

Universidade Federal da Paraíba

Departamento de Matemática
Lista de Exercícios $N^{\circ}3$
Equações Diferenciais Ordinárias

23/09/2004

1. Achar todas as soluções das seguintes equações:

(a) $y' = x^2y$. (f) $y' = (y-1)(y-2)$.

(b) $yy' = x$. (g) $y' = y^{-2}$.

(c) $y' = \frac{x+x^2}{y-y^2}$. (i) $y' = e^{x+y}$.

(d) $y' = x^2y^2 - 4x^2$.

(e) $y' = \frac{e^{x-y}}{1+e^x}$.

2. Considere a equação $y' = y^2$.

(a) Mostre que a solução dessa equação, passando por (x_0, y_0) , é dada por $\varphi(x) = \frac{y_0}{1 - y_0(x - x_0)}$.

(b) Para que valores de x , φ é bem definida?

(c) Para que valores de x , φ é solução da equação, passando por (x_0, y_0) ?

3. Uma função, f , definida para x e y reais, é dita homogênea de grau k , se

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y).$$

Quando f é homogênea, de grau zero, tem-se $f(tx, ty) = f(x, y)$. Mostre que a mudança de variável $y = ux$, transforma a equação $y' = f(x, y)$, na equação

$$u' = \frac{f(1, u) - u}{x},$$

a qual pode ser resolvida pelo método das equações com variáveis separadas.

4. Achar as soluções de:

a) $y' = \frac{x+y}{x-y}$. b) $y' = \frac{y^2}{xy+y^2}$. c) $y' = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$.

5. Considere, no plano "xy", uma família de curvas, a um parâmetro λ , descrita pela equação,

$$F(x, y, \lambda) = 0. \quad (1)$$

Suponha que $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ existam. Fixado λ , arbitrário, a equação (1) descreve uma curva no plano xy e, pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2)$$

Supondo $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, obtemos,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \quad (3)$$

A equação (3) representa a declividade das curvas descritas pela equação (1). A família das curvas (trajetórias) ortogonais terá declividade,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}. \quad (4),$$

que resulta na equação diferencial,

$$\frac{\partial F}{\partial x} dy - \frac{\partial F}{\partial y} dx = 0. \quad (4)$$

As soluções de (4) descrevem as trajetórias ortogonais às curvas dadas por (1).

Ache as trajetórias ortogonais de cada uma das famílias de curvas a seguir:

- a) $x^2 + y^2 - \lambda = 0$, $\lambda > 0$. Faça um esboço gráfico.
b) $y = \lambda x^2$. c) $y = \lambda x$. d) $x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0$ e) $y = \lambda e^x$.

6. Sejam M e N duas funções reais, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, numa região $\Re = \{(x, y); |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \subset \mathbb{R}^2$.

Prove que, se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

então a equação $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, é exata.

7. Determinar quais das EDOs, a seguir, são exatas, e então as resolva:

- a) $2xydx + (x^2 + 3y^2)dy = 0$ b) $(x^2 + xy)dx + xydy = 0$
c) $e^x dx + e^y(y + 1)dy = 0$ d) $\cos x \cos^2 y dx - \sin x \sin 2y dy = 0$
e) $x^2 y^3 dx - x^3 y^2 dy = 0$ f) $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$
g) $(3x^2 \log |x| + x^2 + y)dx + x dy = 0$ h) $2xydx + (x^2 + 1)dy = 0$
i) $(2x + y)dx + (x - 2y)dy = 0$ j) $[x \cos(x + y) + \sin(x + y)]dx + x \cos(x + y)dy = 0$.

8. Suponha que $Mdx + Ndy = 0$ não é exata. Uma função $u = u(x, y)$, tal que

$$uMdx + uNdy = 0$$

torna-se exata, é dita um fator de integração. Prove que uma função, u , tendo derivadas parciais, de primeira ordem, contínuas, é um fator de integração se e somente se

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y}.$$

9. Ache, se possível um fator de integração para cada uma das equações , a seguir:

- a) $ydx - xdy = 0$ b) $(2y^3 + 2)dx + 3xy^2dy = 0$
 c) $\cos x \cos ydx - 2 \sin x \sin ydy = 0$ d) $(x + 2y)dx + xdy = 0$.
 e) $2y^2dx + (2x + 3xy)dy = 0$. f) $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$.

10. a) Sob as mesmas hipóteses do Exercício 8 , mostre que se a equação $Mdx + Ndy = 0$ tem um fator de integração, u , que depende apenas de x , então

$$p = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

é uma função, apenas de x , contínua.

b) Nesse caso, mostre que $u(x) = e^{P(x)}$, onde $P' = p$, é um fator de integração.

11. a) Sob as mesmas hipóteses do Exercício 8 , mostre que se a equação $Mdx + Ndy = 0$ tem um fator de integração, u , que depende apenas de y , então

$$q = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

é uma função, apenas de y , contínua.

b) Nesse caso, mostre que $u(y) = e^{Q(y)}$, onde $Q' = q$, é um fator de integração.

12. Determinar k para que as equações, a seguir, sejam exatas e as resolva:

- a) $ydx + (kx + y^2 + 1)dy = 0$ b) $\cos ydx + \left[\cos y + k(x + y) \sin y \right] dy = 0$
 c) $\left(1 + \frac{1}{x+ky} \right) dx + \frac{k}{x+ky} dy = 0$

13. Considere o PVI $(*) = \begin{cases} y' &= 3y + 1 \\ y(0) &= 2 \end{cases}$

- a) Mostre que todas as aproximações sucessivas, $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ são definidas para todo x .
 b) Calcule $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.
 c) Ache a solução de $(*)$ como um problema linear de primeira ordem.
 d) Compare as soluções em b) e c).

14. Ache as aproximações, $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, de cada PVI, a seguir:

- a) $\begin{cases} y' &= x^2 + y^2 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y' &= y^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y' &= y^2 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$

15. Considere o PVI $(**) = \begin{cases} y' &= x^2 + y^2 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$, em $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ , } |x| \leq 1 \text{ , } |y| \leq 1\}$.

- a) Encontre um limite, M , para $f(x, y) = x^2 + y^2$, em $\mathcal{R}$.
 b) Sobre que intervalo, contendo $x = 0$, as aproximações sucessivas existem e tem gráfico contido em $\mathcal{R}$?

16. Mostre que as funções, a seguir, são lipschitzianas:
- a) $f(x, y) = 4x^2 + y^2$, em $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.
 - b) $f(x, y) = x^3 e^{-xy^2}$, em $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq a, |y| < \infty\}$.
 - c) $f(x, y) = a(x)y + b(x)$, em $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; |x| \leq 1, |y| < \infty\}$, a e b funções contínuas em $|x| \leq 1$.
17. a) Mostre que a função $f(x, y) = |y|x^2$ é lipschitziana em $\mathbb{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.
- b) Mostre que $\frac{\partial f}{\partial y}$ não existe em $(x, 0)$, com $x \neq 0$.