

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Quinta lista de Exercícios - Introdução à Análise Funcional período 04.1.

Data de entrega: 30 de julho de 2004

Aluno: _____

Exercício 1 *Prove que um espaço de Banach que possui um subconjunto infinito linearmente independente não possui uma base de Hamel (base álgebra) enumerável. Sugestão: use o Lema de Baire.*

Exercício 2 (Um pouco sobre a Teoria dos Pontos Fixos) *Faça os seguintes itens:*

1. *É verdade que toda aplicação $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ possui um ponto fixo? Caso não seja verdadeira esta afirmação exemplifique e apresente condições sobre f para este resultado valha e justifique sua resposta. Sugestão: use o teorema do valor intermediário.*
2. *Seja (M, d) um espaço métrico completo e $F : X \rightarrow X$ uma contração, isto é, existe $\lambda \in [0, 1)$ tal que $d(F(u), F(v)) \leq \lambda d(u, v)$ para todo $u, v \in M$. Prove que F possui um, e somente um, ponto fixo.*
3. *Seja (M, d) um espaço métrico completo e $G : X \rightarrow X$ tal que existe m natural tal que G^m é uma contração, prove que G possui um, e somente um ponto fixo $p \in M$. Além disso, para todo $u \in M$, a sequência $(G^m(u))$ converge a p .*
4. *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tal que $\|F'(p)\| \leq \theta < 1$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$. Mostre que F é uma contração.*
5. *Sejam $S, T : M \rightarrow M$ tais que $ST = TS$ (comutam). Prove que se $p \in M$ é o único ponto fixo de S se, e somente se, p é ponto fixo de T , e reciprocamente.*
6. *Encontre os pontos fixos das aplicações:*
 - (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = 3t$, note que esta aplicação não é uma contração.
 - (b) $T : V \rightarrow V$, $T(u) = u + u_0$ onde V é um espaço vetorial normado e u_0 é um vetor em V fixo. Note que $\|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|$, para todo $u, v \in V$.
 - (c) $f : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$, $f(t) = t + 1/t$. Note também que $|f(t) - f(s)| < |t - s|$, para todo $t, s \in [1, +\infty)$.
 - (d) $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, $f(t) = 1 - 2t^2$ e $g = f \circ f = f^2$.
 - (e) $D : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $D(f) = f'$.
7. *Use o "Teorema Fundamental do Cálculo" para provar que*

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

se, e somente se, x é ponto fixo do operador $F : C[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \rightarrow C[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$

$$F(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x(s)) ds.$$

8. *Seja $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas com a norma $\|f\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. Seja $T \in L(E, E)$ operador linear contínuo tal que $\|T^n\| < 1$ para algum n natural. Mostre que dada $v \in E$ existe uma, e somente uma solução da equação: $u - Tu = v$.*

Exercício 3 (Espaços de Lebesgue) 1. *Sejam $f, g \in L^p(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e Ω subconjunto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$. Prove que a função h definida por $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ pertence ao espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$.*

2. *Sejam $(f_n), (g_n)$ seqüências em $L^p(\Omega)$ tais que $f_n \rightarrow f$ e $g_n \rightarrow g$ na norma do espaço $L^p(\Omega)$. Defina $h_n = \max\{f_n, g_n\}$. Mostre que $h_n \rightarrow h := \max\{f, g\}$.*

3. Seja (f_n) seqüência em $L^p(\Omega)$ e (g_n) seqüência em $L^\infty(\Omega)$. Suponhamos que $f_n \rightarrow f$ na norma do espaço $L^p(\Omega)$ e $g_n(x) \rightarrow g(x)$ para quase todo $x \in \Omega$ e $\|g\|_{L^\infty} \leq C$. Mostre que $f_n g_n \rightarrow fg$ na norma do espaço $L^p(\Omega)$.

4. Suponhamos que Ω tem medida de Lebesgue finita.

(a) Seja $f \in L^\infty(\Omega)$. Mostre que $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$.

(b) Seja $f \in \cap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$. Suponha que existe uma constante positiva C tal que

$$\|f\|_{L^p} \leq C, \forall p \in [1, \infty)$$

Mostre que $f \in L^\infty(\Omega)$.

(c) Construa um exemplo de uma função tal que $f \in \cap_{1 \leq p < \infty} L^p((0, 1))$ e $f \notin L^\infty((0, 1))$.

Exercício 4 Seja E espaço de Banach e $T : E \rightarrow E$ operador linear compacto. Mostre que se $\text{Im}T$ é fechada então $\text{Im}T$ tem dimensão finita. Sugestão: use o Teorema da Aplicação Aberta.

Exercício 5 Seja H espaço de Hilbert e $T \in L(H)$ operador normal, isto é, $TT^* = T^*T$.

1. Mostre que $\overline{\text{Im}T} = (\text{Ker}T^*)^\perp$ ou seja $\overline{\text{Im}T}^\perp = (\text{Ker}T^*)$.

2. Mostre que $\|Tx\| = \|T^*x\|$ para todo $x \in E$. Logo T é injetivo se, e somente se, T^* o é.

3. Usando os resultados acima prove que se T é injetivo então $\text{Im}T$ é fechada ou densa em H .

Exercício 6 H espaço de Hilbert e $T \in L(H)$.

1. Se T é operador positivo, isto é, $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$, então todo autovalor real de T é não negativo.

2. Se T é autoadjunto e positivo então os autovalores de T são não negativos.

3. Se T é autoadjunto, positivo e compacto então possui uma raiz quadrada, isto é, existe um operador $A \in L(H)$ tal que $A \circ A = T$. Sugestão: use o Teorema Espectral para operadores compactos e autoadjuntos.

Exercício 7 H espaço de Hilbert, $(e_n) \subset H$ um conjunto ortonormal e $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda_n \rightarrow 0$. Mostre que o operador $T : H \rightarrow H$ dado por

$$Tx := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

é bem definido, contínuo, autoadjunto e compacto. Sugestão: use o Teorema de Riesz-Fischer.

Exercício 8 Seja $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ dado por

$$T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

1. Mostre que T não possui autovalores.

2. Mostre que o operador adjunto de T é dado por

$$T^*(y_1, y_2, \dots) = (y_2, y_3, \dots).$$

3. Mostre que $0 \in \sigma(T^*)$, de fato 0 é autovalor de T^* .

4. Mostre que $\sigma(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \bar{\lambda} \in \sigma(T)\}$ ou equivalentemente $\rho(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \bar{\lambda} \in \rho(T)\}$.

5. Mostre que $0 \in \sigma(T)$.

6. Mostre que μ é autovalor de T^* se, e somente se, $|\mu| < 1$.

Exercício 9 Dada uma função $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ considere o operador $M_\varphi : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ dado por $M_\varphi(f) := f\varphi$.

1. Prove que M_φ é um operador limitado com $\|M_\varphi\|_{L(L^2(\Omega))} = \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$.
2. Prove que o operador adjunto de M_φ é $M_{\overline{\varphi}}$, logo M_φ é auto-adjunto se, e somente se, $\varphi = \overline{\varphi}$.
3. Prove que M_φ é um operador normal.

Exercício 10 (Hellinger-Toeplitz) Seja H espaço de Hilbert e $T : H \rightarrow H$ tal que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ para todo $x, y \in H$. Prove que T é limitado e auto-adjunto.

Exercício 11 Sejam E, H espaços de Hilbert e $T : E \rightarrow H$ linear. Suponhamos que existe $S : H \rightarrow E$ tal que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle$ para todo $x \in E$ e $y \in H$. Prove que S é linear, T e S são limitados e o operador adjunto de T é S .

Exercício 12 Seja H espaço de Hilbert complexo. Prove que $T : H \rightarrow H$ limitado é auto-adjunto se, e somente se, $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$.

Exercício 13 Dê um exemplo de $T : H \rightarrow H$ limitado que não é auto-adjunto e $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$. Sugestão: rotação de um ângulo reto.

Exercício 14 Seja H espaço de Hilbert.

1. Prove que todo operador $T : H \rightarrow H$ limitado pode ser escrito de forma única como $T = T_1 + iT_2$ onde T_1 e T_2 são auto-adjuntos.
2. Neste caso, prove que o operador adjunto de T é dado por $T^* = T_1 - iT_2$.
3. Prove que T é normal se, e somente se, T_1 e T_2 comutam entre si.

Exercício 15 Seja H espaço de Hilbert e $(T_n) \subset L(H)$ uma seqüência de operadores auto-adjuntos tal que $T_n \rightarrow T$ onde $T \in L(H)$. Prove que T é auto-adjunto se a convergência for uniforme ou fraca.

Exercício 16 Seja H espaço de Hilbert complexo e $T \in L(H)$.

1. Mostre que $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(T^*T)$.
2. Mostre que $\overline{\text{Im}(T^*)} = \overline{\text{Im}(T^*T)}$.

Exercício 17 Seja H espaço de Hilbert e sejam P_E e P_F as projeções ortogonais sobre os subespaços fechados E e F de H , respectivamente.

1. Mostre que se $\text{Im}(P_E) \cap \text{Ker}(P_F)$ não é trivial, então $\|P_E - P_F\| = 1$.
2. Determine quando $P_F - P_E$ é uma projeção ortogonal.
3. Mostre que as seguintes sentenças são equivalentes:
 - (a) $P_F - P_E$ é um operador positivo.
 - (b) $\|P_E x\| \leq \|P_F x\|$ para todo $x \in H$.
 - (c) E é subespaço de F .
 - (d) $P_E P_F = P_F P_E = P_E$.
4. Mostre que $E \perp F$ se, e somente se, $P_E P_F = P_F P_E = 0$.

Exercício 18 Sejam $T, S : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ dadas por $(Tx)_n := x_{n+1} - x_{n-1}$ e $(Sx)_n := x_{n+1} + x_{n-1}$ sendo $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$.

1. Mostre que T e S são limitados e determine $\|T\|$ e $\|S\|$.
2. Determine o operador adjunto de T .
3. Prove que S é auto-adjunto.

Exercício 19

Exercício 20