

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Terceira lista de Exercícios - Introdução à Análise Funcional período 04.1.

Data de entrega: 14 de maio de 2004

Aluno: _____

Exercício 1 Prove que todo espaço vetorial E sobre o corpo $\mathbb{C}$ pode também ser considerado como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Prove que se $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear complexo, então $f = f_1 + if_2$, onde $f_1, f_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ são funcionais lineares sobre E considerado como espaço vetorial real e além disso vale

$$f_1(x) = f_2(ix) \text{ e } f_2(x) = -f_1(ix).$$

Reciprocamente, se f_1 é um funcional linear sobre E considerado como espaço vetorial real, então

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix)$$

é um funcional linear sobre E considerado como espaço vetorial complexo.

Exercício 2 Prove que o operador integral

$$(Au)(y) := \int_0^1 K(x, y)u(x) dx$$

onde $K(x, y)$ é uma função contínua definida no quadrado $Q := [0, 1] \times [0, 1]$, é linear e limitado em $C([0, 1], \mathbb{R})$ com a norma $\|u\| := \max_{x \in [0, 1]} |u(x)|$ e calcule a norma de A .

Exercício 3 Prove que uma bijeção entre espaços normados $T : E \rightarrow F$ é um isomorfismo se, e somente se, existem $m, M \in (0, +\infty)$ tais que

$$m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in E.$$

Exercício 4 Sejam E, F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ bijeção contínua. Prove que existem $m, M \in (0, +\infty)$ tais que

$$m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in E.$$

Exercício 5 Sejam $(E, \|\cdot\|_1), (E, \|\cdot\|_2)$ espaços de Banach. Prove que se existe $\theta_1 > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq \theta_1\|x\|_2, \forall x \in E$, então existe $\theta_2 > 0$ tal que $\theta_2\|x\|_1 \geq \|x\|_2 \forall x \in E$. Portanto as normas $\|\cdot\|_1$ and $\|\cdot\|_2$ são equivalentes.

Exercício 6 Prove que um espaço normado E tem dimensão finita se e somente se cada funcional linear em E é contínuo.

Exercício 7 Sejam E e F espaços de Banach com duais E' e F' , respectivamente, e seja $T : E \rightarrow F$ uma função tal que $\psi \circ T \in F'$, para todo $\psi \in F'$. Prove que T é linear e contínuo.

Exercício 8 Seja E um espaço de Banach.

1. Seja $f \in E^* \setminus E'$, isto é, f é linear e não é contínuo. Prove que o núcleo de f ,

$$N = \{x \in E : f(x) = 0\}$$

é denso em E .

2. Prove que f funcional linear é contínuo se, e somente se, N o núcleo de f , é subespaço fechado de E .

Exercício 9 Considere $C([a, b], \mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ munido da norma do sup, isto é, $\|u\|_\infty = \sup\{u(t) : t \in [a, b]\}$. Lembramos que o teorema de Arzelá-Ascoli diz que se (f_n) é uma seqüência de elementos de $C([a, b], \mathbb{R})$ tal que (f_n) é equicontínua e equilimitada, então (f_n) possui uma subseqüência convergente. Seja $k \in C([a, b] \times [a, b], \mathbb{R})$ e $T : C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R})$ definida por

$$(Tu)(s) = \int_0^1 k(s, t)u(t)dt.$$

Mostre que T é compacto.

Exercício 10 Seja $p > 1$ e $a = (a_n)$ uma seqüência de números complexos tal que para toda seqüência $b = (b_n) \in \ell^q$, com $1/p + 1/q = 1$, temos que a seqüência $c = (a_n b_n) \in \ell^1$. Use o princípio de limitação uniforme para provar que $a = (a_n) \in \ell^p$.

Exercício 11 Se H é um espaço de Hilbert separável, prove que todo conjunto ortonormal de elementos de H é no máximo enumerável.

Exercício 12 Seja E um espaço vetorial normado e Ω aberto de $\mathbb{C}$, diz-se que uma função $f : \Omega \rightarrow E$ é analítica em Ω se para todo $t_0 \in \Omega$, existe

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t_0 + t) - f(t_0)}{t}.$$

Prove que se $f : \mathbb{C} \rightarrow E$ é analítica em todo $\mathbb{C}$ e existe $C > 0$ tal que $\|f(t)\| \leq C, \forall t \in \mathbb{C}$ então f é constante. Sugestão: prove que para todo $\phi \in E'$ a composta $\phi \circ f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica e use o teorema de Liouville. Finalmente use o teorema de Hahn-Banach.

Exercício 13 Se $T \in L(E, F)$ definimos $T' : F' \rightarrow E'$ por $T'(\phi)(v) = \phi(T(v)), \forall v \in E, \forall \phi \in F'$.

1. Mostre que $T' \in L(F', E')$ e $\|T'\| = \|T\|$.
2. Mostre que T' é injetora se, e somente se, $T(E)$ é denso em F .
3. Se F for Banach e existe $m > 0$ tal que $\|T(v)\| \geq m \|v\|, \forall v \in E$, então T é sobrejetora se, e somente se, T' é injetora.

Exercício 14 Ache todos os autovalores e autovetores de uma projeção ortogonal sobre um subespaço vetorial fechado V de um espaço de Hilbert H .

Exercício 15 Seja $T : \ell^2(\mathbb{K}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{K})$ dada por $T((x_n)) = (x_n/n)$. Prove que T é auto-adjunta e compacta.

Exercício 16 Seja E um espaço de Banach reflexivo e $T \in L(E)$. Prove que se T leva sequências fracamente convergentes em sequências fortemente convergentes, então T é compacto.

Exercício 17 Seja K um subconjunto compacto do $\mathbb{R}^N$ e $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Prove que o espaço $C^k(K, \mathbb{R})$ munido da norma

$$\|u\|_k := \sum_{j=0}^k \|D^j u\|_\infty,$$

onde

$$D^j = \frac{\partial^{j_1+j_2+\dots+j_k}}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \dots \partial x_k^{j_k}}.$$

é um espaço de Banach. Prove que se Ω é um suconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ então $C^k(\Omega, \mathbb{R})$ munido da norma acima não é Banach.

Consideremos $(K_n)_n$ uma seqüência de subconjuntos compacto de Ω tal que

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^\infty K_n.$$

Prove que as funções

$$p_n(u) := \sup_{x \in K_n} |u(x)|$$

são seminormas em $C^0(\Omega, \mathbb{R})$. Prove que se $(\sum a_n)$ é uma série de termos positivos convergente o espaço $C^0(\Omega, \mathbb{R})$ munido da distância

$$d(u, v) := \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{p_n(u-v)}{1 + p_n(u-v)}$$

é um espaço de Fréchet. De maneira análoga podemos ver que o espaço $C^k(K, \mathbb{R})$ com as seminormas

$$p_n^k(u) := \sum_{j=0}^k p_n(D^j u)$$

e com a métrica

$$d(u, v) := \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{p_n^k(u-v)}{1 + p_n^k(u-v)}$$

um espaço de Fréchet.