UFPB – CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
4ª LISTA DE EXERCÍCIOS – PERÍODO 2007.1

1. Nos exercícios **1a)** $\to$ **1p)**, calcule o limite de $f(x)$, quando $x \to a$.

1a) $f(x) = 2x + 5,\ a = -7$

1b) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+1},\ a = 0$

1c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x+5},\ a = -5$

1d) $f(x) = \dfrac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2},\ a = -2$

1e) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3} - 2},\ a = 1$

1f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+8} - 3}{x+1},\ a = -1$

1g) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1},\ a = 1$

1h) $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{x}}{9 - x},\ a = 9$

1i) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x},\ a = 0$

1j) $f(x) = \dfrac{x^2 + 8x - 20}{x^2 - x - 2},\ a = 2$

1k) $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1+x}}{\sqrt{x-1} - x},\ a = 3$

1l) $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x + 1}{x^3 + 2x^2 + 1},\ a = 1$

1m) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x-2},\ a = 2$

1n) $f(x) = \dfrac{(3 - x^3)^4 - 16}{x^3 - 1},\ a = 1$

1o) $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x^2 - 1}},\ a = 1$

1p) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+2} - 1}{x+1},\ a = -1$

2. Se f é uma função definida em $\mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, mostre que

a) $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{f(3x)}{x} = 3$

b) $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{f(x^2)}{x} = 0$

3. Se $\lim\limits_{x \mapsto -2} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$, calcule $\lim\limits_{x \mapsto -2} f(x)$ e $\lim\limits_{x \mapsto -2} \dfrac{f(x)}{x}$.

4. Sabendo-se que $\lim\limits_{x \mapsto 2} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$, determine $\lim\limits_{x \mapsto 2} f(x)$.

5. Se φ é uma função tal que $1 - \dfrac{x^2}{4} \le \varphi(x) \le 1 + \dfrac{x^2}{2},\ \forall x \neq 0$, calcule $\lim\limits_{x \mapsto 0} \varphi(x)$.

6. Sejam f e g funções com mesmo domínio D, satisfazendo $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = 0$ e $|g(x)| \le M,\ \forall x \in D$, onde M é um número real positivo.

Use o Teorema do Sanduíche para mostrar que $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) \cdot g(x) = 0$.

7. Se g é a função definida por $g(x) = \begin{cases} 1, & para\ x \le 0 \\ -1, & para\ x > 0 \end{cases}$, existe $\lim_{x \mapsto 0} g(x)$?

E $\lim_{x \mapsto 0} x^2 g(x)$ existe?

8. Nos exercícios **8a)** $\rightarrow$ **8j)**, calcule o limite de $f(x)$ quando $x \rightarrow a_-$ e quando $x \rightarrow a_+$.

8a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$, $a = -2$

8b) $f(x) = \dfrac{x}{(x-2)^2}$, $a = 2$

8c) $f(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^3}$, $a = 1$

8d) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$, $a = 2$

8e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+5} - \sqrt{5}}{x}$, $a = 0$

8f) $f(x) = (x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$, $a = -2$

8g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$, $a = 1$

8h) $f(x) = \dfrac{x+3}{|x^2-9|}$, $a = -3$

8i) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$, $a = 1$

8j) $f(x) = \dfrac{x+2}{|x^2-4|}$, $a = -2$

9. Calcule $\lim_{x \mapsto 2_+} \sqrt{x-2}$. Existe $\lim_{x \mapsto 2_-} \sqrt{x-2}$?

10. Nos exercícios **10a)** $\rightarrow$ **10z)**, calcule os limites indicados.

10a) $\lim_{x \mapsto 0_+} \dfrac{1}{x}$

10b) $\lim_{x \mapsto 0_-} \dfrac{1}{x}$

10c) $\lim_{x \mapsto 0_+} \dfrac{1}{x^2}$

10d) $\lim_{x \mapsto 0_-} \dfrac{1}{x^2}$

10e) $\lim_{x \mapsto 3_+} \dfrac{5}{x-3}$

10f) $\lim_{x \mapsto 3_-} \dfrac{5}{x-3}$

10g) $\lim_{x \mapsto 0_+} \dfrac{2x+1}{x}$

10h) $\lim_{x \mapsto 0_-} \dfrac{x-3}{x^2}$

10i) $\lim_{x \mapsto 0_+} \dfrac{3}{x^2-x}$

10j) $\lim_{x \mapsto 0_-} \dfrac{3}{x^2-x}$

10k) $\lim_{x \mapsto 3_+} \dfrac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$

10l) $\lim_{x \mapsto -1_+} \dfrac{2x+1}{x^2+x}$

10m) $\lim_{x \mapsto 0_+} \dfrac{2x+1}{x^2+x}$

10n) $\lim_{x \mapsto -1_+} \dfrac{3x^2-4}{1-x^2}$

10o) $\lim_{x \mapsto +\infty} \left(x^4+3x+2\right)$

10p) $\lim_{x \mapsto -\infty} \left(x^4-3x+2\right)$

10q) $\lim_{x \mapsto +\infty} \left(3x^3+2x+1\right)$

10r) $\lim_{x \mapsto -\infty} \left(3x^3+2x+1\right)$

10s) $\lim_{x \mapsto +\infty} \left(5-4x+x^2-x^5\right)$

10t) $\lim_{x \mapsto -\infty} \left(5-4x+x^2-x^5\right)$

10u) $\lim_{x \mapsto +\infty} \dfrac{5x^3-6x+1}{6x^3+2}$

10v) $\lim_{x \mapsto +\infty} \dfrac{5x^3-6x+1}{6x^2+x+3}$

10x) $\lim_{x \mapsto -\infty} \dfrac{5-x}{3+2x}$

10z) $\lim_{x \mapsto +\infty} \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+3}$

11. Nos exercícios **11a)** $\rightarrow$ **11d)**, calcule o limite de $f(x)$, quando $x \rightarrow +\infty$.

11a) $f(x) = x - \sqrt{x+3}$

11b) $f(x) = x - \sqrt{x^2+3}$

11c) $f(x) = x - \sqrt{x^3+3}$

11d) $f(x) = 2x - \sqrt{x^2+3}$

12. Considere f a função definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & para\ x \neq 1 \\ 3, & para\ x = 1 \end{cases}$.

Calcule $\lim\limits_{x \mapsto 1} f(x)$ e decida se f é contínua em $a = 1$.

13. Seja f uma função real contínua, definida em torno do ponto $a = 1$, tal que $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x-1}$, para todo $x \neq 1$. Quanto vale $f(1)$? Por quê?

14. Determine o valor de k, de modo que cada uma das funções dadas abaixo seja contínua no ponto indicado.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2}, & para\ x \neq 2 \\ k, & para\ x = 2 \end{cases}$, no ponto $a = 2$;

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}, & para\ x > 0\ e\ x \neq 3 \\ k, & para\ x = 3 \end{cases}$, no ponto $a = 3$.

15. Seja f a função dada por $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x+1}$, se $x \neq -1$, com $f(-1) = 2$.

f é contínua no ponto -1? E no ponto 0? Por quê?

16. Dê exemplo de uma função f, definida em $\mathbb{R}$, que não seja contínua no ponto 2, mas que satisfaça $\lim\limits_{x \mapsto 2-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 2+} f(x)$.

17. A afirmação " $\lim\limits_{x \mapsto a-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto a+} f(x) \Rightarrow f$ é contínua em a" é verdadeira?

18. Seja f uma função satisfazendo $|f(x)| \leq x^2$, para todo x em $\mathbb{R}$. Mostre que f é contínua no ponto 0.

19. Encontre os pontos de descontinuidade da função f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3}{5}, & para\ x \leq 1 \\ 6 - 5x, & para\ 1 < x < 3 \\ x - 3, & para\ x \geq 3 \end{cases}.$$

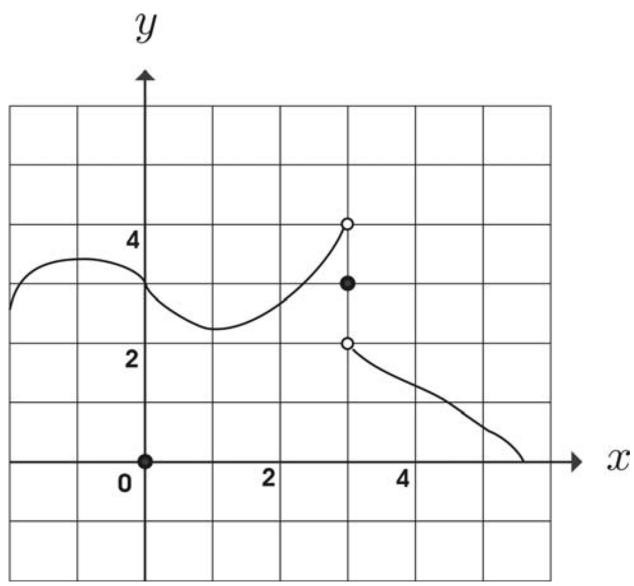
20. Nos exercícios **20a)** $\to$ **20d)**, esboce o gráfico da função dada e diga se ela é contínua no ponto indicado.

20a) $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & para\ x > 1 \\ x^2, & para\ x \leq 1 \end{cases}$, $a = 0$; **20b)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$, $a = -1$;

20c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{|x - 2|}, & para\ x \neq 2 \\ 1, & para\ x = 2 \end{cases}$, $a = 0$;

20d) $f(x) = \begin{cases} 0, & para\ x < 0 \\ [\![x]\!], & para\ x \geq 0 \end{cases}$, $a = 1$, onde $[\![x]\!]$ representa "*o maior inteiro que não supera* x", ou, equivalentemente, "*o maior inteiro menor ou igual a* x".

21. Se f é a função cujo gráfico encontra-se esboçado abaixo, determine:



a) $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x)$;

b) $\lim\limits_{x \mapsto 3} f(x)$;

c) $f(3)$.

f é contínua no ponto 0?

E no ponto 3?

22. Existe um número α capaz de fazer com que $\lim\limits_{x \mapsto -2} \dfrac{3x^2 + \alpha x + \alpha + 3}{x^2 + x - 2}$ exista?

23. Uma companhia ferroviária cobra R$10,00 por km, para transportar um vagão até uma distância de 200km, cobrando ainda R$8,00 por cada km que exceda a 200. Além disso, essa mesma companhia cobra uma taxa de serviço de R$1.000,00 por vagão, independentemente da distância a percorrer.

Determine a função que representa o custo para transportar um vagão a uma distância de x km e esboce seu gráfico. Essa função é contínua para $x = 200$?

24. Uma fábrica é capaz de produzir 15.000 unidades de um certo produto, em um turno de 8 horas de trabalho. Para cada turno de trabalho, sabe-se que existe um custo fixo de R$2.000,00, relativo ao consumo de energia elétrica. Supondo-se que, por unidade produzida, o custo variável, dado o gasto com matéria prima e salários, é de R$2,00, determine a função que representa o custo total para a fabricação de x unidades e esboce seu gráfico. A função encontrada é contínua para $0 \leq x \leq 45.000$?

25. Um estacionamento cobra R$3,00 pela primeira hora, ou parte dela, e R$2,00 por hora sucessiva, ou parte, até o máximo de R$10,00. Esboce o gráfico do custo do estacionamento como uma função do tempo decorrido e analise as descontinuidades dessa função.

26. Prove que a equação $x^5 + x + 1 = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $[-1, 0]$.

27. Prove que a equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ admite três raízes reais distintas.

28. Se $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & para\ -2 \leq x < 0 \\ -x^2 - 2, & para\ \ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$, existe $\alpha \in [-2, 2]$ tal que $f(\alpha) = 0$?

Este fato contradiz o Corolário do Teorema do Valor Intermediário?