

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Primeira lista de Exercícios - Introdução à Análise Funcional período 04.1.

Data de entrega: 15 de abril de 2004

Aluno: _____

Exercício 1 *Seja $p \in [1, \infty]$. Prove que $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_p)$; $(\ell_p(\mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$; $(c_0(\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ e $(c(\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ são espaços de Banach.*

Exercício 2 *Prove que se $1 \leq p < q$ então a inclusão $\ell_p(\mathbb{K}) \subset \ell_q(\mathbb{K})$ é contínua e esta inclusão é estrita no sentido que um existe elemento em $\ell_q(\mathbb{K})$ que não está em $\ell_p(\mathbb{K})$. Sugestão: tome $x = (x_i) \in \ell_p(\mathbb{K}) - \{0\}$, use que $0 \leq |x_i| / \|x\|_p \leq 1$ e $1 \leq p < q$, para concluir que*

$$\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \right)^q \leq \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \right)^p.$$

Exercício 3 *Seja X um conjunto não-vazio e $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Consideremos*

$$\mathcal{B}(X, E) = \{f : X \rightarrow E : f \text{ é uma função limitada}\}.$$

Este espaço vetorial munido da função

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

é um espaço vetorial normado. Prove que se $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach então $(\mathcal{B}(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ é também um espaço de Banach. Se tomarmos $X = [0, 1]$ e $E = \mathbb{R}$ com a norma usual temos que o espaço das funções reais definidas no intervalo $[0, 1]$ e limitadas, $(\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, com a norma do sup é um espaço de Banach.

Exercício 4 *Seja $C([a, b], \mathbb{K})$ o espaço vetorial das funções contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{K}$. $C([a, b], \mathbb{K})$ munido da função $\|\cdot\|_p$ dada no exemplo anterior*

é um espaço normado mas não é completo. Suponha que $a = 0$ e $b = 1$ e consideremos a sequência de funções $f_n \in C([a, b], \mathbb{K})$ ($n \geq 2$) dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 - 1/n \\ -nx/2 + (n+2)/4 & \text{se } 1/2 - 1/n \leq x \leq 1/2 + 1/n \\ 0 & \text{se } 1/2 + 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Note que (f_n) é uma sequência de Cauchy segundo a norma $\|\cdot\|_p$. Veja o que ocorre com $\|f_{n+1} - f_n\|_p$ quando $n \rightarrow \infty$. Suponhamos que existe uma função $f \in C([a, b], \mathbb{K})$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Note que neste caso temos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1/2} |f(t) + f_n(t)|^p dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1/2-1/n} |f(t) - 1|^p dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1/2-1/n}^{1/2} |f(t) - f_n(t)|^p dt = \\ &= \int_0^{1/2} |f(t) - 1|^p dt \end{aligned}$$

pois

$$0 \leq \int_{1/2-1/n}^{1/2} |f(t) - f_n(t)|^p dt \leq \frac{1}{n} \left[1 + \sup_{t \in [0, 1/2]} |f(t)| \right]^p \rightarrow 0$$

Logo $f \equiv 1$ em $[0, 1/2]$. Analogamente, podemos provar que $f \equiv 0$ em $[1/2, 1]$. Portanto temos que f não é contínua em $[0, 1]$.

Exercício 5 Prove que um espaço vetorial normado é um espaço de Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente é convergente.

Exercício 6 Seja $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é contínua e para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } B_\varepsilon \subset \mathbb{R} \text{ compacto tal que } |f(t)| \leq \varepsilon \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \setminus B_\varepsilon\}$. Prove que $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|.$$

Exercício 7 Prove que não existe produto interno em $C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é função contínua}\}$ tal que $\langle f, f \rangle = \|f\|_\infty^2$.

Exercício 8 Sabemos que um subespaço M de um espaço de Banach E é também Banach se, e somente se, M é fechado em E . Prove que o subespaço das funções polinomiais $P[0, 1]$ com a norma $\| \cdot \|_\infty$ não é Banach. Para isto basta provar que $P[0, 1]$ não é fechado em $(C[0, 1], \| \cdot \|_\infty)$. Qual é o fecho topológico do subespaço $P[0, 1]$ em $(C[0, 1], \| \cdot \|_\infty)$? Note que se tomarmos $S = \{1, x, x^2, \dots\}$, temos que o fecho algébrico de S denotado por $\langle S \rangle$ é $P[0, 1]$ o qual é diferente do fecho topológico de $\langle S \rangle$.

Exercício 9 Prove que o espaço ℓ^p com a norma $\| x \|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$ é completo e separável par todo $p \in [1, +\infty)$. Lembremos que um espaço métrico é dito separável quando possui um conjunto enumerável denso (O conjunto dos números reais é separável, uma vez que o conjunto dos racionais é enumerável e denso na reta).

Exercício 10 Seja E um espaço vetorial e M um subespaço de E . Consideremos em E a seguinte relação de equivalência: $x \sim y$ se, e somente se, $x - y \in M$ e denotemos por $x + M$ a classe de x . Sabemos que o conjunto destas classes de equivalências denotado por E/M quando munido das operações naturais $(x + M) + (y + M) = x + y + M$ e $\alpha(x + M) = \alpha x + M$ é um espaço vetorial.

1. Prove que se E é normado e M é um subespaço fechado de E então a função

$$\| x + M \| = \inf_{y \in x + M} \| y \| = \inf_{v \in M} \| x + v \|$$

define uma norma em E/M .

2. Prove que se E é um espaço normado e separável então para todo subespaço fechado M de E , o espaço quociente E/M é separável.
3. Prove que se E é um espaço de Banach então para todo subespaço fechado M de E , o espaço quociente E/M é Banach.

Exercício 11 Prove que dados $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, \dots, k$ com

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p} \leq 1.$$

Então o produto $f = f_1 f_2 \dots f_k$ pertence ao espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$ e além disso vale

$$\| f \|_{L^p} \leq \| f_1 \|_{L^{p_1}} \dots \| f_k \|_{L^{p_k}}.$$

Este resultado vale se $p_1 = +\infty$?

Prove também que se $f \in L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega)$ com $1 \leq r \leq s \leq +\infty$, então $f \in L^\xi(\Omega)$ para todo $\xi \in [r, s]$ e vale a inequação de interpolação

$$\|f\|_{L^\xi} \leq \|f\|_{L^r}^\alpha \|f\|_{L^s}^{1-\alpha}$$

onde $\frac{1}{\xi} = \frac{\alpha}{r} + \frac{1-\alpha}{s}$, $\alpha \in [0, 1]$.

Exercício 12 (1.5) *Nos três casos a seguir calcule a norma do funcional f dado.*

1. $f(x) := \int_{-1}^1 x(t) dt$, $x \in L^1[-1, 1]$;
2. $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k/k$, $x \in \ell^2$;
3. $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k/2^{k+1}$, $x \in c_0$.

Exercício 13 *Sejam E, F, G espaços normados. Prove que se $A \in \mathfrak{L}(F, G)$ e $B \in \mathfrak{L}(E, F)$ então $AB := A \circ B \in \mathfrak{L}(E, G)$ e $\|AB\|_{\mathfrak{L}(E, G)} \leq \|A\|_{\mathfrak{L}(F, G)} \|B\|_{\mathfrak{L}(E, F)}$. Note que $\mathfrak{L}(E, E)$ com as operações usuais é uma álgebra não comutativa. Suponha que $(A_n) \subset \mathfrak{L}(F, G)$; $(B_n) \subset \mathfrak{L}(E, F)$ são tais que $\|A_n - A_0\|_{\mathfrak{L}(F, G)} \rightarrow 0$ e $\|B_n - B_0\|_{\mathfrak{L}(E, F)} \rightarrow 0$. Prove que $A_n B_n$ converge para $A_0 B_0$ na norma do espaço $\mathfrak{L}(E, G)$.*