4\epsilon} s^{-5\epsilon} ds \sup_{0 < s < t} \{s^\epsilon \|u_n(s)\|_{X^{1+\epsilon}}\}^5 \end{aligned}$$

and the fact that $t^\epsilon \|e^{At} u_n\|_{X^{1+\epsilon}} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$ uniformly on compacts of X^1 (see Lemma 9.2.2, below), it is not difficult to see that if $\mu > 0$ is small enough, we can get a uniform time $\tau_1 > 0$, independent of n such that $t^\epsilon \|u_n(t)\|_{X^{1+\epsilon}} \leq \mu$ for all $t \in (0, \tau_1]$ and all n .

But also, for $0 < t \leq \tau_1$, we have

$$\begin{aligned} t^\epsilon \|u_n(t) - u_m(t)\|_{X^{1+\epsilon}} &\leq t^\epsilon \|e^{At} (u_n - u_m)\|_{X^{1+\epsilon}} \\ &\quad + t^\epsilon \int_0^t (t-s)^{-1+4\epsilon} \|u_n(s) - u_m(s)\|_{X^{1+\epsilon}} (1 + \|u_n(s)\|_{X^{1+\epsilon}}^4 + \|u_m(s)\|_{X^{1+\epsilon}}^4) ds \\ &\leq \|u_n - u_m\|_{X^1} + (t^\epsilon \int_0^t (t-s)^{-1+4\epsilon} s^{-\epsilon} ds) \sup_{0 < s \leq t} \{s^\epsilon \|u_n(s) - u_m(s)\|_{X^{1+\epsilon}}\} \\ &\quad + (2\mu^4 t^\epsilon \int_0^t (t-s)^{-1+4\epsilon} s^{-5\epsilon} ds) \sup_{0 < s \leq t} \{s^\epsilon \|u_n(s) - u_m(s)\|_{X^{1+\epsilon}}\} \end{aligned}$$

which implies that for some $0 < t \leq \tau_0 \leq \tau_1$ we get

$$t^\epsilon \|u_n(t) - u_m(t)\|_{X^{1+\epsilon}} \leq C \|u_n - u_m\|_{X^1}.$$

A similar argument will show that

$$\|u_n(t) - u_m(t)\|_{X^1} \leq C_1 \sup_{0 < s \leq t} \{s^\epsilon \|u_n(s) - u_m(s)\|_{X^{1+\epsilon}}\} + C_2 \|u_n - u_m\|_{X^1} \leq C \|u_n - u_m\|_{X^1}.$$

This will allow us to go to the limit when $n \rightarrow \infty$ and obtain solutions in the space $C([0, \tau_0], X^1) \cap C((0, \tau_0], X^{1+\epsilon})$ with initial conditions in X^1 .

From the discussion above, it seems reasonable to give the following definitions:

Definição 9.1.1 *We say that $x : [t_0, \tau] \rightarrow X^1$ is an ϵ -regular mild solution (ϵ -solution for short) to (9.1) if $x \in C([t_0, \tau], X^1) \cap C((t_0, \tau], X^{1+\epsilon})$, and $x(t)$ satisfies*

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f(s, x(s)) ds. \quad (9.7)$$

Definição 9.1.2 *For $\epsilon \geq 0$, we will say that a map g , is an ϵ -regular map relatively to the pair (X^1, X^0) , if there exist $\rho > 1$, $\gamma(\epsilon)$ with $\rho\epsilon \leq \gamma(\epsilon) < 1$ and a constant c , such that $g : X^{1+\epsilon} \rightarrow X^{\gamma(\epsilon)}$ and*

$$\|g(x) - g(y)\|_{X^{\gamma(\epsilon)}} \leq c \|x - y\|_{X^{1+\epsilon}} (\|x\|_{X^{1+\epsilon}}^{\rho-1} + \|y\|_{X^{1+\epsilon}}^{\rho-1} + 1) \quad \forall x, y \in X^{1+\epsilon} \quad (9.8)$$

The main results of this chapter are contained in Section 9.2. They basically say that if $f(t, \cdot)$ is an ϵ -regular map, for some $\epsilon > 0$ then we will have existence and uniqueness of ϵ -regular mild solutions for problem (9.1) (see Theorem 9.2.1 or Corollary 9.2.1 for the autonomous case). This means that dealing with the problem of existence and uniqueness for a particular equation with critical nonlinearities, the effort has to be made in two points:

(i). Understand the scale of fractional power spaces associated to the linear operator A , especially the embeddings into known spaces like L^p spaces.

(ii). Study the ϵ -regularity properties of the nonlinearity f in this scale of spaces. This is usually done by the use of Hölder inequality and Sobolev type embeddings.

Once (i) and (ii) are done, we can apply Theorem 9.2.1 and obtain existence and uniqueness results.

Moreover it seems clear that the criticality of a particular nonlinearity f is related to the ϵ -regularity properties of f and therefore we could classify the nonlinearities according to their ϵ -regularity properties. This is done at the end of Section 9.2.

It is reasonable to think that the agenda explained above, ((i),(ii) and Theorem 9.2.1), can be applied to many concrete problems. In particular to the Navier-Stokes equations, Heat equation, systems of parabolic equations, strongly damped hyperbolic equations, etc. The abstract results presented here allow us to recover several known results on existence and uniqueness of solutions for these equations, like the ones from the paper by Kato and Fujita [15] for the Navier-Stokes equation and from the papers by Weissler [22, 23] and Brezis and Cazenave [7]. All these very good papers and specially the last one, have inspired the work of [4, 5] which we develop in the coming sections.

The last section includes several comments about the uniqueness result obtained in Theorem 9.2.1 and its relation with other uniqueness and non-uniqueness results found in the literature ([7], [17],[16]). Also, several open problems on the uniqueness problem are posed which we believe are very important for the whole understanding of the subject.

Observação 9.1.1 *After the paper was submitted for publication, it was pointed out to us by H. Amann that other scales of Banach spaces, different from the scale of fractional power spaces, could be used to deal with such problems. In connection with this, it is important to mention that for the abstract results presented in Section 9.2 the only requirements on the operator A and the scale of spaces $\{X^\alpha\}_{0 \leq \alpha \leq 2}$ are that $A : D(A) = X^1 \subset X^0 \rightarrow X^0$ generates an analytic semigroup e^{At} on X^0 , $D(A^2) = X^2$ and (9.9) is satisfied. The proofs go through unchanged.*

For the applications, and in order to solve critical problems, we need that the scale satisfies sharp embedding relations of the type (9.6), for the non-Hilbert setting. In the case of Dirichlet boundary conditions and C^2 domains these embedding relations are well known for the scale of fractional power spaces thanks to [20, 19]. For other boundary conditions and more general operators the scale of fractional power spaces is not so well understood, so it may be better to use a different scale of Banach spaces for which these sharp embeddings are known. Some possibilities can be found in [2, 3].

9.2 Resultados Abstratos

With respect to the linear operator $-A : D(A) \subset X^0 \rightarrow X^0$ we will assume that it is a sectorial operator in the Banach space X^0 . We will denote by X^α , $\alpha \geq 0$ the fractional power spaces associated to the operator A and by e^{At} the analytic semigroup generated by A . Without loss of generality we can assume that it is uniformly bounded. Let M be such that the following holds,

$$t^{1+\alpha-\beta} \|e^{At}x\|_{X^{1+\alpha}} \leq M \|x\|_{X^\beta}, \quad 0 \leq \beta \leq 1 + \alpha \leq 2, \quad (9.9)$$

(see [11]).

With respect to the nonlinearities, let us consider the following class: with $\epsilon, \rho, \gamma(\epsilon), c$, positive constants, and $\nu(t)$ with $0 \leq \nu(t) \leq \delta$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \nu(t) = 0$, define $\mathcal{F} := \mathcal{F}(\epsilon, \rho, \gamma(\epsilon), c, \nu(\cdot))$ as the family of functions f such that for $t > 0$ $f(t, \cdot)$ is an ϵ -regular map relative to the pair (X^1, X^0) , satisfying:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_{X^{\gamma(\epsilon)}} \leq c \|x - y\|_{X^{1+\epsilon}} (\|x\|_{X^{1+\epsilon}}^{\rho-1} + \|y\|_{X^{1+\epsilon}}^{\rho-1} + \nu(t)t^{-\gamma(\epsilon)+\epsilon}) \quad (9.10)$$

$$\|f(t, x)\|_{X^{\gamma(\epsilon)}} \leq c (\|x\|_{X^{1+\epsilon}}^\rho + \nu(t)t^{-\gamma(\epsilon)}). \quad (9.11)$$

for all $x, y \in X^{1+\epsilon}$.

Without loss of generality we can assume that the function $\nu(t)$ is non-decreasing.

In most cases in the argument below we will fix the parameters $\epsilon, \rho, \gamma(\epsilon)$ and c , and we will denote the class $\mathcal{F}$ defined above by $\mathcal{F}(\nu(\cdot))$.

With these definitions we can state now the main result of this paper.

Teorema 9.2.1 *Let $f \in \mathcal{F}(\epsilon, \rho, \gamma(\epsilon), c, \nu(\cdot))$. If $y_0 \in X^1$ there exist $r > 0$, and $\tau_0 > 0$ with the property that for any $x_0 \in B_{X^1}(y_0, r)$ there exists a continuous function $x(\cdot, x_0) : [0, \tau_0] \rightarrow X^1$, with $x(0) = x_0$, which is the unique ϵ -regular mild solution starting at x_0 of the problem*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(t, x), \quad t > 0 \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{9.12}$$

This solution satisfies

$$\begin{aligned} x &\in C((0, \tau_0], X^{1+\theta}), \quad 0 \leq \theta < \gamma(\epsilon) \\ t^\theta \|x(t, x_0)\|_{X^{1+\theta}} &\xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0, \quad 0 < \theta < \gamma(\epsilon) \end{aligned}$$

Moreover, if $x_0, z_0 \in B_{X^1}(y_0, r)$ the following holds

$$t^\theta \|x(t, x_0) - x(t, z_0)\|_{X^{1+\theta}} \leq C \|x_0 - z_0\|_{X^1}, \quad \forall t \in [0, \tau_0], \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0 < \gamma(\epsilon)$$

Also, if $\gamma(\epsilon) > \rho\epsilon$, then r can be chosen arbitrarily large. That is, the time of existence is uniform on bounded sets of X^1 .

If $t \rightarrow f(t, x)$, as a map from $(0, \infty)$ to $X^{\gamma(\epsilon)}$, is locally Hölder continuous, uniformly on bounded sets of $x \in X^{1+\gamma(\epsilon)}$, then $x \in C^1((0, \tau_0], X^{\gamma(\epsilon)}) \cap C((0, \tau_0], X^{1+\gamma(\epsilon)})$, and $x(\cdot, x_0)$ is an strict solution of (9.12).

The constants above depend on the following: $\tau_0 = \tau_0(y_0, A, \nu(\cdot), \epsilon, \rho, \gamma(\epsilon), c, M)$, $r = r(y_0, \epsilon, \rho, \gamma(\epsilon), c, M)$, $C = C(\theta_0, \epsilon, \rho, \gamma(\epsilon), M)$.

In many applications the map f is independent of time. For the shake of completeness and clarity we include in the following corollary the statement of Theorem 9.2.1 adapted to time independent maps:

Corolário 9.2.1 *Assume that f is independent of time and that it is an ϵ -regular map, for some $\epsilon > 0$, relatively to the pair (X^1, X^0) . Then, if $y_0 \in X^1$, there exist $r = r(y_0) > 0$ and $\tau_0 = \tau_0(y_0) > 0$ such that for $x_0 \in X^1$ with $\|x_0 - y_0\|_{X^1} < r$ there exists a continuous function $x : [0, \tau_0] \rightarrow X^1$, with $x(0) = x_0$, which is the unique ϵ -regular mild solution to (9.3) starting at x_0 . This solution satisfies*

$$\begin{aligned} x &\in C((0, \tau_0], X^{1+\theta}), \quad 0 \leq \theta < \gamma(\epsilon) \\ t^\theta \|x(t, x_0)\|_{X^{1+\theta}} &\xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0, \quad 0 < \theta < \gamma(\epsilon) \end{aligned}$$

Moreover, if $x_0, z_0 \in B_{X^1}(y_0, r)$ the following holds

$$t^\theta \|x(t, x_0) - x(t, z_0)\|_{X^{1+\theta}} \leq C(\theta_0) \|x_0 - z_0\|_{X^1}, \quad \forall t \in [0, \tau_0], \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0 < \gamma(\epsilon).$$

Also, if $\gamma(\epsilon) > \rho\epsilon$, then r can be chosen arbitrarily large. That is, the time of existence can be chosen uniform on bounded sets of X^1 .

Furthermore, $x \in C^1((0, \tau_0], X^{\gamma(\epsilon)}) \cap C((0, \tau_0], X^{1+\gamma(\epsilon)})$, that is, $x(\cdot, x_0)$ is an strict solution of (9.3).

The constants above depend on the following: $\tau_0 = \tau_0(y_0, A, \epsilon, \rho, \gamma(\epsilon), c, M)$, $r = r(y_0, \epsilon, \rho, \gamma(\epsilon), c, M)$, $C = C(\theta_0, \epsilon, \rho, \gamma(\epsilon), M)$.

The proof of this corollary is straightforward once we have proved Theorem 9.2.1.

Observação 9.2.1 *Notice that we do not assume that f is a well defined map on X^1 . The only requirement on f is that it is an ϵ -regular map relatively to (X^1, X^0) , for some $\epsilon > 0$. In particular we can obtain an existence and uniqueness theorem in X^1 without the nonlinearity being defined on X^1 .*

Before we prove Theorem 9.2.1 we will need some lemmas.

Lema 9.2.1 *The operators $t^\alpha e^{-At} : X^1 \rightarrow X^{1+\alpha}$, $t > 0$, are operators satisfying $\|t^\alpha e^{-At}\|_{L(X^1, X^{1+\alpha})} \leq M$, with M independent of t . Moreover given a compact subset J of X^1 we have*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in J} \|t^\alpha e^{-At} x\|_{X^{1+\alpha}} = 0.$$

Proof: The fact that $\|t^\alpha e^{-At}\|_{L(X^1, X^{1+\alpha})} \leq M$ comes from statement (9.9).

For the remaining part we just have to realize that the operators $t^\alpha e^{-At} : X^1 \rightarrow X^{1+\alpha}$ are bounded, uniformly in t , that $\|t^\alpha e^{-At} x\|_{X^{1+\alpha}} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$, for $x \in X^{1+\alpha}$, and that $X^{1+\alpha}$ is a dense set of X^1 .

Let us recall the definition of the beta function $\mathbf{B}(\cdot, \cdot) : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, which is

$$\mathbf{B}(a, b) = \int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1} dx.$$

Define

$$\mathbf{B}_\epsilon^\theta = \max_{0 \leq \xi \leq \theta} \{\mathbf{B}(\gamma(\epsilon) - \xi, 1 - \gamma(\epsilon)), \mathbf{B}(\gamma(\epsilon) - \xi, 1 - \rho\epsilon)\}.$$

Lema 9.2.2 *Let $f \in \mathcal{F}(\nu(\cdot))$. If $x \in C((0, \tau], X^{1+\epsilon})$, then for all $0 \leq \theta < \gamma(\epsilon)$, we have*

$$t^\theta \left\| \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, x(s)) ds \right\|_{X^{1+\theta}} \leq cM \mathbf{B}_\epsilon^\theta (\nu(t) + t^{\gamma(\epsilon)-\rho\epsilon} [\lambda(t)]^\rho) \quad 0 < t \leq \tau,$$

where $\lambda(t) := \sup_{s \in (0, t]} \{s^\epsilon \|x(s)\|_{X^{1+\epsilon}}\}$.

Proof. It is not difficult to see that the following holds,

$$\begin{aligned} t^\theta \left\| \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, x(s)) ds \right\|_{X^{1+\theta}} &\leq Mt^\theta \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\epsilon)-\theta} \|f(s, x(s))\|_{X^{\gamma(\epsilon)}} ds \\ &\leq cMt^\theta \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\epsilon)-\theta} (\nu(s)s^{-\gamma(\epsilon)} + \|x(s)\|_{X^{1+\epsilon}}^\rho) ds \\ &\leq cMt^\theta \nu(t) \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\epsilon)-\theta} s^{-\gamma(\epsilon)} ds + cMt^\theta \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\epsilon)-\theta} s^{-\rho\epsilon} [s^\epsilon \|x(s)\|_{X^{1+\epsilon}}]^\rho ds \\ &\leq cM\nu(t) \int_0^1 (1-s)^{-1+\gamma(\epsilon)-\theta} s^{-\gamma(\epsilon)} ds + cMt^{\gamma(\epsilon)-\rho\epsilon} [\lambda(t)]^\rho \int_0^1 (1-s)^{-1+\gamma(\epsilon)-\theta} s^{-\rho\epsilon} ds \\ &= cM \mathbf{B}_\epsilon^\theta [\nu(t) + t^{\gamma(\epsilon)-\rho\epsilon} [\lambda(t)]^\rho], \end{aligned}$$

from where the lemma follows.

Lema 9.2.3 *Let $f \in \mathcal{F}(\nu(\cdot))$ and $x, y \in C((0, \tau], X^{1+\epsilon})$ such that $t^\epsilon \|x(t)\|_{X^{1+\epsilon}} \leq \mu$, $t^\epsilon \|y(t)\|_{X^{1+\epsilon}} \leq \mu$, for some $\mu > 0$. Then, for all $0 \leq \theta < \gamma(\epsilon)$, we have*

$$t^\theta \left\| \int_0^t e^{A(t-s)} [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds \right\|_{X^{1+\theta}} \leq \Gamma_\theta(t) \sup_{s \in [0, \tau]} s^\epsilon \|x(s) - y(s)\|_{X^{1+\epsilon}}$$

where

$$\Gamma_\theta(t) = cM \mathbf{B}_\epsilon^\theta \left[\nu(t) + t^{\gamma(\epsilon)-\rho\epsilon} 2\mu^{\rho-1} \right].$$

Proof: Using the ϵ -regularity property of f we have that

$$\begin{aligned} t^\theta \left\| \int_0^t e^{A(t-s)} [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds \right\|_{X^{1+\theta}} &\leq t^\theta \int_0^t cM (t-s)^{-1+\gamma(\epsilon)-\theta} \|x(s) - y(s)\|_{X^{1+\epsilon}} (\nu(t)s^{-\gamma(\epsilon)+\epsilon} + \|x(s)\|_{X^{1+\epsilon}}^{\rho-1} + \|y(s)\|_{X^{1+\epsilon}}^{\rho-1}) ds \\ &\leq cMt^\theta \nu(t) \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\epsilon)-\theta} s^{-\gamma(\epsilon)} s^\epsilon \|x(s) - y(s)\|_{X^{1+\epsilon}} ds + \\ &cMt^\theta \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\epsilon)-\theta} s^{-\rho\epsilon} [(s^\epsilon \|x(s)\|_{X^{1+\epsilon}})^{\rho-1} + (s^\epsilon \|y(s)\|_{X^{1+\epsilon}})^{\rho-1}] s^\epsilon \|x(s) - y(s)\|_{X^{1+\epsilon}} ds \\ &= \Gamma_\theta(t) \sup_{t \in [0, \tau]} \{s^\epsilon \|x(s) - y(s)\|_{X^{1+\epsilon}}\} \end{aligned}$$

Proof of Theorem 9.2.1: We will divide the proof in two parts, existence and uniqueness.

Existence. Define μ by

$$cM\mathbf{B}_\epsilon^\epsilon \mu^{\rho-1} = \frac{1}{8}$$

Let us choose now $r = r(\mu, M) > 0$ such that

$$r = \frac{\mu}{4M} = \frac{1}{4M(8cM\mathbf{B}_\epsilon^\epsilon)^1 \rho - 1} \quad (9.13)$$

Also, for y_0 fixed, choose $\tau_0 = \tau_0(y_0, A, \mu, \nu(\cdot), \epsilon, \rho, \gamma(\epsilon), c, M) \in (0, 1]$ such that $\nu(t) < \delta$ for $t \in (0, \tau_0]$ and

$$\|t^\epsilon e^{-At} y_0\|_{X^{1+\epsilon}} \leq \mu 2, \quad 0 \leq t \leq \tau_0, \quad (9.14)$$

$$cM\delta\mathbf{B}_\epsilon^\epsilon = \min\left\{\frac{\mu}{8}, \frac{1}{4}\right\}$$

Notice that these choices imply that $\Gamma_\epsilon(t) \leq \frac{1}{2}$ for $t \in (0, 1)$.

Since we will be looking for solutions which regularize immediately we search for solutions in

$$K(\tau_0) = \{x \in C((0, \tau_0], X^{1+\epsilon}) : \sup_{t \in (0, \tau_0]} t^\epsilon \|x(t)\|_{X^{1+\epsilon}} \leq \mu\}.$$

with the norm

$$\|x\|_{K(\tau_0)} = \sup_{t \in (0, \tau_0]} t^\epsilon \|x(t)\|_{X^{1+\epsilon}}.$$

Consider $x_0 \in X^1$ with $\|x_0 - y_0\|_{X^1} < r$, $f \in \mathcal{F}(\delta)$ and on $K(\tau_0)$ define the map

$$(Tx)(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, x(s)) ds.$$

We will show that, for all $x_0 \in B_{X^1}(y_0, r)$, T takes $K(\tau_0)$ into itself and that T is a strict contraction in $K(\tau_0)$.

Let us first prove that T is a well defined map and that $T(K(\tau_0)) \subset K(\tau_0)$. We start showing the following,

$$\text{if } x \in K(\tau_0) \quad \text{then} \quad Tx \in C((0, \tau_0], X^{1+\theta}), \quad \forall \theta \in [0, \gamma(\epsilon)). \quad (9.15)$$

Fix $t_2 \in (0, \tau_0]$ and let $\tau_0 \geq t_1 > t_2$; then, for $0 \leq \theta < \gamma(\epsilon)$, we have:

$$\begin{aligned} \|(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)\|_{X^{1+\theta}} &\leq \|(e^{-At_1} - e^{-At_2})x_0\|_{X^{1+\theta}} + \left\| \int_{t_2}^{t_1} e^{A(t_1-s)} f(s, x(s)) ds \right\|_{X^{1+\theta}} \\ &\quad + \left\| [I - e^{-A(t_1-t_2)}] \int_0^{t_2} e^{A(t_2-s)} f(s, x(s)) ds \right\|_{X^{1+\theta}}. \end{aligned}$$

In the above, the first and third term trivially go to zero when $t_1 \rightarrow t_2$. Let us consider the second term. For that we have

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_2}^{t_1} e^{A(t_1-s)} f(s, x(s)) ds \right\|_{X^{1+\theta}} &\leq c \int_{t_2}^{t_1} M(t_1 - s)^{-1+\gamma(\epsilon)-\theta} (\delta s^{-\gamma(\epsilon)} + \|x(s)\|_{X^{1+\epsilon}}^\rho) ds \\ &\leq cM\delta \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - s)^{-1+\gamma(\epsilon)-\theta} s^{-\gamma(\epsilon)} ds + cM \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - s)^{-1+\gamma(\epsilon)-\theta} s^{-\rho\epsilon} (s^\epsilon \|x(s)\|_{X^{1+\epsilon}})^\rho ds \\ &\leq cM\delta t_1^{-\theta} \int_{t_2}^1 (1-s)^{-1+\gamma(\epsilon)-\theta} s^{-\gamma(\epsilon)} ds + cM\mu^\rho t_1^{\gamma(\epsilon)-\theta-\rho\epsilon} \int_{t_2}^1 (1-s)^{-1+\gamma(\epsilon)-\theta} s^{-\rho\epsilon} ds. \end{aligned}$$

Which goes to zero as $t_1 \rightarrow t_2^+$. The case $t_1 < t_2$ is similar.

Let us now show that $t^\epsilon \|x(t)\|_{X^{1+\epsilon}} \leq \mu$, for all $t \in (0, \tau_0]$. In fact

$$\begin{aligned}
t^\epsilon \| (Tx)(t) \|_{X^{1+\epsilon}} &\leq \| t^\epsilon e^{-At} x_0 \|_{X^{1+\epsilon}} + cMt^\epsilon \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\epsilon)-\epsilon} (\delta s^{-\gamma(\epsilon)} + \|x\|_{X^{1+\epsilon}}^\rho) ds \\
&\leq \| t^\epsilon e^{-At} x_0 \|_{X^{1+\epsilon}} + cMt^\epsilon \delta \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\epsilon)-\epsilon} s^{-\gamma(\epsilon)} ds \\
&\quad + cMt^\epsilon \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\epsilon)-\epsilon} s^{-\rho\epsilon} (s^\epsilon \|x\|_{X^{1+\epsilon}})^\rho ds \\
&\leq \| t^\epsilon e^{-At} x_0 \|_{X^{1+\epsilon}} + cM\delta \mathbf{B}_\epsilon^\epsilon + cM\mathbf{B}_\epsilon^\epsilon \mu^\rho \\
&\leq Mr + \| t^\epsilon e^{-At} y_0 \|_{X^{1+\epsilon}} + cM\mathbf{B}_\epsilon^\epsilon \delta + cM\mathbf{B}_\epsilon^\epsilon \mu^\rho \leq \mu.
\end{aligned}$$

This shows that T takes $K(\tau_0)$ into itself.

The next step is to prove that the map T is a contraction from $K(\tau_0)$ into itself.

It follows from Lemma 9.2.3, by taking $\theta = \epsilon$, that T is a strict contraction in $K(\tau_0)$ and that

$$\|T(x) - T(y)\|_{K(\tau_0)} \leq \frac{1}{2} \|x - y\|_{K(\tau_0)}.$$

By the Banach contraction principle we have that T has a unique fixed point in $K(\tau_0)$. We will denote this fixed point by $X(t, x_0)$ which is defined for $\|x_0 - y_0\|_{X^1} < r$, $0 \leq t \leq \tau_0$. Note that, from (9.15) $X(\cdot, x_0) \in C((0, \tau_0], X^{1+\theta})$, for all $0 \leq \theta < \gamma(\epsilon)$.

Let us prove that $t^\theta \|X(t, x_0)\|_{X^{1+\theta}} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow 0$ for all $0 < \theta < \gamma(\epsilon)$.

From Lemma 9.2.2

$$\begin{aligned}
t^\theta \|X(t, x_0)\|_{X^{1+\theta}} &\leq t^\theta \|e^{At} x_0\|_{X^{1+\theta}} + t^\theta \int_0^t \|e^{A(t-s)} f(s, X(s, x_0))\|_{X^{1+\theta}} ds \\
&\leq t^\theta \|e^{At} x_0\|_{X^{1+\theta}} + cM\mathbf{B}_\epsilon^\theta \nu(t) + cM\mathbf{B}_\epsilon^\theta \mu^{\rho-1} \sup_{0 < s \leq t} \{t^\epsilon \|X(t, x_0)\|_{X^{1+\epsilon}}\}
\end{aligned}$$

Therefore if $\theta = \epsilon$ we have

$$t^\epsilon \|X(t, x_0)\|_{X^{1+\epsilon}} \leq t^\epsilon \|e^{At} x_0\|_{X^{1+\epsilon}} + cM\mathbf{B}_\epsilon^\epsilon \nu(t) + \frac{1}{8} \sup_{0 < s \leq t} \{t^\epsilon \|X(t, x_0)\|_{X^{1+\epsilon}}\}$$

from where we obtain

$$\sup_{0 < s \leq t} \{s^\epsilon \|X(s, x_0)\|_{X^{1+\epsilon}}\} \leq \frac{8}{7} (t^\epsilon \|e^{At} x_0\|_{X^{1+\epsilon}} + cM\mathbf{B}_\epsilon^\epsilon \nu(t)) \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow 0$$

If $0 < \theta < \gamma(\epsilon)$, from the above expressions we also obtain $t^\theta \|X(t, x_0)\|_{X^{1+\theta}} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow 0$.

Let us prove now that

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|X(t, x_0) - x_0\|_{X^1} = 0$$

In fact, from Lemma 9.2.2

$$\begin{aligned}
\|X(t, x_0) - x_0\|_{X^1} &\leq \|e^{At} x_0 - x_0\|_{X^1} + \int_0^t \|e^{A(t-s)} f(s, X(s, x_0))\|_{X^1} ds \\
&\leq \|e^{At} x_0 - x_0\|_{X^1} + cM\mathbf{B}_\epsilon(\nu(t) + [\sup_{0 < s \leq t} \{t^\epsilon \|X(t, x_0)\|_{X^{1+\epsilon}}\}]^\rho) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0,
\end{aligned}$$

With all these we have that $X(t, x_0)$ is an ϵ -regular solution starting at x_0 and it is the unique ϵ -regular solution starting at x_0 , in the set $K(\tau_0)$. We will hereafter call it the K -solution starting at x_0 .

Moreover, if $x_0, z_0 \in B_{X^1}(y_0, r)$, taking into account the estimates of Lemma 9.2.3, and our choice of τ_0 , we have

$$\begin{aligned} & t^\theta \|X(t, x_0) - X(t, z_0)\|_{X^{1+\theta}} \\ & \leq t^\theta \|e^{At}(x_0 - z_0)\|_{X^{1+\theta}} + t^\theta \int_0^t \|e^{A(t-s)}[f(s, X(s, x_0)) - f(s, X(s, z_0))]\|_{X^{1+\theta}} ds \\ & \leq M\|x_0 - z_0\|_{X^1} + \Gamma_\theta(t) \sup_{s \in [0, \bar{\tau}_0]} s^\epsilon \|X(s, x_0) - X(s, z_0)\|_{X^{1+\epsilon}}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

For $\theta = \epsilon$ we get

$$t^\epsilon \|X(t, x_0) - X(t, z_0)\|_{X^{1+\epsilon}} \leq M\|x_0 - z_0\|_{X^1} + \frac{1}{2} \sup_{s \in [0, \bar{\tau}_0]} s^\epsilon \|X(s, x_0) - X(s, z_0)\|_{X^{1+\epsilon}}$$

which implies

$$t^\epsilon \|X(t, x_0) - X(t, z_0)\|_{X^{1+\epsilon}} \leq 2M\|x_0 - z_0\|_{X^1},$$

for $0 \leq \theta \leq \theta_0 < \gamma(\epsilon)$ we have from (9.16) that

$$t^\theta \|X(t, x_0) - X(t, z_0)\|_{X^{1+\theta}} \leq M\|x_0 - z_0\|_{X^1} + \Gamma_\theta(t) 2M\|x_0 - z_0\|_{X^1} \leq C(\theta_0)\|x_0 - z_0\|_{X^1}.$$

where $C(\theta_0) = M(1 + 2 \sup\{\Gamma_\theta(t); t \in [0, \tau_0], 0 \leq \theta \leq \theta_0\})$

This concludes the existence part of the theorem.

Uniqueness. Notice that from the existence part we have that for any $x_0 \in B_{X^1}(y_0, r)$ and for any $f \in \mathcal{F}(\nu(\cdot))$ there exists a unique K -solution defined in $[0, \tau_0]$, of the problem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(t, x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (9.17)$$

To stress the dependence of the K -solution on f we will denote it by $X_f(t, x_0)$.

Consider the following

Lema 9.2.4 *If $\phi(t)$ is an ϵ -regular solution in $[0, t_0]$ of (9.17) and $t^\epsilon \|\phi(t)\|_{X^{1+\epsilon}} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow 0$, then $\phi(t) = X_f(t, x_0)$ for all $0 \leq t \leq \min\{\tau_0, t_0\}$*

Proof. It is clear that $\phi \in K(\bar{\tau})$ for certain $\bar{\tau} \leq \tau_0$ small. Since we also have $X_f(\cdot, x_0) \in K(\bar{\tau})$ and both ϕ and $X_f(\cdot, x_0)$ are solutions of the integral equation we get $X_f(t, x_0) = \phi(t)$ for all $0 \leq t \leq \bar{\tau}$. With an standard continuation argument it is easy to see that we must have $X_f(t, x_0) = \phi(t)$ for all $0 \leq t \leq \min\{t_0, \tau_0\}$. This concludes the proof of the lemma.

Lema 9.2.5 *If $f \in \mathcal{F}(\nu(\cdot))$ then $f_a \in \mathcal{F}(\nu_a(\cdot))$ for all $a \geq 0$, where $f_a(t, x) \equiv f(t + a, x)$ and $\nu_a(t) = \nu(t + a)(t/t + a)^{\gamma(\epsilon)} \leq \nu(t + a)$. Moreover, there exists $a_0 > 0$, small, such that for all $a \in [0, a_0]$ the time of existence $\tau_0(a)$ given by (9.14) can be chosen independent of a .*

Proof. The first part of the lemma is trivial.

For the second one we just need to observe that if $\nu(t) < \delta$ for $t \in [0, \tau_0]$ then, for a small, we will also have $\nu(t + a) < \delta$ for $t \in [0, \tau_0]$.

Following similar ideas as in [7], we can prove now the uniqueness of ϵ -regular solutions.

Let $\phi(t)$, $0 \leq t \leq t_0$, be an ϵ -regular solution starting in $x_0 \in B_{X^1}(y_0, r)$. From the fact that $\phi \in C([0, t_0], X^1)$ we have that there exists a $0 < a_0 \leq t_0$ such that $\phi(a) \in B_{X^1}(y_0, r)$. Notice that $\phi_a(\cdot) \equiv \phi(a + \cdot) \in C([0, t_0 - a], X^{1+\epsilon})$, and therefore $t^\epsilon \|\phi_a(t)\|_{X^{1+\epsilon}} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow 0$. Moreover, ϕ_a is an ϵ -regular mild solution of

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f_a(t, x) \\ x(0) &= \phi(a) \end{aligned} \quad (9.18)$$

From Lemma 9.2.5 and the results of the existence part we have that there exists a unique K -solution of problem (9.18), $X_{f_a}(t, \phi(a))$, defined in $[0, \tau_0]$. Moreover, from Lemma 9.2.4, we get $X_{f_a}(t, \phi(a)) = \phi_a(t)$ for all $0 \leq t \leq \min\{\tau_0, t_0 - a\}$, for all $0 < a \leq a_0$. In particular this implies that without loss of generality we can assume that $t_0 \geq \tau_0$, since if this is not the case we can define $\tilde{\phi}(t) = \phi(t)$ for $0 \leq t \leq t_0$ and $\tilde{\phi}(t) = X_{f_{a_0}}(t - a_0, \phi(a_0))$ for $t_0 \leq t \leq \tau_0$, and from the results above $\tilde{\phi}$ is also an ϵ -regular solution starting at x_0 .

In view of the definition of K -solution, the only thing we need to show is that $t^\epsilon \|\phi(t)\|_{X^{1+\epsilon}} \leq \mu$ for all $0 < t \leq \tau_0$. But, for $0 < a < a_0$,

$$t^\epsilon \|\phi(t)\|_{X^{1+\epsilon}} \leq t^\epsilon \|\phi(t) - \phi(t+a)\|_{X^{1+\epsilon}} + t^\epsilon \|X_{f_a}(t, \phi(a))\|_{X^{1+\epsilon}} \leq t^\epsilon \|\phi(t) - \phi(t+a)\|_{X^{1+\epsilon}} + \mu$$

For $0 < t \leq \tau_0$ fixed, letting $a \rightarrow 0$ we have that $t^\epsilon \|\phi(t) - \phi(t+a)\|_{X^{1+\epsilon}} \rightarrow 0$, which implies that $t^\epsilon \|\phi(t)\|_{X^{1+\epsilon}} \leq \mu$ for all $t \in (0, \tau_0]$. This concludes the uniqueness part of the theorem.

For the case where $\gamma(\epsilon) > \rho\epsilon$, we proceed as follows. Let us define $y(t) = x(at)$, for some $a < 1$. The equation for y is $\dot{y} = \tilde{A}y + \tilde{f}(t, y)$ where $\tilde{f}(t, x) = af(at, x)$, $\tilde{A} = aA$. Moreover, notice that $x(t)$ is a solution of the original equation in $(0, \tau_0]$, if and only if $y(t)$, $t \in [0, a\tau_0]$ is a solution of the new equation. For this new equation, applying the existence part of the theorem, we will have a positive number $\tilde{r}$ such that the conclusions of the theorem are valid. Notice that from (9.13), we will have that

$$\tilde{r} = \frac{1}{4\tilde{M}(8\tilde{c}\tilde{M}B_\epsilon^\epsilon)^{\frac{1}{\rho-1}}}$$

where $\tilde{r}, \tilde{c}$ and $\tilde{M}$ are constants related to the new equations. Let us relate $\tilde{r}, \tilde{c}, \tilde{M}$ with r, c and M . Denote by $\tilde{X}^\alpha$ the fractional power spaces associated to the operator $\tilde{A}$. Note that $\|\cdot\|_{\tilde{X}^\alpha} = a^\alpha \|\cdot\|_{X^\alpha}$ and

$$t^{\alpha-\beta} \|e^{aAt} x\|_{\tilde{X}^\alpha} = a^\beta (at)^{\alpha-\beta} \|e^{Aat} x\|_{X^\alpha} \leq Ma^\beta \|x\|_{X^\beta} = M \|x\|_{\tilde{X}^\beta},$$

which implies that $\tilde{M} = M$. To see that $\tilde{c} = a^{\gamma(\epsilon)-\rho\epsilon+1-\rho} c$ observe that

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(t, y)\|_{\tilde{X}^{\gamma(\epsilon)}} &= a^{\gamma(\epsilon)+1} \|f(at, y)\|_{X^{\gamma(\epsilon)}} \\ &\leq a^{\gamma(\epsilon)+1-\rho(1+\epsilon)} c \left(\nu(at) a^{\rho(1+\epsilon)} (at)^{-\gamma(\epsilon)} + \|y\|_{\tilde{X}^{1+\epsilon}}^\rho \right) \\ &\leq a^{\gamma(\epsilon)+1-\rho(1+\epsilon)} c \left(\tilde{\nu}(t) t^{-\gamma(\epsilon)} + \|y\|_{\tilde{X}^{1+\epsilon}}^\rho \right) \end{aligned}$$

where $\tilde{\nu}(t) = \nu(at) a^{\rho(1+\epsilon)-\gamma(\epsilon)}$. The computations with the Lipschitz properties of f are similar. From this we have that

$$\tilde{r} = \frac{1}{4\tilde{M}(8\tilde{c}\tilde{M}B_\epsilon^\epsilon)^{\frac{1}{\rho-1}}} = ra^{\frac{\rho\epsilon-\gamma(\epsilon)}{\rho-1}+1}.$$

This implies that if $\|y_0 - x_0\|_{\tilde{X}^1} < \tilde{r}$ there exists a $\tilde{\tau}_0$ such that the solution of $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{f}(t, \tilde{x})$ starting in x_0 is defined in $[0, \tilde{\tau}_0]$. Therefore, if $\|y_0 - x_0\|_{X^1} < ra^{\frac{\rho\epsilon-\gamma(\epsilon)}{\rho-1}}$ then $\dot{x} = Ax + f(t, x)$ has the solution $x(t, x_0) = \tilde{x}(\frac{t}{a}, x_0)$ defined in $[0, a\tilde{\tau}_0]$. Since a can be chosen arbitrarily small and $\gamma(\epsilon) > \rho\epsilon$ we have that solutions have a common interval of existence on bounded subsets of X^1 .

Finally, if $t \rightarrow f(t, x)$ is locally Hölder continuous for $t > 0$, uniformly on bounded sets of $X^{1+\epsilon}$, using standard regularity arguments, see for example [11], we obtain the regularity stated in the theorem.

This concludes the proof of the theorem.

From Theorem 9.2.1 we have the following

Corolário 9.2.2 *If f is as in Theorem 9.2.1 and if K is a precompact set in X^1 , then there exists a $\tau_0 = \tau(K)$ such that the ϵ -regular solution starting at x_0 exists for time τ_0 for any $x_0 \in K$*

Proof. From Theorem 9.2.1, for any $y_0 \in \bar{K} \equiv Cl(K)$ there exists a $r(y_0)$ and a $\tau(y_0)$ such that for any $x_0 \in X^1$ with $\|x_0 - y_0\|_{X^1} < r(y_0)$ the unique ϵ -regular solution exists in $[0, \tau(y_0)]$. From compactness of $\bar{K}$ we can choose $y_1, \dots, y_n \in \bar{K}$ such that $K \subset \cup B_{X^1}(y_i, r(y_i))$. Choosing $\tau_0 = \min\{\tau(y_i) : 1 \leq i \leq n\}$ we prove the corollary.

With this corollary it is not difficult to prove a result on the maximal time of existence of ϵ -regular solutions,

Proposição 9.2.1 *If f is as in Theorem 9.2.1 and $x(t, x_0)$ is an ϵ -regular solution starting at x_0 with a maximal time of existence τ_m , then either $\tau_m = \infty$ or $\lim_{t \rightarrow \tau_m^-} \|x(t, x_0)\|_{X^{1+\epsilon}} = \infty$.*

Proof. Assume $\tau_m < \infty$ and also that $\liminf_{t \rightarrow \tau_m^-} \|x(t, x_0)\|_{X^{1+\epsilon}} = M < \infty$. This means that there exists a sequence of $t_n \rightarrow \tau_m^-$ such that $\|x(t_n, x_0)\|_{X^{1+\epsilon}} \leq 2M$ for all n . This implies that the sequence $\{x(t_n, x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ is a bounded sequence in $X^{1+\epsilon}$ and therefore a precompact sequence in X^1 . From the previous corollary and the uniqueness of ϵ -regular solution we obtain the result of the proposition.

In the autonomous case, it is often the case were the map f is an ϵ -regular map for a range of values of the parameter ϵ . In this direction we have the following,

Corolário 9.2.3 *If f is an ϵ -regular map for all $\epsilon \in (\epsilon_0, \epsilon_1]$ then if we denote by $x_\epsilon(t, x_0)$ the unique ϵ -regular solution starting at x_0 , for $\epsilon \in (\epsilon_0, \epsilon_1]$, then $x_\epsilon = x_{\epsilon_1}$ and $x \in C((0, \tau], X^{1+\gamma(\epsilon_1)})$.*

If f is a time independent map which is an ϵ -regular map in an interval I relatively to the pair (X^1, X^0) , we classify the map in the following way:

- If $I = [0, \epsilon_1]$ for some $\epsilon_1 > 0$ and $\gamma(0) > 0$. We say that f is a *subcritical* map relative to (X^1, X^0) .
- If $I = [0, \epsilon_1]$ for some $\epsilon_1 > 0$ with $\gamma(\epsilon) = \rho\epsilon$, $\epsilon \in I$ and if f is not subcritical; then, we say that f is a *critical* map relative to (X^1, X^0) .
- If $I = (0, \epsilon_1]$ for some $\epsilon_1 > 0$ with $\gamma(\epsilon) = \rho\epsilon$, $\epsilon \in I$, and f is not subcritical or critical; then, we say that f is a *double-critical* map relative to (X^1, X^0) .
- If $I = [\epsilon_0, \epsilon_1]$ for some $\epsilon_1 > \epsilon_0 > 0$ with $\gamma(\epsilon_0) > \rho\epsilon_0$ and f is not subcritical, critical or double critical; then, we say that f is an *ultra-subcritical* map relative to (X^1, X^0) .
- If $I = [\epsilon_0, \epsilon_1]$ for some $\epsilon_1 > \epsilon_0 > 0$ with $\gamma(\epsilon) = \rho\epsilon$, $\epsilon \in I$, and if f is not subcritical, critical, double critical or ultra-subcritical; then, we say that f is an *ultra-critical* map relative to (X^1, X^0) .

Note that if f is subcritical then $f : X^1 \rightarrow X^{\gamma(0)}$, $\gamma(0) > 0$, which is the usual definition of subcritical map. When f is a critical map it takes X^1 into X^0 but there is no positive constant α such that f takes X^1 into X^α . When f is double-critical (this name first appears in [7]) it is not defined as a map from X^1 into X^0 but it is ϵ -regular for arbitrarily small positive values of ϵ . When f is ultra-subcritical or ultra-critical is not a well defined map in $X^{1+\epsilon}$ for small values of $\epsilon > 0$, and it is only an ϵ -regular map when $\epsilon \geq \epsilon_0 > 0$, for some ϵ_0 . The main difference between ultra-subcritical and ultra-critical maps is that for the first one the time of existence of the solution can be chosen uniformly on bounded sets of X^1 , while for the last one this is still an unknown property.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Amann. On abstract parabolic fundamental solutions. *J. Math. Soc. Japan*, 39(1):93–116, 1987.
- [2] H. Amann. Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems. In *Function spaces, differential operators and nonlinear analysis (Friedrichroda, 1992)*, pages 9–126. Teubner, Stuttgart, 1993.
- [3] H. Amann. *Linear and quasilinear parabolic problems. Vol. I*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.
- [4] J. M. Arrieta and A. N. Carvalho. Abstract parabolic problems with critical nonlinearities and applications to Navier-Stokes and heat equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(1):285–310, 2000.
- [5] J. M. Arrieta, A. N. Carvalho, and A. Rodríguez-Bernal. Parabolic problems with nonlinear boundary conditions and critical nonlinearities. *J. Differential Equations*, 156(2):376–406, 1999.
- [6] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [7] H. Brézis and Thierry Cazenave. A nonlinear heat equation with singular initial data. *J. Anal. Math.*, 68:277–304, 1996.
- [8] P. Chernoff. Note on product formulas for operator semi-groups. *J. Func. Anal.*, 2:238–242, 1968.
- [9] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear operators. Part I*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1988. General theory, With the assistance of W. G. Bade and R. G. Bartle, Reprint of the 1958 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [10] M. A. Evgrafov. *Asymptotic estimates and entire functions*. Gordon and Breach, Inc., New York, 1961. Translated by Allen L. Shields. Russian Tracts on Advanced Mathematics and Physics, Vol. IV.
- [11] D. B. Henry. *Geometric theory of semilinear parabolic equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [12] T. Kato. Note on fractional powers of linear operators. *Proc. Japan Acad.*, 36:94–96, 1960.
- [13] T. Kato. Fractional powers of dissipative operators. *J. Math. Soc. Japan*, 13:246–274, 1961.
- [14] T. Kato. Fractional powers of dissipative operators, ii. *J. Math. Soc. Japan*, 14:242–248, 1962.
- [15] T. Kato and H. Fujita. On the nonstationary Navier-Stokes system. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 32:243–260, 1962.
- [16] P. G. Lemarié-Rieusset. Unicité des solutions des équations de navier-stokes. volume handwritten notes.
- [17] W. M. Ni and P. Sacks. Singular behavior in nonlinear parabolic equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 287(2):657–671, 1985.
- [18] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.

- [19] J. Prüss and H. Sohr. Imaginary powers of elliptic second order differential operators in L^p -spaces. *Hiroshima Math. J.*, 23(1):161–192, 1993.
- [20] H. Triebel. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. Johann Ambrosius Barth, Heidelberg, second edition, 1995.
- [21] H.F. Trotter. On the product of semi-groups of operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10:545–551, 1959.
- [22] F. B. Weissler. Semilinear evolution equations in Banach spaces. *J. Funct. Anal.*, 32(3):277–296, 1979.
- [23] F. B. Weissler. Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p . *Indiana Univ. Math. J.*, 29(1):79–102, 1980.
- [24] K. Yosida. Fractional powers of infinitesimal generators and the analyticity of the semigroups generated by them. *Proc. Japan Acad.*, 36:86–89, 1960.