

Nome: _____ **Gabarito**

Matrícula: _____

Observação: Esta prova consta de 5 questões. Procure resolvê-las, incluindo os rascunhos, que são elementos fundamentais na avaliação.

1. Obter o conjunto solução da inequação

$$(x - 4)(x - 5)(x + 2) \leq 0$$

Resolução

Primeiramente observe que, se um dos fatores é zero, então temos uma solução. Portanto 4, 5 e -2 fazem parte do conjunto solução. O restante do conjunto é obtido com estudo dos sinais das expressões. Para se obter um produto negativo, o número de fatores negativos deve ser ímpar, no caso 1 ou 3. É também conveniente observar que, independente do valor atribuído à variável x , são válidas as desigualdades

$$x - 5 < x - 4 < x + 2,$$

de onde se conclui que, para termos apenas 1 fator negativo, devemos exigir que a primeira expressão, $(x - 5)$, seja negativa e a segunda, $(x - 4)$, seja positiva, isto é,

$$x - 5 < 0 \text{ e } x - 4 > 0 \iff x > 4 \text{ e } x < 5 \iff 4 < x < 5$$

enquanto que, para termos 3 fatores negativos, basta exigir que o maior deles o seja:

$$x + 2 < 0 \iff x < -2.$$

Em síntese, o conjunto solução é

$$S = (-\infty, -2] \cup [4, 5]$$

2. Em cada item a seguir é descrita uma reta. Encontre sua equação.

(a) r : reta que passa pelos pontos $(2, 3)$ e $(3, -2)$.

(b) l : reta que passa por $(3, 1)$ e é perpendicular à reta r dada no item (a).

Resolução

(a) A reta r tem equação

$$\begin{aligned}y - 3 &= \frac{3 - (-2)}{2 - 3} (x - 2) \iff y = -5(x - 2) + 3 \\ &\iff y = -5x + 13\end{aligned}$$

(b) A declividade da reta l é $m_l = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5}$. Portanto tem equação

$$\begin{aligned}y - 1 &= \frac{1}{5} (x - 3) \iff y = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5} + 1 \\ &\iff y = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}\end{aligned}$$

3. Determinar, em cada caso, o domínio de definição da função.

(a) $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x}$.

(b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$

(c) $h(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$

(d) $t(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 9}$

Resolução

(a) D_f é descrito pela inequação $x^3 + 3x \geq 0 \iff x(x^2 + 3) \geq 0$. Como o fator $x^2 + 3$ é sempre positivo, o domínio de f é descrito pela equação $x \geq 0$, ou seja:

$$D_f = [0, \infty).$$

(b) D_g é descrito pela inequação $x^2 + 3 > 0$. Como a expressão $x^2 + 3$ é sempre positiva,

$$D_g = \mathbb{R}, \text{ o conjunto dos números reais.}$$

(c) D_h é descrito pela sentença $x^2 - 9 \neq 0 \iff (x + 3)(x - 3) \neq 0 \iff x \neq -3$ e $x \neq 3$. Assim, temos que

$$D_h = \mathbb{R} - \{-3, 3\}.$$

(d) D_t é descrito pela sentença $x^2 - 9 \neq 0$ e $x \geq 0 \iff (x + 3)(x - 3) \neq 0$ e $x \geq 0 \iff x \neq -3, x \neq 3$ e $x \geq 0 \iff x \neq 3$ e $x \geq 0$, uma vez que a desigualdade acarreta $x \neq 3$. Assim, temos que

$$D_t = [0, \infty) - \{3\}.$$

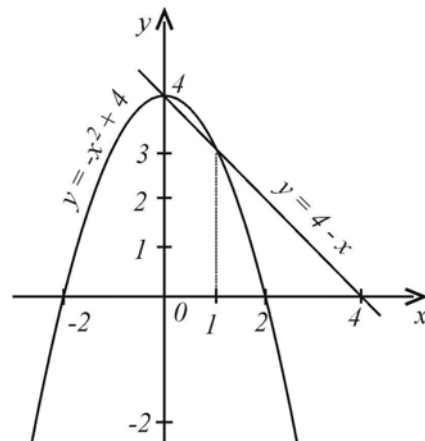
4. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & \text{para } -2 \leq x < 1 \\ 4 - x, & \text{para } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

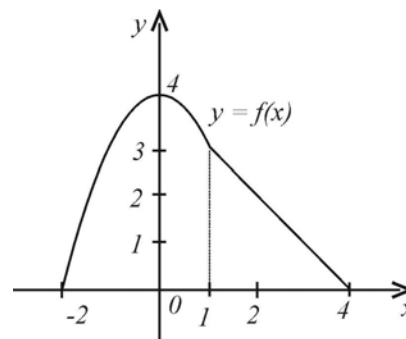
- (a) Esboçar o gráfico de f .
- (b) Com base no estudo do gráfico, qual é o valor máximo de $f(x)$ e para qual x esse valor é assumido?

Resolução

- (a) Para estudar o gráfico de $y = f(x)$, é conveniente estudar separadamente os gráficos de $y = -x^2 + 4$ e o de $y = 4 - x$.
- (i) O gráfico de $y = -x^2 + 4$ é uma parábola com concavidade para baixo, uma vez que o coeficiente de x^2 é -1 . A equação que define esta parábola também pode ser escrita na forma $y = (2 + x)(2 - x)$, o que indica que seu gráfico corta o eixo x nos pontos -2 e 2 e portanto seu vértice tem primeira coordenada 0 , que é o ponto médio das raízes e segunda coordenada 4 , que é seu valor para $x = 0$. Evidentemente que as coordenadas do vértice podem ser obtidas por outros meios
- (ii) Já o gráfico de $y = 4 - x$ é uma reta, que passa pelos pontos $(0, 4)$ e $(4, 0)$. Como é conveniente estudar o ponto onde a função f muda de expressão, observamos que ela passa pelo ponto $(1, 3)$ (note que a parábola também passa por esse ponto. O estudo feito até agora nos diz que os gráficos de $y = -x^2 + 4$ e de $y = 4 - x$ podem ser esboçados como na figura abaixo



$\therefore$ o gráfico de f é do tipo



- (b) Com base no gráfico de f , concluímos que esta função tem valor máximo 4 e que este valor é assumido para $x = 0$.

5. Usando as definições do problema 4, calcule:

(a) $(f + g)(x)$, $(f + g)(0)$, $(f + g)(1)$.

(b) $\left(\frac{h}{t}\right)(x)$, $\left(\frac{h}{t}\right)(1)$, $\left(\frac{h}{t}\right)(4)$.

Resolução

(a)

$$(f + g)(x) = \sqrt{x^3 + 3x} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$(f + g)(0) = \sqrt{0} + \frac{1}{\sqrt{0^2 + 3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(f + g)(1) = \sqrt{1^3 + 3} + \frac{1}{\sqrt{1^2 + 3}} = \sqrt{4} + \frac{1}{\sqrt{4}} = 2 + \frac{1}{2}$$

(b)

$$\left(\frac{h}{t}\right)(x) = \frac{\frac{x}{x^2 - 9}}{\frac{\sqrt{x}}{x^2 - 9}} = \frac{x}{x^2 - 9} \cdot \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}, \quad x \neq 0 \quad x \neq \pm 3.$$

$$\left(\frac{h}{t}\right)(1) = \sqrt{1} = 1.$$

$$\left(\frac{h}{t}\right)(4) = \sqrt{4} = 2.$$