

UFPB – CCEN – Departamento de Matemática
3ª Prova de Cálculo I – Período 2004.2

Em 06/05/2005

Nome: Gabarito

Matrícula:

1. Suponha que f seja uma função derivável e seja g a função definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, para $x \neq 0$. Se $x = a$ é ponto crítico de g , verifique que $f(a) = af'(a)$.

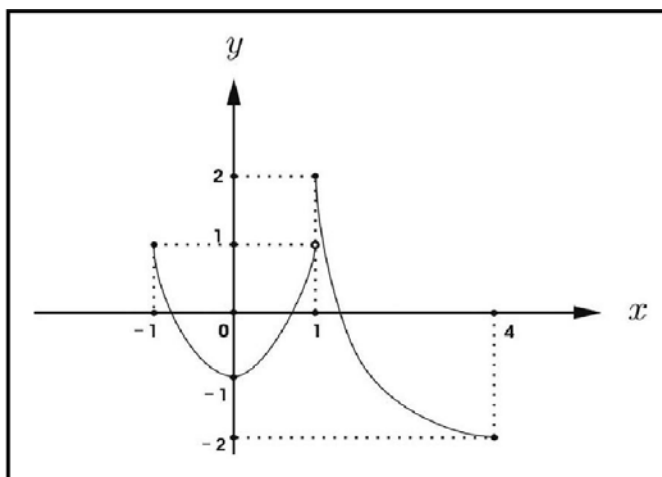
Resolução.

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

$\therefore$

$$g'(a) = 0 \iff af'(a) - f(a) = 0 \iff f(a) = af'(a)$$

2. O gráfico abaixo representa uma função $f : [-1, 4] \longrightarrow [-2, 2]$.



- (a) Para quais valores de x $f'(x) > 0$? **Resposta:** para qualquer x no intervalo $(0, 1)$
(b) f possui algum ponto de máximo ou de mínimo local? **Resposta:** Sim.
(c) f possui algum ponto de máximo ou de mínimo absoluto? **Resposta:** Sim.
(d) f satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio? **Resposta:** Não.

3. Se a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume um máximo em $x = 1$, seu gráfico intercepta o eixo X em $x = -1$ e o eixo Y em $y = 1$, quais os valores de a , b e c ?

Resolução.

Como a função está definida em todo o conjunto dos números reais, $x = 1$ é necessariamente ponto crítico de f . De

$$f'(x) = 2ax + b \text{ e } f''(x) = 2a$$

concluimos que $2a + b = 0$. Como $f(0) = 1$, temos que $c = 1$. Como $f(-1) = 0$, temos que $a - b + c = 0 \therefore 3a + c = 0$ ou ainda

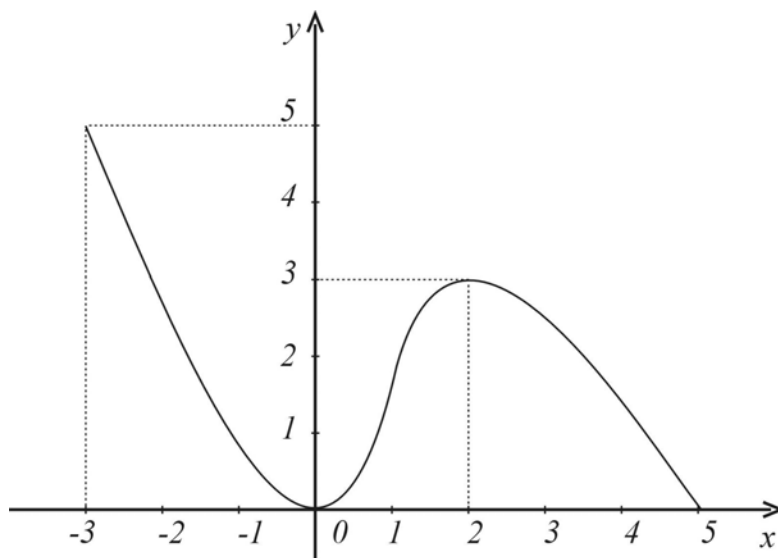
$$a = -\frac{1}{3} \therefore b = \frac{2}{3}$$

Em resumo: $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$ e $c = 1$.

4. Esboce o gráfico da função $y = f(x)$, sabendo que:

- (a) $f(-3) = 5$, $f(0) = 0$, $f(2) = 3$ e $f(5) = 0$;
- (b) $f'(x) < 0$, se $x < 0$, $f'(x) > 0$, se $0 < x < 2$, e $f'(x) < 0$, se $x > 2$;
- (c) $f''(x) > 0$, se $x < 1$, e $f''(x) < 0$, se $x > 1$.

Rascunho / Resolução:



5. Responda apenas um dos itens a seguir (**a** ou **b**).

(a) Calcule os limites:

i. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$

(b) O gráfico da função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ possui alguma assíntota?

Rascunho / Resolução:

1. (a) i. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]}$
Mas

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{2}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1/x^2}{1 + \frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x^2}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1-x)}$. Mas

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1-x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{1-x}}{1} = -1 \end{aligned}$$

$\therefore$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \pm\infty$. f tem os seguintes limites laterais:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2} &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2} &= -\infty\end{aligned}$$

De qualquer forma se conclui que f tem a reta vertical $x = 2$ como assíntota. Por outro lado, sendo

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{x^2 - 4x + 1}{(x - 2)^2}, \text{ temos que} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) &= 1\end{aligned}$$

o que sugere que f "pode ter assíntota" na forma $y = x + b$. Com essa hipótese, pode-se fazer a seguinte seqüência de deduções:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (x + b)] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 - 1}{x - 2} - (x + b) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 - 1 - (x - 2)(x + b)}{x - 2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 - 1 - x^2 + (2 - b)x + 2b}{x - 2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(2 - b)x + 2b - 1}{x - 2} \right]\end{aligned}$$

Este último limite é zero se, e somente se, $b = 2$. Assim, a reta $y = x + 2$ é assíntota de f .