

UFPB – CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
6ª LISTA DE EXERCÍCIOS – PERÍODO 2004.2

01. Encontre a primitiva g da função $f(x) = \sqrt[4]{x}$, satisfazendo $g(1) = 2$.

02. Determine a função f que satisfaz $f(1) = 1$ e que, para todo x em seu domínio,

$$f'(x) = xf(x).$$

(**Sugestão:** Qual é a derivada da função $g(x) = \ln(f(x))$?)

03. Sejam f e g sejam funções deriváveis em $\mathbb{R}$ e suponha que $f(0) = 0$ e $g(0) = 1$.

Se, $\forall x \in \mathbb{R}$, tivermos $f'(x) = g(x)$ e $g'(x) = -f(x)$,

a) verifique que $(f(x) - \sin x)^2 + (g(x) - \cos x)^2 = 0$ e, então,

b) conclua que $f(x) = \sin x$ e que $g(x) = \cos x$.

(**Sugestão:** A função $\varphi(x) = (f(x) - \sin x)^2 + (g(x) - \cos x)^2$ é constante?)

04. Para cada uma das funções f abaixo, calcule $\int f(x)dx$.

a) $f(x) = x^3 - 5x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$

c) $f(x) = 2\sin x - \frac{1}{x^5}$

d) $f(x) = (1 + x^2)^2$

e) $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$

f) $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{x}$

g) $f(x) = \sqrt{x+2} + \sec^2 x$

h) $f(x) = \tan^2 x - x\sqrt{1+x^2}$

i) $f(x) = 2^x + e^{x+1}$

j) $f(x) = 2 + x^2 \cos(2x^3)$

k) $f(x) = \frac{x+1}{x}$

l) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

m) $f(x) = \sec^2(4x+2)$

n) $f(x) = \frac{2x^2}{x^3-5}$

o) $f(x) = \sec(2x)\tan(2x)$

p) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}$

q) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

r) $f(x) = \frac{\sin 2x}{1+3\sin^2 x}$

05. Calcule

a) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ (**Sugestão:** Faça a substituição $u = \frac{x}{2}$ e lembre-se da função $\arcsen x$)

06. Determine a função f que satisfaz $f''(x) = x^2 + e^x$, $f'(0) = 1$ e $f(0) = 2$.

07. Encontre a equação da curva que passa pelo ponto $(-3, 0)$ e cuja inclinação da reta tangente, em cada um de seus pontos (x, y) , é dada por $m(x) = 2x + 1$.

08. Considere f uma função contínua e suponha que $a(x)$ e $b(x)$ sejam funções deriváveis. Se

$$\varphi(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt,$$

verifique que $\varphi'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$.

09. Usando o resultado do exercício anterior, calcule $\varphi'(x)$ em cada caso abaixo.

a) $\varphi(x) = \int_1^x \sqrt[3]{1+t^4} dt$

b) $\varphi(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} (\ln t)^5 dt$

c) $\varphi(x) = \int_{x^2-1}^{e^x} \cos(t^2) dt$

10. Em cada caso abaixo, calcule a integral definida da função f , no intervalo I .

a) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0 \\ x^2 - x + 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}; I = [-1, 1].$

b) $f(x) = |x-1|; I = [-2, 2].$

c) $f(x) = |\sin x|; I = [-\pi, \pi].$

d) $f(x) = x + |\cos x|; I = [-\pi, \pi].$

e) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|; I = [-3, 5].$

f) $f(x) = x - |x|; I = [-\pi, \pi].$

11. Calcule a área delimitada

a) pelas curvas $y = x^4$ e $y = x^2$, para $x \in [0, 1]$.

b) pelas curvas $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = x^3$, para $x \in [0, 1]$.

c) pelas curvas $y = -x^2 + 4$ e $y = x^2$.

d) pelo eixo Y e pelas curvas $y = \sin x$ e $y = \cos x$, até o primeiro ponto em que essas se cortam para $x > 0$.

e) pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 2$ e pela parábola $y = x^2$.

f) pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

g) pela curva $y = \sqrt{x}$ e pelas retas $y = x - 2$ e $y = 0$

h) pela curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ e o eixo X .

i) pelas parábolas $y = -x^2 + 6x$ e $y = x^2 - 2x$.

12. Calcule a área da região A , definida por

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \text{ e } x^3 - x \leq y \leq -x^2 + 5x\}.$$

13. Dada a função $f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{x^3}{4}, & \text{para } x < 0 \\ x^2 - x - 2, & \text{para } 0 \leq x < 3 \\ 16 - 4x, & \text{para } x \geq 3 \end{cases}$, calcule $\int_{-2}^5 f(x) dx$ e, também, a área entre o gráfico de f e o eixo X , de $x = -2$ até $x = 5$.

14. Calcule as integrais abaixo e, em cada caso, faça um gráfico da região cuja área as mesmas representam.

a) $\int_0^1 dx$

b) $\int_0^1 2x dx$

c) $\int_{-1}^0 (4 + 3x) dx$

d) $\int_{-5}^{-3} (x + 5) dx + \int_{-3}^0 2 dx + \int_0^4 (2 - \sqrt{x}) dx$

15. Mostre que $\int_0^{2\pi} \sin(kt) dt = 0$, onde k é um inteiro não-nulo.

16. Se f é uma função par, verifique que $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

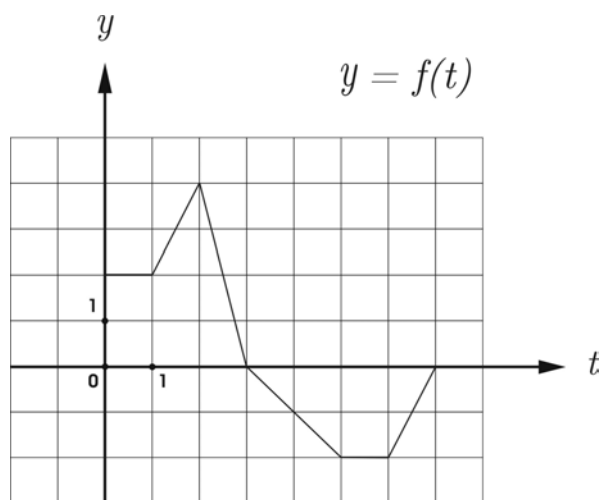
17. Se f é uma função ímpar, verifique que $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

18. Seja $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, onde f é a função cujo gráfico encontra-se esboçado ao lado.

a) Calcule $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ e $g(6)$.

b) Em que intervalo g está crescendo?

c) Quando g atinge seu valor máximo?



19. Quatro pessoas, **A**, **B**, **C** e **D**, calculam o valor de $\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2} dx$ e, ao final, encontram respostas diferentes. **A** diz que a integral vale $\frac{4}{3}$; **B** diz que a integral vale $\frac{2}{3}$; **C** garante que o valor da integral é $\ln(-3)^2 = \ln 9$, já que $\ln(-1)^2 = \ln 1 = 0$ e **D** afirma que o valor da integral é $-\frac{4}{3}$. Quem está com a razão?

20. Analise cada uma das integrais abaixo quanto à convergência.

a) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$

b) $\int_1^5 \frac{dx}{(5-x)^2}$

c) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x+1}$

d) $\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

e) $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$

f) $\int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2} dx$

∫∫∫∫∫

RESPOSTAS

01. $g(x) = \frac{4}{5} \sqrt[4]{x^5} + \frac{6}{5}$ 02. $f(x) = e^{\frac{x^2-1}{2}}$ 06. $f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x + 1$ 07. $y = x^2 + x - 6$

09.

a) $\varphi'(x) = \sqrt[3]{1+x^4}$ b) $\varphi'(x) = \cos x \cdot \ln^5(\sin x) + \sin x \cdot \ln^5(\cos x)$
 c) $\varphi'(x) = e^x \cdot \cos(e^{2x}) - 2x \cdot \cos(x^2 - 1)^2$

10.

a) $\frac{1}{3}$ b) 5 c) 4 d) 4 e) 43 f) $-\pi^2$

11.

a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{16}{3} \sqrt{2}$ d) $\sqrt{2} - 1$ e) $\frac{5}{3}$ f) $\frac{1}{3}$
 g) $\frac{2}{3} (2\sqrt{2} + 5)$ h) 8 i) $\frac{64}{3}$

12. $\frac{16}{3}$

13. A integral vale $\frac{3}{2}$ e a área vale $\frac{73}{6}$

14.

a) 1 b) 1 c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{32}{3}$

18.

a) $g(0) = 0, g(1) = 2, g(2) = 2, g(3) = 7, g(6) = 3$ b) (0, 3) c) $x = 3$

19. Nenhuma das quatro pessoas está com a razão!

20.

a) 4 b) Diverge c) Diverge d) Diverge e) $\frac{1}{2}$ f) 0

$$\iiint \iiint \iiint$$