UFPB – CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
2ª LISTA DE EXERCÍCIOS – PERÍODO 2007.1

1. Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt{4 - \left|\dfrac{3-2x}{2+x}\right|}$.

2. Se x e y são dois números reais quaisquer, mostre que

a) $|xy| = |x||y|$ **b)** $|x+y| \le |x| + |y|$

3. Se $f(x) = \left|x^3 - 2x^2 + 3x - 4\right|$, para $x \in [-3, 2]$, encontre um número real k, tal que $f(x) \le k$.

4. Se $x \in (1, 4)$, mostre que $f(x) = \left|\dfrac{x+2}{x} - 5\right| < 6$.

5. Considere a função f definida por $f(x) = x^2 + 4x + 5$.

a) Verifique que $f(x) = (x+2)^2 + 1$.

b) Esboce o gráfico de f.

c) Qual o menor valor de $f(x)$? Para qual x esse valor é assumido?

6. Verifique que $\sqrt{1+x^2} - |x| = \dfrac{1}{|x| + \sqrt{1+x^2}}$ e, então, conclua que à medida que x cresce, o valor da diferença $\sqrt{1+x^2} - |x|$ aproxima-se de zero.

7. Seja $y = f(x)$ a função dada a partir da equação $x^2 + y^2 = 4$, para $y \ge 0$.

a) Determine uma fórmula que defina explicitamente y como função de x.

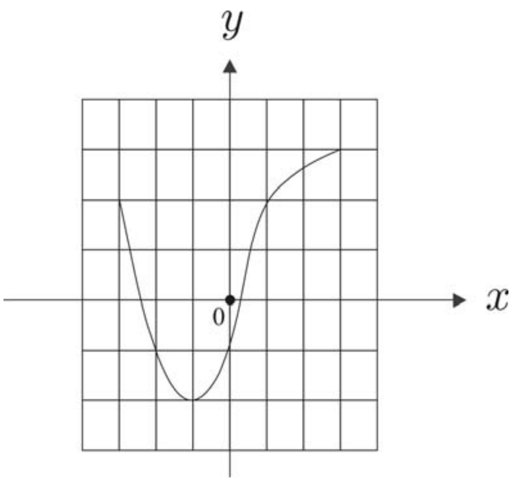
b) Determine o domínio de f.

c) Esboce o gráfico de f.

8. Uma caixa retangular sem tampa, com volume de $2m^3$, tem uma base quadrada. Expresse a área S da superfície da caixa como uma função do comprimento x de um lado da base.

9. À medida que o ar seco move-se para cima, ele se expande e esfria. Sabendo-se que a temperatura do solo é de 20^oC e que a temperatura a $1km$ de altura é de 10^oC, expresse a temperatura $\boldsymbol{T}$, em ^oC, como uma variável dependente da altura $\boldsymbol{h}$, medida em km, supondo que um modelo baseado em uma função *afim* seja apropriado. Qual a temperatura a uma altura de $2{,}5km$?

10. Suponha que a figura abaixo represente graficamente uma função $y = f(x)$.



a) Determine $f(-1)$.

b) É correta a estimativa $f(2) \in (2, 3)$?

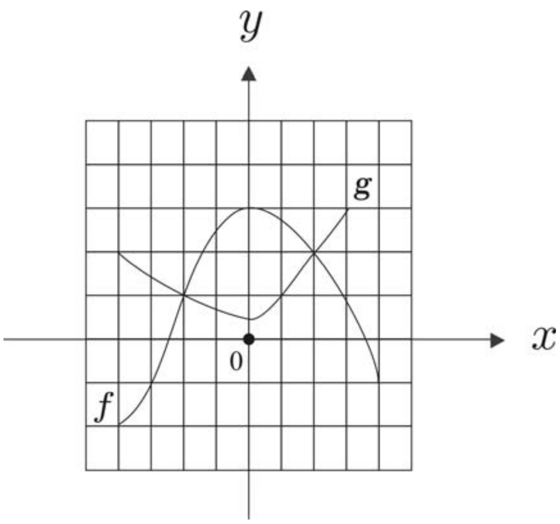
c) Para quais valores de x tem-se $f(x) = 2$?

d) Para quantos valores de x tem-se $f(x) = 0$?

e) Qual o domínio de f?

f) Qual a imagem de f?

11. Dados os gráficos das funções f e g, na figura abaixo,



a) obtenha os valores de $f(-4)$ e $g(3)$.

b) para quais valores de x, $f(x) = g(x)$?

c) estabeleça o domínio e a imagem de f.

d) estabeleça o domínio e a imagem de g.

e) para quantos valores de x, $f(x) = 0$?

f) para quantos valores de x, $g(x) = 0$?

Se uma função f satisfaz $f(x) = f(-x)$, para todo x em seu domínio, então f é uma função *par*. Se f satisfaz $f(-x) = -f(x)$, para todo x em seu domínio, então f é uma função *ímpar*.

12. Com base na definição anterior, classifique cada uma das funções abaixo.

a) $f(x) = x^5 + x$ b) $g(x) = x^2$ c) $h(x) = 2x - x^2$ d) $k(x) = 1 - x^4$

13. Se f é uma função qualquer, definida em $\mathbb{R}$ ou em um intervalo $(-a, a)$, mostre que $g(x) = f(x) + f(-x)$ é uma função par.

As funções $f:A \to B$ e $g:A' \to B'$ são *iguais*, se $A = A'$ e se, para todo elemento $x \in A$, $f(x) = g(x)$.

14. Com base na definição anterior, diga se $f = g$ em cada um dos casos abaixo.

a) $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$ e $g(x) = \sqrt{x^2 - x}$

b) $f(x) = x^2$ e $g(x) = |x|^2$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ e $g(x) = x + 1$

d) $f(x) = x$ e $g(x) = \sqrt{x^2}$

15. Qual a função quadrática f que satisfaz $f(0) = 5$, $f(-1) = 10$ e $f(1) = 6$?

Uma função f é dita *crescente* em um intervalo I, se dados $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$. Se $f(x_1) \leq f(x_2)$, para $x_1 < x_2$, então f é dita *não-decrescente* em I.

Uma função f é dita *decrescente* em um intervalo I, se dados $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$. Se $f(x_1) \geq f(x_2)$, para $x_1 < x_2$, então f é dita *não-crescente* em I.

16. Com base na definição acima, mostre que $f(x) = ax + b$ é crescente, se $a > 0$, e decrescente, se $a < 0$.

17. Com relação ao gráfico apresentado na questão **10.**, identifique os valores de x para os quais f é uma função crescente.

Considere f e g duas funções tais que a imagem de f seja subconjunto do domínio de g $(Im(f) \subseteq D(g))$. Chamamos de *composta de* g *e* f, e denotamos por $g \circ f$, a função $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, para todo x no domínio de f.

18. Nos casos abaixo, verifique que $Im(f) \subseteq D(g)$ para, assim, determinar a função $h(x) = g(f(x))$.

a) $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

c) $f(x) = -\sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2 - x}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ e $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

19. Determine a função f de modo que $(g \circ f)(x) = x, \ \forall x \in D(f)$, onde

a) $g(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$.

b) $g(x) = x^2 - 2x$, definida para $x \geq 1$.

20. Considere f uma função par e seja $h = g \circ f$. Mostre que h é uma função par. Supondo f uma função ímpar, podemos concluir que h também será?

Uma função f é dita *injetora*, se $\forall y \in Im(f), \exists!\, x \in D(f)$, com $y = f(x)$, ou, equivalentemente, se $f(x_1) = f(x_2)$ implicar $x_1 = x_2$. f será *sobrejetora*, se para qualquer y no contra-domínio de f, existir x no domínio de f, com $y = f(x)$.

Se uma função f é injetora e sobrejetora, diz-se, então, que f é *bijetora* e, como conseqüência, sendo

$$\begin{aligned} f: D(f) &\to Im(f) \\ x &\mapsto f(x) = y, \end{aligned}$$

existirá uma função

$$\begin{aligned} g: Im(f) &\to D(f) \\ y = f(x) &\mapsto g(y) = x \end{aligned}$$

chamada de *inversa* de f, denotada por $g = f^{-1}$.

21. Verifique que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x + 5$ é bijetora e determine sua inversa.

22. Se f^{-1} é a inversa da função do exercício anterior, qual é a função $f \circ f^{-1}$?

23. Dê domínio e contra-domínio adequados à função $f(x) = x^2$, de modo que a mesma seja invertível e defina essa inversa.

24. Considere a função $f(x) = \dfrac{k}{x}$, onde k é uma constante.

Faz-se necessário impor alguma condição sobre a constante k para que f admita uma inversa? Qual é essa inversa?

25. Considere $f: [1/2, +\infty) \to [b, +\infty)$, definida por $f(x) = x^2 - x + 1$.

Qual o valor de b para que f seja invertível?

Qual é essa inversa?