

UFPB – CCEN – Departamento de Matemática
2ª Prova de Cálculo I – Período 2004.2

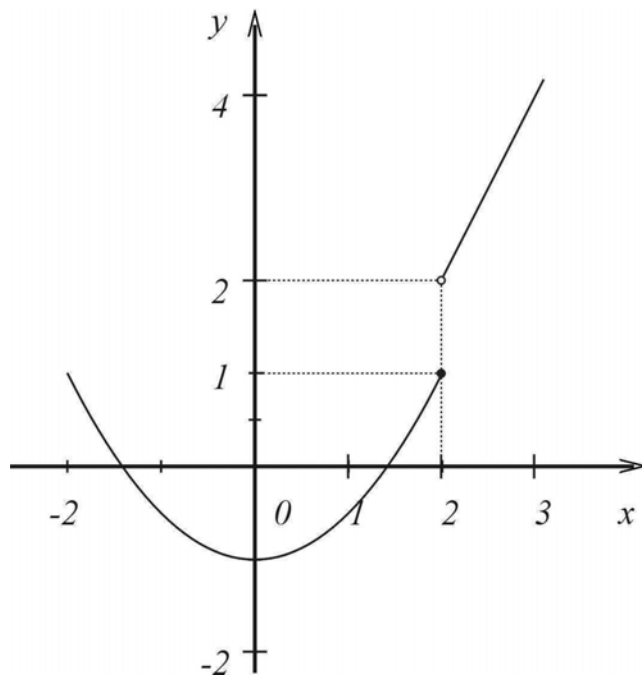
Em 18/04/2005

Nome: Gabarito

Matrícula: _____

Observação: Procure resolver as questões nos locais indicados, apresentando os rascunhos, que são elementos fundamentais na avaliação. A exceção é o problema 1, que exige apenas a resposta pura e simples.

1. Suponha que a função $y = f(x)$ tenha como gráfico o esboçado a seguir



- (a) Qual é o valor de $f(2)$? **R.:** $f(2) = 1$
- (b) Calcule, se existir, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$. **R.:** $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$
- (c) Calcule, se existir, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$. **R.:** $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$
- (d) f tem derivada à esquerda em $x = 2$? **R.:** Sim.

2. A curva $2x^3 + xy^2 - 3x^2y = 2$ passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(1, 3)$ (verifique!) portanto não é uma função. Calcule as declividades das retas tangentes à curva, em cada um desses pontos.

Rascunho / Resolução:

Uma inspeção simples nos mostra que os pontos dados realmente satisfazem à equação:

$$2 \times 1^3 + 1 \times 0 - 3 \times 1^2 \times 0 = 2$$

e

$$2 \times 1^3 + 1 \times 3^2 - 3 \times 1^2 \times 3 = 2 + 9 - 9 = 2.$$

Quanto ao restante, a questão pode ser resolvida de dois modos, como segue.

Solução 1: derivando implicitamente a equação temos

$$6x^2 + y^2 + 2xyy' - 6xy - 3x^2y' = 0 \iff (3x^2 - 2xy)y' = 6x^2 + y^2 - 6xy$$

$\iff$

$$y' = \frac{6x^2 + y^2 - 6xy}{3x^2 - 2xy}$$

Assim, no ponto $(1, 0)$, a declividade é

$$y' = \frac{6}{3} = 2$$

e, no ponto $(1, 3)$, a declividade é

$$y' = \frac{6 + 9 - 18}{3 - 6} = 1$$

Solução 1: a equação original pode ser reescrita assim:

$$xy^2 - 3x^2y + (2x^3 - 2) = 0$$

que pode ser considerada uma equação do segundo grau em y , cujos coeficientes são expressões em x . Temos duas soluções possíveis:

$$y = \frac{3x^2 + \sqrt{9x^4 - 8x(x^3 - 1)}}{2x} = \frac{3x^2 + \sqrt{x^4 + 8x}}{2x} = \frac{3x}{2} + \frac{\sqrt{x^4 + 8x}}{2x}$$

e

$$y = \frac{3x^2 - \sqrt{x^4 + 8x}}{2x} = \frac{3x}{2} - \frac{\sqrt{x^4 + 8x}}{2x}$$

cujas derivadas são, respectivamente

$$y' = \frac{3}{2} + \frac{\frac{4x^4 + 8x}{\sqrt{x^4 + 8x}} - 2\sqrt{x^4 + 8x}}{4x^2} \text{ e } y' = \frac{3}{2} - \frac{\frac{4x^4 + 8x}{\sqrt{x^4 + 8x}} - 2\sqrt{x^4 + 8x}}{4x^2}$$

que, para $x = 1$ valem, respectivamente, $\frac{3}{2} + \frac{\frac{12}{3} - 6}{4} = 1$ e $\frac{3}{2} - \frac{\frac{12}{3} - 6}{4} = 2$.

3. Estude os limites a seguir:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+1}{x^3-1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 16x^2 + 5}{7x^3 - 16x - 7}$

Rascunho / Resolução:

(a) Como $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 1) = 2$, temos um limite infinito, o que conduz ao estudo dos limites laterais. Mas, próximo de $x = 1$, o numerador tem valores positivos, bastando portanto estudar o sinal do denominador, para $x < 1$ e para $x > 1$. No primeiro caso, temos $x^3 < 1 \iff x^3 - 1 < 0$, enquanto que, no segundo caso, o denominador é positivo. Assim temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1} = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1} = \infty.$$

(b) A solução é dada na seqüência:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 16x^2 + 5}{7x^3 - 16x - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(2 - \frac{16}{x} + \frac{5}{x^3} \right)}{x^3 \left(7 - \frac{16}{x^2} - \frac{7}{x^3} \right)} = \frac{2}{7}.$$

4. Usando apenas as regras de derivação, mostre que:

(a) A derivada da função $f(x) = \ln(\sec x + \tan x)$ é $f'(x) = \sec x$

(b) A derivada da função $g(x) = \frac{1}{2} \arcsen x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}$ é $g'(x) = \sqrt{1-x^2}$

Rascunho / Resolução:

(a) $f'(x) = \frac{\sec' x + \tan' x}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec x (\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} = \sec x$

(b)

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + 1 - x^2 - x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2 - 2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\ &= \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

5. Um ponto se desloca ao longo de um trecho da curva $2x^3 + xy^2 - 3x^2y = 2$ contendo o ponto $(1, 0)$. Calcule a razão entre a velocidade da ordenada (y) e a da abscissa (x), no momento em que este passar pelo ponto $(1, 0)$.

Rascunho / Resolução:

Considerando $x = x(t)$ e $y = y(t)$ e usando as notações $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ e $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, temos:

$$6x^2\dot{x} + \dot{x}y^2 + 2xy\dot{y} - 6x\dot{x}y - 3x^2\dot{y} = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$(2xy - 3x^2)\dot{y} + (6x^2 + y^2 - 6xy)\dot{x} = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$(2xy - 3x^2)\dot{y} = (6xy - 6x^2 - y^2)\dot{x}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{(6xy - 6x^2 - y^2)}{2xy - 3x^2}.$$

Assim, no ponto $(1, 0)$ a razão procurada é

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-6}{-3} = 2$$