UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
DISCIPLINA: Cálculo I **PERÍODO:** 2011.1
PROFESSOR: Everaldo

2ª Lista de Exercícios

1. Determine o domínio e esboce o gráfico das funções definidas pelas expressões abaixo:

   a) $f(x) = ax + b$ com $a > 0$ e $b < 0$;
   b $f(x) = ax^2 + 2bx + c$, $a > 0$ $b^2 - ac > 0$.
   c) $f(x) = \sqrt{1 - (x-2)^2}$;
   d) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$;
   e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$;
   f) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$.

2. Faça o gráfico das funções abaixo e determine a imagem:

   a) $f(x) = |x| + |x-1| + |x+1|$;
   b) $f(x) = |x^2 - 1|$;
   c) $f(x) = [x]$ =maior inteiro menor ou igual a x (por exemplo, $[\frac{1}{2}] = 0$ e $[\frac{4}{3}] = 1$).

3. Considere uma função $f : A \to B$. Verifique que f bijetiva se, e semente se, existe uma função $g : B \to A$ tal que $(g \circ f)(x) = x$ para todo $x \in A$ e $(f \circ g)(y) = y$ para todo $y \in B$.

4. Determine a inversa das funções:

   a) $h : [-1, 0] \to [0, 1]$ definida por $h(x) = x^2$.
   b) $g : (1, +\infty) \to (1, +\infty)$ definida por $g(x) = x^2$.
   c) $f : [-1, 0] \cup (1, \infty) \to [0, +\infty)$ definida por $f(x) = x^2$.

5. Considere a função $f(x) = x + 1$. Esboce o gráfico das funções:

   i) $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$ (chamada de parte positiva de f);
   ii) $f^-(x) = -\ min\{f(x), 0\} = \max\{-f, 0\}$ (chamada de parte negativa de f);
   ii) Verifique que $f = f^+ - f^-$.

6. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções. Verifique que:

   i) $\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$;
   ii) $\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|)$;
   ii) Tome $g(x) = 0$ nos ítem anteriores e conclua que $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$.

7. Verifique que a função $f(x) = ax + b$ é par se, e somente se, $a = 0$.

8. Verifique que a função $f(x) = ax + b$ é ímpar se, e somente se, $b = 0$.

9. Verifique que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é par se, e somente se, $b = 0$.

10. Verifique que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é ímpar se, e somente se, $a = c = 0$.

11. Considere $f(x) = x^3$ e verifique que $|f(x) - f(1)| \leq 3|x - 1|$ para $|x| \leq 1$.

12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ e algum $c > 0$. Fixado $a \in \mathbb{R}$ defina $x_1 = f(a), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2)$,..... Estimar as expressões abaixo:

    i) $|x_1 - x_2|$;
    ii) $|x_2 - x_3|$;
    iii) $|x_3 - x_4|$.

13. Determine uma condição entre a, b, c e d para que a função

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad c \neq 0$$

    seja injetiva. Encontre a inversa de f.

14. Considere a reta $y = m_1x + b$ onde $m_1 \neq 0$. Verifique que:

    i) $m_1 = tg\theta$ onde θ é o ângulo entre a reta $y = m_1x + b$ é o eixo das abscissas;
    ii) se m_2 é o coeficiente de uma reta perpendicular a reta $y = m_1x + b$ então $m_1.m_2 = -1$ (note que $m_2 = tg(\theta + \frac{\pi}{2})$.
    iii) Determine a equação da reta que passa pelo ponto $(0, 3)$ e é perpendicular a reta $Ay + Bx + C = 0$ com $A \neq 0$.

15. Verificar que o gráfico das funções

$$f(x) = mx + b$$
$$f(x) = nx + c$$

    são perpendiculares se $mn = -1$. Sug: Suponha $b = c = 0$ e considere o triangulo de vértices $(0, 0)$, $(1, m)$ e $(1, n)$.

16. Verifique que a função $f(x) = ax + b$ e crescente para $a > 0$ é decrescente para $a < 0$.

17. Suponha que $a > 0$. Verifique que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é crescente para $x > \frac{-b}{2a} = x_V$ e decrescente para $x < \frac{-b}{2a} = x_V$.

18. Sejam $f(x) = x + 3$ e $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Determine o domínio de composição das funções $g \circ f$ e $f \circ g$.