UFPB – CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
6ª LISTA DE EXERCÍCIOS – PERÍODO 2007.1

01. Se $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$, encontre o número c que satisfaz a conclusão do Teorema do Valor Médio no intervalo $[1, 8]$.

02. Se $f(x) = |x - 1|$, existe algum número c satisfazendo $3f'(c) = f(3) - f(0)$?

03. A resposta da questão anterior contradiz o Teorema do Valor Médio?

04. Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, mostre que existe $c \in]a, b[$, tal que $f'(c) = 0$.

(**Observação**: *O resultado acima é conhecido como* **TEOREMA DE ROLLE**)

05. Considere $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Verifique que $f(-1) = f(1)$, mas não existe um número $c \in]-1, 1[$, satisfazendo $f'(c) = 0$. Isso contradiz o Teorema de Rolle ? Por que?

06. Prove que a equação $x^3 + x - 1$ tem exatamente uma raiz real.

(**Sugestão**: *Use, inicialmente, o Teorema do Valor Intermediário para garantir a existência de uma raiz real para a equação. A unicidade dessa raiz será então obtida como conseqüência do Teorema de Rolle, utilizando-se, para tanto, um argumento de contradição*).

07. Prove que existe um único número real x, tal que $e^x + x = 0$.

08. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é diferenciável em (a, b) e $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$, mostre que f é uma função constante.

(**Sugestão**: *Tome* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *e aplique o Teorema do Valor Médio à função* f *no intervalo* $[x_1, x_2]$).

09. Mostre que $arctg\, x + arccotg\, x = \dfrac{\pi}{2}$.

(**Sugestão**: *Mostre que a função* $f(x) = arctg\, x + arccotg\, x$ *é constante e, então, calcule* $f(1)$).

10. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é diferenciável em (a, b) e $f'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$, mostre que existe uma constante c, tal que, $\forall x \in [a, b]$,

$$f(x) = ce^x.$$

(**Sugestão**: *A função* $\varphi(x) = f(x)e^{-x}$ *é constante* ?).

11. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ e funções contínuas. Se ambas são diferenciáveis em (a, b) e $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in (a, b)$, mostre que essas funções diferem por uma constante, isto é,

$$f(x) = g(x) + c.$$

12. Considere $g(x) = x^4 - 4x + 1$. Encontre a função f que satisfaz $f'(x) = g'(x)$ e $f(1) = 2$.

13. Mostre que $x < e^x$, para qualquer x real.

(**Sugestão**: *Se* $x \le 0$, *a desigualdade é claramente verdadeira. Se* $x > 0$, *verifique que a função* $f(x) = e^x - x$ *é crescente e, então, calcule* $f(0)$).

14. Mostre que $ln x < x$, para todo $x > 0$.

(**Sugestão**: *Use o resultado do exercício anterior*).

15. a) Decida sobre a existência de máximos e mínimos locais e absolutos para a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

b) Calcule os valores máximo e mínimo de f no intervalo $[-2, 3]$ e determine os pontos nos quais esses valores são assumidos.

16. a) Repita o exercício **15a)**, considerando a função $\varphi(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$.

b) Calcule os valores máximo e mínimo de φ no intervalo $[0, 3]$ e determine os pontos nos quais esses valores são assumidos.

c) Repita o item **b)**, considerando o intervalo $[1/2, 3]$.

d) Repita o item **b)**, considerando o intervalo $[1/2, 5/2]$.

e) Repita o item **b)**, considerando o intervalo $[3/4, 9/4]$.

17. Analise cada uma das funções definidas abaixo com relação à existência de máximos e mínimos locais e absolutos.

a) $f(x) = sen\,x + cos\,x,\ x \in [0, 2\pi]$

b) $f(x) = xe^{-x}$

c) $f(x) = 3cos(2x),\ x \in [0, \pi]$

d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1, 1]$

e) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x},\ x \neq 0$

f) $f(x) = x^2\sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1, 1]$

18. A função $f(x) = 2 - |1 - x|$, definida para $x \in [0, 2]$, admite algum ponto de mínimo ou de máximo ?

19. Determine, se existirem, os pontos de mínimo e de máximo da função $y = 2xe^{2x}$. Analise, ainda, o gráfico dessa função quanto à concavidade.

20. Esboce o gráfico de cada uma das funções definidas abaixo.

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $f(x) = x^4 - 2x^2$

c) $f(x) = x^4 - x^3$

d) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

h) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x - 3}$

i) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 - 9}$

j) $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$

k) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

l) $f(x) = e^{-x^2}$

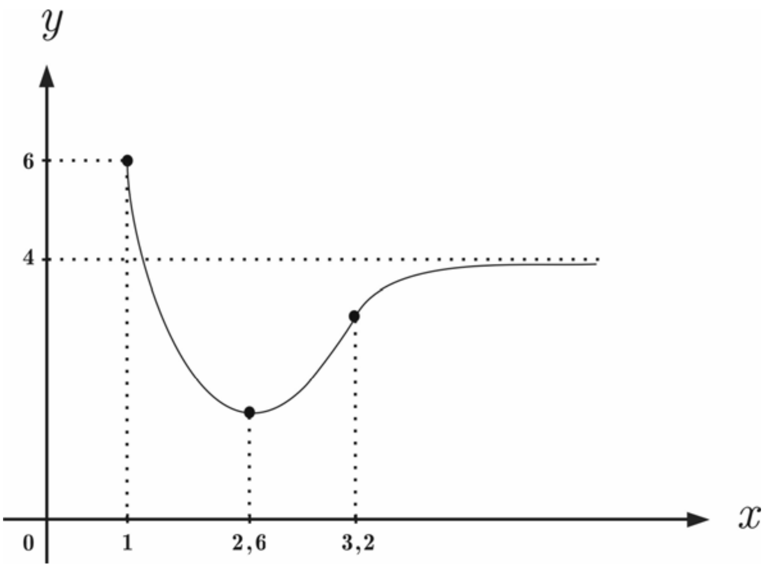
m) $f(x) = sen\,x + cos\,x$

n) $f(x) = x - sen\,x$

o) $f(x) = xe^{-x}$

p) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$

21. Suponha que a figura ao lado corresponda ao gráfico de uma função $y = f(x)$.



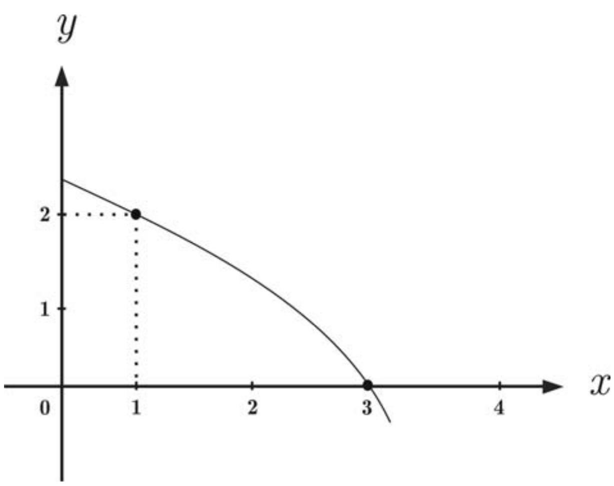
a) Para quais valores de x, f é crescente ? E decrescente ?

b) Essa função possui pontos de máximo e de mínimo ?

c) Essa função possui ponto de inflexão ?

c) O que representa, no gráfico, a reta $y = 4$?

22. Suponha que a figura ao lado corresponda ao gráfico de $y = f'(x)$, sendo f' a derivada de uma função f.



a) Qual a inclinação da tangente ao gráfico de f em $x = 1$?

b) Com relação ao crescimento e à concavidade, descreva o gráfico de f no intervalo [1, 2].

c) O gráfico de f possui alguma tangente horizontal ?

d) A função f possui algum ponto de máximo ou de mínimo local ?

23. Existe algum valor para m, de modo que a função $f(x) = mx - m^2 ln(1 + x^2)$ tenha $x = 2$ como ponto de mínimo local ?

24. Se $a^2 < 3b$, conclua que a função $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ não possui máximo nem mínimo.

25. Qual o número real positivo cuja diferença entre ele e seu quadrado resulta no maior valor possível ?

26. Qual ponto da parábola $y = 1 - x^2$ está mais próximo da origem ?

(**Sugestão**: *Represente a distância de um ponto à origem pela expressão* $f(x, y) = d^2[(x, y), (0, 0)] = x^2 + y^2$).

27. Qual ponto da parábola $y = x^2$ está mais próximo da reta $y = x - 2$?

28. Mostre que de todos os retângulos com o mesmo perímetro p, o de maior área é um quadrado.

(**Sugestão**: *Observe que* $p = 2x + 2y$ *e que* $A = xy$).

29. Ache a equação da reta que passa pelo ponto $(3, 2)$ e, no primeiro quadrante, forma com os eixos coordenados um triângulo de área mínima.

(**Sugestão**: *Supondo-se que a equação da reta seja* $y = ax + b$, *tem-se* $3a + b = 2$. *Como a área do triângulo vale*

$$\frac{base \times altura}{2},$$

vê-se que o problema estará praticamente resolvido quando forem determinados os pontos x_o *e* y_o *de acordo com a* **Figura 1**, *abaixo*).

30. Encontre os comprimentos dos lados do retângulo de maior área que pode ser inscrito em um semicírculo de raio unitário, estando a base do retângulo sobre o diâmetro do semicírculo.

(**Sugestão**: *Analise a* **Figura 2**, *abaixo*).

Figura 1

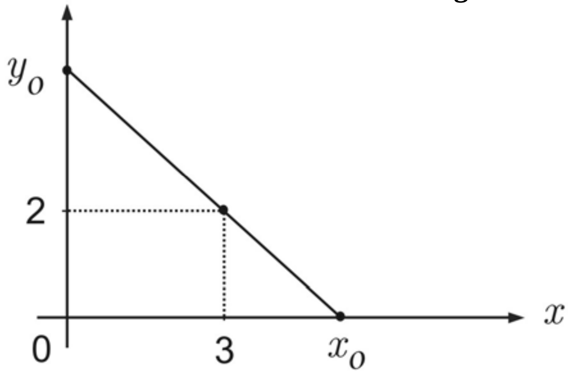
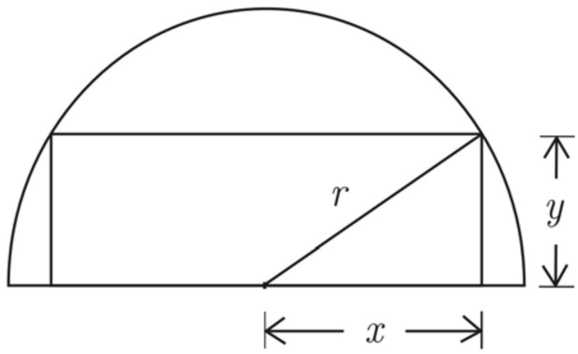
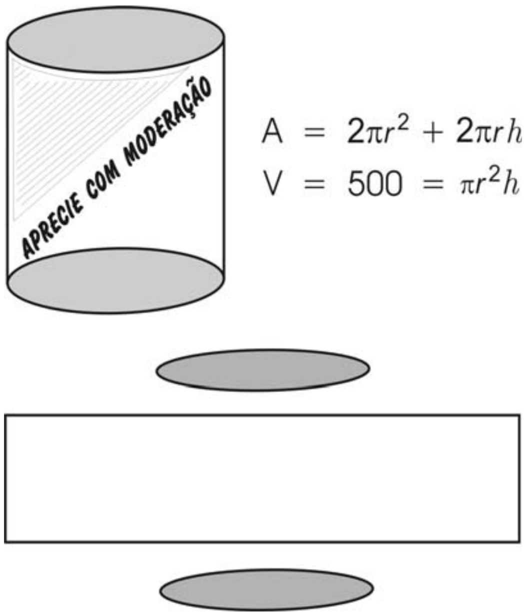


Figura 2



31. Você trabalha em uma indústria de embalagens de metal que acaba de ser a escolhida para fornecer latinhas de cerveja de $500ml$ para um fabricante multinacional. O gerente da fábrica descobre que você é um funcionário que já estudou cálculo e, por essa razão, lhe procura e pergunta: as dimensões da lata (*altura* e *raio*) podem influir no custo da produção ?



(**Sugestão**: *Note que o problema corresponde à minimização da área total da latinha, sabendo-se que seu volume é de 500ml.*
Veja a figura ao lado).

32. Uma indústria produz determinado artigo e vende-o com um lucro mensal dado pela expressão $L(q) = -q^3 + 12q^2 + 60q - 4$, onde q representa a quantidade produzida mensalmente.

Qual a produção que maximiza o lucro ? Qual é esse lucro máximo ?

33. Verifique que o gráfico de cada uma das funções definidas abaixo possui pelo menos um tipo de assíntota.

a) $f(x) = x + \ln x$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ **e)** $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x + 1}}$ **f)** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ **h)** $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Nos exercícios **34** $\to$ **40**, calcule o limite de $f(x)$ conforme indicado.

34. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x - 1}$, $x \mapsto 1$

35. $f(x) = \sqrt{x}\ln x$, $x \mapsto 0_+$

36. $f(x) = x^{1/x}$, $x \mapsto +\infty$

37. $f(x) = (1 + x)^{1/x}$, $x \mapsto 0$

38. $f(x) = \left(\dfrac{x}{x + 1}\right)^x$, $x \mapsto +\infty$

39. $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$, $x \mapsto 0_+$

40. $f(x) = (1 - \cos x).\operatorname{cotg} x$, $x \mapsto 0$