

Resolução da 1ª Prova de Cálculo I

1. Obter o conjunto solução da inequação

$$|2x - 4| (x^2 + x - 2) \leq 0$$

Resolução. Inicialmente observe que, se um dos fatores é zero, então o produto é zero, assim, $x = 2$ é uma solução, caso contrário temos

$$|2x - 4| (x^2 + x - 2) \leq 0 \iff x^2 + x - 2 \leq 0,$$

uma vez que $|2x - 4| \geq 0$ para todo valor real de x . Mas a fatoração

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

nos diz que a inequação inicial é equivalente à

$$(x + 2)(x - 1) \leq 0,$$

o que equivale a $x + 2 \geq 0$ e $x - 1 \leq 0$ ou $x + 2 \leq 0$ e $x - 1 \geq 0$. Continuando temos

$$x \geq -2 \text{ e } x \leq 1 \text{ ou } x \leq -2 \text{ e } x \geq 1.$$

Como a segunda sentença é contraditória, concluímos que o conjunto solução é dado por $-2 \leq x \leq 1$, ou $x = 2$, ou seja, é o conjunto $[-2, 1] \cup \{2\}$.

2. Resolver a equação $|5x - 1| = x^2 + 2x + 1$.

Resolução. Há dois casos a serem considerados:

1º Caso: $5x - 1 \geq 0$ ($\iff x \geq \frac{1}{5}$).

Neste caso, a equação é equivalente à

$$5x - 1 = x^2 + 2x + 1$$

$\iff$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$\iff$

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

e a hipótese deste caso conduz à solução $\{1, 2\}$.

2º Caso: $5x - 1 \leq 0$ ($\iff x \leq \frac{1}{5}$)

Neste caso, a equação é equivalente à

$$1 - 5x = x^2 + 2x + 1$$

$\iff$

$$x^2 + 7x = 0$$

$\iff$

$$x(x + 7) = 0$$

e a hipótese deste caso conduz à solução $\{-7, 0\}$.

Em resumo, temos que o conjunto solução é $\{-7, 0, 1, 2\}$

3. Determinar o domínio de definição da função

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-1}}$$

Resolução.

O numerador da expressão obriga a condição $x \geq 0$. Já o denominador obriga a condição $x \neq 1$. Assim, o domínio da função pode ser descrito por

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ e } x \neq 1\} = [0, 1) \cup (1, \infty)$$

4. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{para } x \leq 2 \\ -\frac{3}{4}x^2 + 3x, & \text{para } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

- (a) Esboçar o gráfico de f .
- (b) Identificar o valor máximo de $f(x)$ e dizer para qual x esse valor é assumido.

Resolução.

- (a) Primeiramente se observa que o gráfico de f coincide, para $x \leq 2$, com o gráfico da função

$$g(x) = x + 1$$

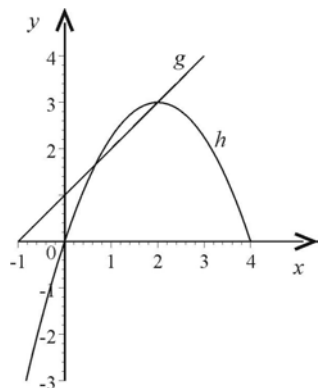
e, para x no intervalo $(2, 4]$, com a parábola

$$h(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x.$$

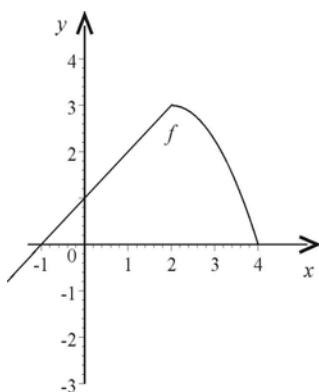
Mas, a fatoração $-\frac{3}{4}x^2 + 3x = -\frac{3}{4}x(x - 4)$ nos diz que esta parábola corta o eixo x nos pontos $x = 0$ e $x = 4$ e que seu vértice (que é o ponto mais alto de seu gráfico, uma vez que tem concavidade para baixo), é o ponto $V = (2, 3)$.

O gráfico a seguir é um esboço dos gráficos das funções g e h , no

intervalo $[-1, 4]$.



o que permite obter o seguinte gráfico para a função f :



(b) O gráfico e as deduções que o precederam nos mostra que o valor máximo de f é 3 e que esse valor é assumido para $x = 2$.

5. Considere $f(x) = 2 + |x - 1|$.

- (a) Encontrar $x_1 \neq x_2$ no domínio de f , tais que $f(x_1) = f(x_2)$.
- (b) Do item (a), o que se conclui a respeito de f ?

Resolução.

1. (a) Como $|r| = |-r|$, para todo número real r , pode-se escolher, por exemplo $x_1 - 1 = 1$, ou, $x_1 = 2$ e $x_2 - 1 = -1$, ou, $x_2 = 0$, por exemplo. Em resumo: $f(2) = f(0) = 3$.
- (b) Do item (a) se conclui que f não é injetora.