UFPB - CCEN - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
1ª LISTA DE EXERCÍCIOS - PERÍODO 2007.1

1. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ prove que:
   (a) $|a+b| \leq |a| + |b|$
   (b) $|a-b| \leq |a| + |b|$
   (c) $||a| - |b|| \leq |a-b|$
   (d) $|a+b+c| \leq |a| + |b| + |c|$.
2. Determine os conjuntos:
   (a) $A = \{x \in \mathbb{R};\ |2x+3| < 6\}$
   (b) $B = \{x \in \mathbb{R};\ |x-1| > 3\}$
   (c) $C = \{x \in \mathbb{R};\ |2x-1| > 2\}$
   (d) $D = \{x \in \mathbb{R};\ |x-1| < |2x+3|\}$.
3. Descreva em forma de intervalos cada um dos conjuntos abaixo:
   (a) $\{x :\ 3 + 7x \leq 2x - 9\}$
   (b) $\{x :\ x^2 - 3x > 10\}$
   (c) $\left\{x :\ \dfrac{x}{8-x} \geq -2\right\}$
   (d) $\left\{x :\ \dfrac{2x-5}{x-2} < 1\right\}$
4. Encontre os valores de x que satisfaz as equações abaixo:
   (a) $\left|x^2 + 9\right| = x^2 + 9$
   (b) $|6 - 2x| = 2\,|x - 3|$
   (c) $|9x| - 11 = x$
   (d) $\dfrac{|x+5|}{|2-x|} = 6.$
5. Classifique cada uma das afirmações abaixo como *verdadeira* ou *falsa*, justificando sua resposta.
   a) Se $x < 2$, então $x^2 < 4$.
   b) Se $x^2 < 4$, então $x < 2$.
   c) $x < 2$ se, e somente se, $x^2 < 4$.
   d) Se $x < 2$, então $x \leq 3$.
   e) Se $x = 3$, então $x \leq 3$.
   f) Se $|x| > 2$, então $x > 2$.
6. Estude o sinal de cada uma das expressões abaixo.
   a) $\dfrac{x-1}{x-2}$
   b) $(2x+1)(x-2)$
   c) $\dfrac{2-3x}{x+2}$
   d) $x(x-1)(2x+3)$
   e) $(2x-1)(x^2+1)$
   f) $x\left(x^2+3\right)$
7. Nos exercícios abaixo resolva as desigualdades indicadas.
   a) $\dfrac{2x-1}{x+1} < 0$
   b) $(2x-1)(x+3) < 0$
   c) $\dfrac{3x-2}{2-x} \leq 0$
   d) $\dfrac{2x-1}{x-3} > 5$
   e) $\dfrac{x}{2x-3} \leq 3$
   f) $x(2x-1)(x+1) > 0$
   g) $(4x+7)^{20}(2x+8) < 0$
   h) $\dfrac{x-3}{x^2+1} < 0$

a) $x^2 - 4 > 0$ b) $x^2 - 1 \leq 0$ c) $x^2 \leq 4$ d) $x^2 > 1$

e) $\dfrac{x^2 - 9}{x + 1} < 0$ f) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4} > 0$ g) $(2x - 1)\left(x^2 - 4\right) \leq 0$ h) $3x^2 \geq 48$

i) $x^2 < r^2$, onde $r > 0$ é um real dado j) $x^2 \geq r^2$, onde $r > 0$ é um real dado

a) $x^2 - 3x + 2 < 0$ b) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ c) $3x^2 + x - 2 > 0$

d) $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$ e) $x^2 + 3 > 0$ f) $x^2 + x + 1 > 0$

g) $x^2 + x + 1 \leq 0$ h) $x^2 + 5 \leq 0$ i) $(x - 2)(x + 3)(1 - x) > 0$

j) $x^2 + 1 < 3x - x^2 - 3$ k) $\dfrac{3x(x + 4)^2}{(x - 2)^2} < 0$ l) $(x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2) \leq 0$

8. Resolva as equações.

a) $|x| = 2$ b) $|x + 1| = 3$ c) $|2x - 1| = 1$ d) $|x - 2| = -1$

e) $|2x + 3| = 0$ f) $|x| = 2x + 1$ g) $|1 - 2x| = |1 - 3(x + 2)|$ h) $\left|\dfrac{x}{1 - 5x}\right| = 4$

i) $\sqrt{(x - 1)^2} = 5$ j) $\sqrt{(2 - x)^2} = 4$ k) $\sqrt{(x - 4)^2} = -1$ l) $x = \sqrt{(-4)^2}$

9. Dê o conjunto solução de cada uma das inequações modulares abaixo.

a) $|x| \leq 1$ b) $|2x - 1| < 3$ c) $|3x - 1| < -2$

d) $|3x + 3| \leq 1/3$ e) $\left|2x^2 - 1\right| < 1$ f) $|x| > 3$

g) $|x + 3| \geq 1$ h) $|2x - 1| < x$ i) $|x + 1| < |2x - 1|$

j) $|x - 2| - |x - 5| > x$ k) $|x - 1| + |x + 3| < |4x|$

10. Duas desigualdades são ditas *equivalentes,* se possuem o mesmo conjunto de soluções

Com base nesta definição, classifique as duplas de desigualdades apresentadas abaixo.

a) $\sqrt{x - 1} < \sqrt{2 - x}$ e $x - 2 < 1 - x$ b) $x^2 > 1$ e $1 + \dfrac{2}{x - 1} > 0$

11. Resolva os sistemas de inequações: a) $\begin{cases} 8x - 2 < x - 1 \\ 2x^2 - x \leq 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x^2 - 4x - 3 \leq 0 \\ \dfrac{1}{x^2} \geq 1 \end{cases}$

12. Para cada uma das funções abaixo, dê o domínio de definição e esboce o gráfico.

a) $f(x) = 3x$ b) $g(x) = -x$ c) $h(x) = -x + 1$

d) $f(x) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$ e) $g(x) = -\dfrac{1}{2}x$ f) $h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 2 \\ 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq -1 \\ -x + 1 & \text{se } x > -1 \end{cases}$ h) $g(x) = |x - 1|$ i) $h(x) = |x + 2|$

j) $f(x) = |x + 2| + 1$ k) $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ l) $h(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

m) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ n) $g(x) = \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$ o) $h(x) = \dfrac{|2x + 1|}{2x + 1}$

13. Se $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$, mostre que $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2 \\ 2x - 3 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$ e esboce o gráfico de f.

14. Determine o domínio das funções indicadas abaixo.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ b) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$ c) $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ d) $y = \dfrac{x}{x+2}$

e) $h(x) = \sqrt{x+2}$ f) $q(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x}$ g) $r(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ h) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x}{x+3}}$

i) $g(x) = \sqrt[3]{x^2-x}$ j) $y = \sqrt{x(2-3x)}$ k) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-1}{1-3x}}$ l) $y = \sqrt[6]{\dfrac{x-3}{x+2}}$

m) $s = \sqrt{t^2-1}$ n) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-1}}$ o) $y = \sqrt{4-x^2}$ p) $y = \sqrt{5-2x^2}$

q) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ r) $y = \sqrt{1-\sqrt{x}}$ s) $y = \sqrt{x} - \sqrt{5-2x}$ t) $y = \sqrt{x-\sqrt{x}}$

15. Utilizando o procedimento indicado no *Exercício 11*, esboce o gráfico das funções definidas abaixo.

a) $f(x) = |x| - 1$ b) $g(x) = ||x| - 1|$ c) $h(x) = |x+1| - |x|$ d) $y = \left|x^2 - 1\right|$

16. Mostre que

a) para todo $x > 0$, $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$; b) não existem x e y reais, tais que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x+y}$.

17. Uma pequena indústria fabrica termômetros e estima que o lucro semanal, em reais, pela fabricação e venda de x unidades/semana é de $R(x) = -0,001x^2 + 8x - 5000$. Qual o lucro da empresa em uma semama que foram fabricados 1.000 termômetros?