

UFPB – CCEN – Departamento de Matemática
Resolução da 2ª prova de Matemática Básica I – Período 2004.1 – Turma 07

1. Estude os limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7}{x^2 + 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 7x - 30}{x^2 - 9}$$

Resolução.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7}{x^2 + 1} = \frac{3 \times 9 - 7}{9 + 1} = \frac{27 - 7}{10} = 2.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 7x - 30}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 10)}{(x + 3)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 10}{x + 3} = \frac{13}{6}$$

2. Estude a continuidade da função:

$$f(x) = \begin{cases} 6 - x^2, & \text{se } x \geq 2 \\ 3x + b, & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Resolução.

Primeiramente observa-se que f é contínua em qualquer ponto diferente de $x = 2$. Pela forma com que f é definida, o estudo da continuidade em $x = 2$ depende do cálculo dos limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (6 - x^2) = 6 - 4 = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x + b) = 6 + b.$$

A igualdade entre os dois limites ocorre se $6 + b = 2$, ou se $b = -4$. Com este valor, também tem-se $f(2) = 2$ e portanto, f é contínua em $x = 2 \iff b = -4$.

3. Calcule a primeira e a segunda derivadas das funções:

(a) $f(x) = 3x^3 \ln x - x^3.$

(b) $g(x) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$

(c) $h(x) = \frac{1}{e^x} + \frac{\ln x}{x}$

(d) $m(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Resolução.

(a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9x^2 \ln x + 3x^3 \frac{1}{x} - 3x^2 = 9x^2 \ln x + 3x^2 - 3x^2 = 9x^2 \ln x \\ f''(x) &= 18x \ln x + 9x^2 \frac{1}{x} = 18x \ln x + 9x \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x e^x + x^2 e^x - 2e^x - 2x e^x + 2e^x = x^2 e^x \\ g''(x) &= 2x e^x + x^2 e^x \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{-e^x}{(e^x)^2} = \frac{-1}{e^x} \\ h''(x) &= \frac{-(-e^x)}{(e^x)^2} = \frac{e^x}{(e^x)^2} = \frac{1}{e^x} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} m'(x) &= \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-2}{x^2-2x+1} \\ m''(x) &= \frac{2(2x-2)}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

4. Dada a função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 5$, verifique:

(a) para que valores de x $f'(x) = 0$;

(b) para que valores de x $f''(x) = 0$.

Resolução.

(a) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$. Portanto $f'(x) = 0 \iff$

$$3x^2 + 6x - 24 = 0 \iff$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \iff (x + 4)(x - 2) = 0 \iff$$

$$x = -4 \text{ ou } x = 2$$

(b) $f''(x) = 6x + 6$. Portanto $f''(x) = 0 \iff$

$$6x + 6 = 0 \iff x = -1.$$