

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
 CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
 PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
 Quarta lista de Exercícios - Introdução à Análise Funcional período 04.1.
 Data de entrega: 01 de julho de 2004
 Aluno: _____

Exercício 1 Considere o espaço $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Prove que não existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido em $C([0, 1], \mathbb{R})$ tal que $\|\cdot\|_\infty = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Exercício 2 Seja W um subespaço de um espaço Hilbert H . Prove que se W é fechado então W também é um espaço de Hilbert.

Exercício 3 Seja $(H, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Dizemos que uma sequência $(x_n) \subset H$ converge para $x \in H$ segundo a norma $\|\cdot\|$ quando $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$, neste caso escrevemos $x_n \rightarrow x$. Suponhamos agora que H é um espaço com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e que $\|\cdot\|$ é a norma induzida por este produto interno. Dizemos que a sequência (x_n) converge fraco para x quando para todo $y \in H$ temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

e, neste caso, escrevemos $x_n \rightharpoonup x$. Prove que se $x_n \rightarrow x$ então $x_n \rightharpoonup x$. Construa um contra exemplo para provar que a recíproca não vale em geral. Sugestão: Tome $H = \ell_2(\mathbb{R})$ e $(x_n) \in \ell_2(\mathbb{R})$ tal que

$$x_n^k = \delta_n^k = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k, \\ 0 & \text{se } n \neq k. \end{cases}$$

Note que para todo $(y_n) \in \ell_2(\mathbb{R})$ temos que $\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = y_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e portanto $x_n \rightharpoonup 0 \in \ell_2(\mathbb{R})$. Por outro lado, temos que $\|(x_n)\|_2 = 1$ portanto não podemos ter $\|x_n\|_2 \rightarrow 0$.

Exercício 4 Seja $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno e (x_n) uma sequência em H tal que

$$\|x_n\| \rightarrow \|x\| \quad \text{e} \quad \langle x_n, x \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle.$$

Prove que neste caso temos $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$ em H , isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$. Compare este resultado com o resultado do exercício anterior.

Exercício 5 (Teorema de Pitágoras) Seja $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno. Seja $(x_i)_{i=1}^m$ um conjunto ortonormal de vetores de H . Prove que vale a identidade:

$$\left| \sum_{i=1}^m x_i \right|^2 = \sum_{i=1}^m |x_i|^2.$$

Exercício 6 Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um semi-produto interno em E e $a \in E$ fixado. Prove que a função $G : E \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $G(x) := \langle x, a \rangle$ é uniformemente contínua. Sugestão: Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Exercício 7 Sejam $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ e $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ espaços de Hilbert. O espaço produto cartesiano $H = H_1 \times H_2$ é um espaço de Hilbert com relação a função

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle := \langle x_1, y_1 \rangle_1 + \langle x_2, y_2 \rangle_2.$$

Exercício 8 Seja $(H_n, \langle \cdot, \cdot \rangle_n)$ uma seqüência de espaços de Hilbert e denotamos por $\|\cdot\|_n$ a norma associada. Consideremos o conjunto

$$H = \left\{ (x_n) : x_n \in H_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n^2 < \infty \right\}.$$

Prove que H é um espaço vetorial o qual munido da função

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y_n \rangle \text{ é um espaço de Hilbert.}$$

Exercício 9 Se E é um espaço com produto interno prove que existe um espaço de Hilbert que é um completamento de E , o qual é único a menos de isometria entre espaços de Hilbert.

Exercício 10 Seja $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno.

1. Prove que vale a identidade de polarização, isto é,

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i \|x + iy\|^2 - i \|x - iy\|^2 \right].$$

Veja que desta identidade, podemos recuperar a função produto interno, a partir da norma.

2. Prove que vale a lei do paralelogramo para a norma induzida pelo produto interno, isto é,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Reciprocamente, prove que se $(H, \|\cdot\|)$ é um espaço normado onde vale a lei do paralelogramo, então esta norma provém de um produto interno (sugestão: use a identidade de polarização para definir o candidato a produto interno). Interprete geometricamente este resultado.

Exercício 11 Seja $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert e seja $V \subset E$ um subespaço vetorial de E . Se V não é denso em E mostre que existe $y \in E \setminus \{0\}$ tal que $y \perp \bar{V}$. Logo V é denso em E se, e somente se, $y \perp V$ implicar em $y = 0$.

Exercício 12 Seja $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert e seja $V \subset E$ um subespaço vetorial fechado de E . Se $x_o \in E$, mostre que

$$\min\{\|x - x_o\| : x \in V\} = \max\{|\langle x_o, y \rangle| : y \in V^\perp \text{ e } \|y\| = 1\}.$$

Exercício 13 Seja $E = \ell^2(\mathbb{K})$ e $e_n \in \ell^2(\mathbb{K})$ dado por $e_n := (\delta_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ onde

$$\delta_{n,k} := \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k. \end{cases}$$

Seja $M := \{e_{2n-1} + e_{2n} : n = 1, 2, \dots\}$.

1. Determine $M^\perp$ e $M^{\perp\perp}$;
2. Sejam P e Q as projeções ortogonais sobre $M^\perp$ e $M^{\perp\perp}$ respectivamente. Mostre que se $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{K})$, então

$$P(a) = (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{onde} \quad b_{2k-1} = -b_{2k} = \frac{a_{2k-1} - a_{2k}}{2}$$

$$Q(a) = (c_k)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{onde} \quad c_{2k-1} = c_{2k} = \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{2}$$

Exercício 14 Seja $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert e P, Q projeções ortogonais.

1. Mostre que $PQ(E) = P(E) \cap Q(E)$;
2. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:
 - (a) $PQ = QP$;
 - (b) PQ é projeção ortogonal;
 - (c) QP é projeção ortogonal;
3. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:
 - (a) $P(E) \perp Q(E)$;
 - (b) $P(Q(E)) = \{0\}$;
 - (c) $Q(P(E)) = \{0\}$;
 - (d) $PQ = 0$;
 - (e) $QP = 0$;
 - (f) $P + Q$ é projeção ortogonal.

Exercício 15 Seja $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert e P, Q projeções ortogonais. Se $\|P - Q\| < 1$ mostre que $P(E)$ e $Q(E)$ são isomorfos isometricamente.

Exercício 16 Seja $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert e $V \subset E$ um subespaço vetorial fechado de E invariante por T , isto é, $T(V) \subset V$. Diz-se que V reduz T se V e $V^\perp$ são invariantes por T . Seja P uma projeção ortogonal com $V = P(E)$. Prove que são equivalentes

1. V reduz T ;
2. $PT = TP$;

3. V é invariante.

Exercício 17 Se E_1 e E_2 são espaços de Hilbert, então um deles é isomorfo isometricamente a um subespaço fechado do outro.

Exercício 18 Seja (r_n) a sequência de Rademacher definida como segue:

$$\begin{aligned} r_n(t) &= 1 & \text{para } \frac{k-1}{2^n} \leq t \leq \frac{k}{2^n}, \text{ } k \text{ ímpar}, 1 \leq k < 2^n \\ r_n(t) &= -1 & \text{para } \frac{k-1}{2^n} \leq t \leq \frac{k}{2^n}, \text{ } k \text{ par}, 1 < k \leq 2^n \\ r_n(t) &= -1 & \text{para } t = 1. \end{aligned}$$

1. Mostre que este sistema é ortonormal em $L^2([0, 1], \mathbb{R})$.

2. Mostre que este sistema não é completo.

Exercício 19 Seja $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert. $T \in L(E)$ é normal se $T^*T = TT^*$. Mostre que T é normal se, e somente se, $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$, $\forall x \in E$.

Exercício 20 Seja $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert. Sejam $u, v \in E$ com $\|u\| = \|v\| = 1$. Prove que para todo $t \in (0, 1)$ temos $\|tu + (1-t)v\| < 1$. O que isto diz sobre a bola unitária $\{u \in E : \|u\| \leq 1\}$?

Exercício 21 Seja $E = \ell^2$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $L((\alpha_n)) = \alpha_{n_0}$. Determine $v_0 \in E$ tal que $f(u) = \langle u, v_0 \rangle$, $\forall u \in E$.