UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
DISCIPLINA: Cálculo I **PERÍODO:** 2011.1
PROFESSOR: Everaldo

1ª Lista de Exercícios

1. Fazer todos os exercícios das páginas 10, 11, 12, 13, 17, 18 e 24 do Livro do Guidorizzi.

2. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Verifique que $xy = 0$ se, e somente se, $x = 0$ ou $y = 0$.

3. Prove os seguintes ítens:

   i) Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$;

   ii) Se $a < b$ então $-b < -a$;

   iii) Se $a < b$ e $c > 0$ então $ac < bc$;

   iv) Se $a < b$ e $c < 0$ então $ac > bc$.

4. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Caso seja verdadeira justifique, se falso, justifique com um contra-exemplo.

   i) ( ) Se $a < b$ então $a^2 < b^2$;

   ii) ( ) Se $a < b$ então $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;

   iii) ( ) Se $0 < a < b$ então $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;

   iv) ( ) Se p^2 é ímpar então p é ímpar;

   v) ( ) Se p^2 é par então p é par.

5. Sejam a, b números racionais positivos. Verifique que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é racional se, e somente se, $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ forem ambos racionais.

6. Sejam a, b números reais com $a < b$. Verifique que $a < \frac{a+b}{2} < b$.

7. Verifique que se $0 < a < b$, então

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

8. Verifique que se $a > 0$, então $ax^2 + 2bx + c \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $\Delta = b^2 - ac \leq 0$.

9. Sejam $a_1, ..., a_n$ e $b_1, ..., b_n$ números reais. Use o exercício anterior e o polinomio

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + xb_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) x^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) 2x + \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

para verificar que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

10. Verifique as igualdades abaixo:

    i) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;

    ii) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;

    iii) $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)$,

    iv) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$ onde $n \neq 0$ é um número natural.

11. Use o ítem ii) do exercício anterior para verificar que

$$\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}.$$

12. Simplificar as expressões abaixo:
    a) $\frac{x-a}{x^2-a^2}$ b) $\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$ c) $\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$ d) $\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$
    e) $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ f) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ g) $\frac{|x|}{x}$ h) $\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$.

13. Verifique as desigualdades abaixo:

    a) $|x - y| \leq |x| + |y|$;

    b) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$;

    d) $|x - y| \geq |x| - |y|$;

    d) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

14. Identificar geometricamente o seguinte conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq r\}$ onde $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$.

15. Suponha que $|x - 2| < r$. Estimar $|f(x) - L|$ onde $f(x) = 3x - 5$ e $L = 1$.

16. Um função f é linear se $f(x+y) = f(x)+f(y)$ e $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para todo $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$. Verifique se as funções abaixo são lineares.

    a) $f(x) = 3x$;

    b) $f(x) = |x|$;

    c) $f(x) = x + 1$;

c) $f(x) = x^2$.

Verifique que se, f é linear então $f(0) = 0$.

17. Um ponto fixo de uma função f é um número x tal que $f(x) = x$. Interprete geometricamente o que significa um ponto fixo e encontre os pontos fixos, se existirem, das funções:

    i) $f(x) = 3x - 2$;

    ii) $f(x) = x^2$;

    iii) $f(x) = x^3$;

    iv) $f(x) = |x|$;

    v) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$;

    vi) $f(x) = x^2 + x + 1$.

18. (*) **(Propriedade de Arquimedes)** Se x, y são dois números reais com $x > 0$, então existe pelo menos um número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$. Use esta propriedade para mostrar os seguintes fatos:

    i) Para todo número real y existe pelo menos um $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > y$.

    ii) Para todo $x > 0$ existe pelo menos um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$.

19. (*) Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é dito limitado, se existe um número $L > 0$ de modo que $|x| \leq L\ \forall x \in A$. Verifique que A é limitado se, e somente se, A é limitado inferiormente e superiormente, ou seja, existem números reais L_1, L_2 tais que

$$L_1 \leq x \leq L_2, \quad \forall x \in A.$$

    Verifique que $\mathbb{N}$ não é limitado

20. (*) Sejam $I_n = [n, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Verifique que

$$\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset.$$

21. Determine dentre todos os retângulos de perímetro fixo, aquele que tem área máxima.

22. Expresse a área e o perímetro de um triângulo equilátero em função de x, o comprimento do lado do triângulo.

23. Expresse o comprimento da aresta de um cubo em função do comprimento da diagonal d. Depois expresse a área da superfície e o volume do cubo em função do comprimento da diagonal.

24. Um retângulo está inscrito numa circunferência de raio r dado. Expresse a área A do retângulo em função de um dos lados do retângulo.

25. Um cilindro circular reto esta inscrito numa esfera de raio r dado. Expresse o volume V do cilindro em função da altura h do cilindro.

26. Um arame de $36cm$ de comprimento deve ser cortado em dois pedaços, um dos quais será torcido de modo a formar um quadrado e o outro, a formar um triângulo equilátero. De que modo deverá ser cortado para que a soma das áreas das regiões limitadas pelas figuras obtidas seja mínima?

27. Um canhão é colocado na origem de um sistema de coordenadas. Suponha que as coordenadas de um projétil atirado pelo canhão tem coordenadas $x = 50t$ metros e $y = 50t - t^2$ metros depois de t segundos do lançamento. Mostre que a trajetória do projétil é uma parábola. A que distância do canhão o projétil vai atingir o chão? Qual a altura máxima que o projétil vai atingir?