

Nome: _____ **Gabarito**

Matrícula: _____

Problema 1.

Resolva as integrais indefinidas abaixo.

(a) $\int (4x - 2) e^{x^2 - x} dx$

Rascunho / Resolução

Fazendo $u = x^2 - x$, $du = (2x - 1) dx$ ou ainda $2du = (4x - 2) dx$, temos

$$\begin{aligned} \int (4x - 2) e^{x^2 - x} dx &= \int 2e^u du = 2e^u + C \\ &= 2e^{x^2 - x} + C \end{aligned}$$

(b) $\int \frac{1 + \sqrt{x}}{x^2} dx$

Rascunho / Resolução

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \sqrt{x}}{x^2} dx &= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x^2} \right) dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx \\ &= -\frac{1}{x} + \int \frac{1}{x^{3/2}} dx = -\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C \\ &= -\frac{1 + 2\sqrt{x}}{x} + C \end{aligned}$$

Problema 2.

Qual é a função f que satisfaz $f'(x) + \sin x = 1$, com $f(0) = 2$?

Rascunho / Resolução

A primeira equação é equivalente a $f'(x) = 1 - \sin x$. Portanto

$$f(x) = \int (1 - \sin x) dx = x + \cos x + C,$$

Já a segunda equação, junto com este último resultado nos diz que

$$\cos 0 + C = 2 \iff C = 1$$

$\therefore$

$$f(x) = x + \cos x + 1$$

Problema 3.

Se $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, existe $\int_{-1}^1 f(x) dx$?

Rascunho / Resolução

A função f não está definida para $x = 0$. portanto temos uma integral indefinida, uma vez que 0 está contido no intervalo que define os limites de integração. Temos que

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

Como

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + C,$$

temos o seguinte:

$$\int_{-1}^{\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \left. \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} \right|_{-1}^{\varepsilon} = \frac{3\sqrt[3]{\varepsilon^2}}{2} - \frac{3\sqrt[3]{(-1)^2}}{2} = \frac{3\sqrt[3]{\varepsilon^2}}{2} - \frac{3}{2}$$

e

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} \Big|_{\varepsilon}^1 = \frac{3\sqrt[3]{(-1)^2}}{2} - \frac{3\sqrt[3]{\varepsilon^2}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt[3]{\varepsilon^2}}{2}$$

$\therefore$

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \left(\frac{3\sqrt[3]{\varepsilon^2}}{2} - \frac{3}{2} \right) = -\frac{3}{2}$$

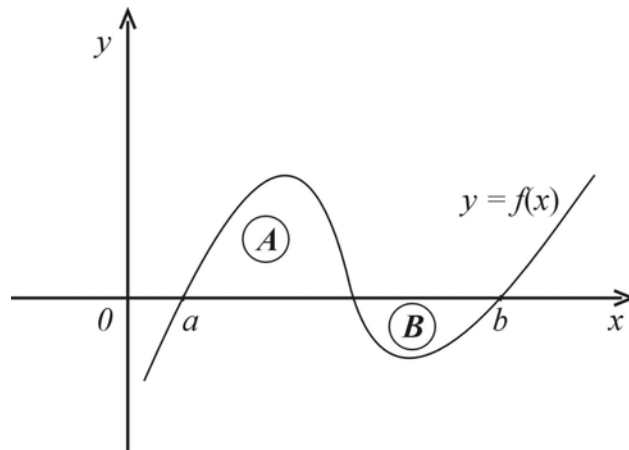
e

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt[3]{\varepsilon^2}}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{ a integral existe e } \int_{-1}^1 f(x) dx = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

Problema 4.

Considere a figura abaixo, mostrando duas regiões A e B , delimitadas pelo gráfico da função $y = f(x)$ e pelo eixo X .



Sabe-se que essas regiões possuem áreas respectivamente iguais a 3,5 e 2,2 unidades de área. Quanto vale $\int_a^b f(x) dx$?

Rascunho / Resolução

$$\int_a^b f(x) dx = A - B = 3,5 - 2,2 = 1,3.$$

Problema 5.

Calcule a área da região do primeiro quadrante, delimitada pela parábola $y = x^2 - 4x$ e pelas retas $y = 2x$ e $y = x$.

Rascunho / Resolução

As três curvas têm a origem como ponto comum. A parábola $y = x^2 - 4x$ tem concavidade para cima, uma vez que sua derivada segunda é positiva ($y'' = 2$). Assim, entre dois pontos de interseção com uma dada reta, ela "está abaixo" desta. Os outros pontos de interseção (lembrar que a origem é um deles) com a reta $y = x$ e com a reta $y = 2x$ têm primeira coordenada, respectivamente, $x = 5$ e $x = 6$, como se deduz das equações a seguir:

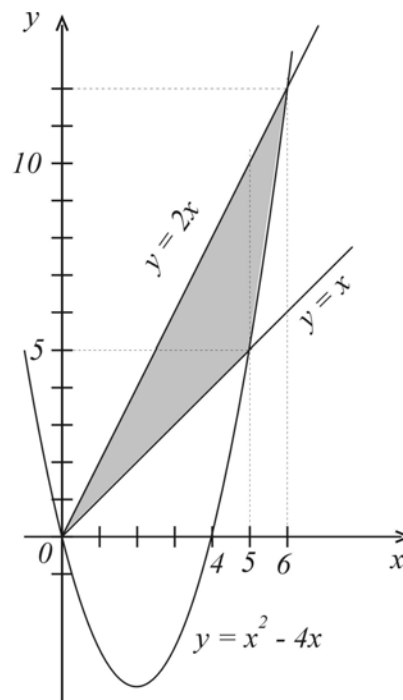
$$x^2 - 4x = x \iff x^2 - 5x = 0 \iff x(x - 5) = 0$$

Portanto $x = 0$ ou $x = 5$

$$x^2 - 4x = 2x \iff x^2 - 6x = 0 \iff x(x - 6) = 0$$

Portanto $x = 0$ ou $x = 6$

O gráfico a seguir ajuda a visualizar a região



$$\begin{aligned}
A &= \int_0^5 (2x - x) dx + \int_5^6 [2x - (x^2 - 4x)] dx \\
&= \int_0^5 x dx + \int_5^6 (6x - x^2) dx \\
&= \frac{x^2}{2} \Big|_0^5 + \left[3x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_5^6 \\
&= \frac{25}{2} + \left(3 \times 36 - \frac{6 \times 36}{3} \right) - \left(3 \times 25 - \frac{5 \times 25}{3} \right) \\
&= \frac{25}{2} + (3 \times 36 - 2 \times 36) - \left(\frac{9 \times 25 - 5 \times 25}{3} \right) \\
&= \frac{25}{2} + 36 - \frac{4 \times 25}{3} \\
&= \frac{25}{2} + 36 - \frac{100}{3} = \frac{75 + 6 \times 36 - 200}{6} \\
&= \frac{75 + 216 - 200}{6} = \frac{91}{6}
\end{aligned}$$