

UFPB – CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
5ª LISTA DE EXERCÍCIOS – PERÍODO 2004.2

- 01.** Se $f(x) = x + \frac{4}{x}$, encontre o número c que satisfaz a conclusão do Teorema do Valor Médio no intervalo $[1, 8]$.
- 02.** Se $f(x) = |x - 1|$, existe algum número c satisfazendo $3f'(c) = f(3) - f(0)$?
- 03.** A resposta da questão anterior contradiz o Teorema do Valor Médio?
- 04.** Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, mostre que existe $c \in]a, b[$, tal que $f'(c) = 0$.
(**Observação:** O resultado acima é conhecido como **TEOREMA DE ROLLE**)
- 05.** Considere $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Verifique que $f(-1) = f(1)$, mas não existe um número $c \in]-1, 1[$, satisfazendo $f'(c) = 0$. Isso contradiz o Teorema de Rolle ? Por que?
- 06.** Prove que a equação $x^3 + x - 1$ tem exatamente uma raiz real.
(**Sugestão:** Use, inicialmente, o Teorema do Valor Intermediário para garantir a existência de uma raiz real para a equação. A unicidade dessa raiz será então obtida como consequência do Teorema de Rolle, utilizando-se, para tanto, um argumento de contradição).
- 07.** Prove que existe um único número real x , tal que $e^x + x = 0$.
- 08.** Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é diferenciável em (a, b) e $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$, mostre que f é uma função constante.
(**Sugestão:** Tome $x_1, x_2 \in [a, b]$ e aplique o Teorema do Valor Médio à função f no intervalo $[x_1, x_2]$).
- 09.** Mostre que $\arctg x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.
(**Sugestão:** Mostre que a função $f(x) = \arctg x + \operatorname{arccotg} x$ é constante e, então, calcule $f(1)$).
- 10.** Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é diferenciável em (a, b) e $f'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$, mostre que existe uma constante c , tal que, $\forall x \in [a, b]$,
$$f(x) = ce^x.$$

(**Sugestão:** A função $\varphi(x) = f(x)e^{-x}$ é constante ?).
- 11.** Sejam $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e funções contínuas. Se ambas são diferenciáveis em (a, b) e $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in (a, b)$, mostre que essas funções diferem por uma constante, isto é,
$$f(x) = g(x) + c.$$
- 12.** Considere $g(x) = x^4 - 4x + 1$. Encontre a função f que satisfaz $f'(x) = g'(x)$ e $f(1) = 2$.

13. Mostre que $x < e^x$, para qualquer x real.

(**Sugestão:** Se $x \leq 0$, a desigualdade é claramente verdadeira. Se $x > 0$, verifique que a função $f(x) = e^x - x$ é crescente e, então, calcule $f(0)$).

14. Mostre que $\ln x < x$, para todo $x > 0$.

(**Sugestão:** Use o resultado do exercício anterior).

15. a) Decida sobre a existência de máximos e mínimos locais e absolutos para a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

b) Calcule os valores máximo e mínimo de f no intervalo $[-2, 3]$ e determine os pontos nos quais esses valores são assumidos.

16. a) Repita o exercício **15a)**, considerando a função $\varphi(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$.

b) Calcule os valores máximo e mínimo de φ no intervalo $[0, 3]$ e determine os pontos nos quais esses valores são assumidos.

c) Repita o item **b)**, considerando o intervalo $[1/2, 3]$.

d) Repita o item **b)**, considerando o intervalo $[1/2, 5/2]$.

e) Repita o item **b)**, considerando o intervalo $[3/4, 9/4]$.

17. Analise cada uma das funções definidas abaixo com relação à existência de máximos e mínimos locais e absolutos.

a) $f(x) = \sin x + \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$

b) $f(x) = xe^{-x}$

c) $f(x) = 3\cos(2x)$, $x \in [0, \pi]$

d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$

e) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

f) $f(x) = x^2\sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$

18. A função $f(x) = 2 - |1 - x|$, definida para $x \in [0, 2]$, admite algum ponto de mínimo ou de máximo?

19. Determine, se existirem, os pontos de mínimo e de máximo da função $y = 2xe^{2x}$. Analise, ainda, o gráfico dessa função quanto à concavidade.

20. Esboce o gráfico de cada uma das funções definidas abaixo.

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $f(x) = x^4 - 2x^2$

c) $f(x) = x^4 - x^3$

d) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$

e) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

f) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

g) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

h) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 3}$

i) $f(x) = \frac{4x}{x^2 - 9}$

j) $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$

k) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

l) $f(x) = e^{-x^2}$

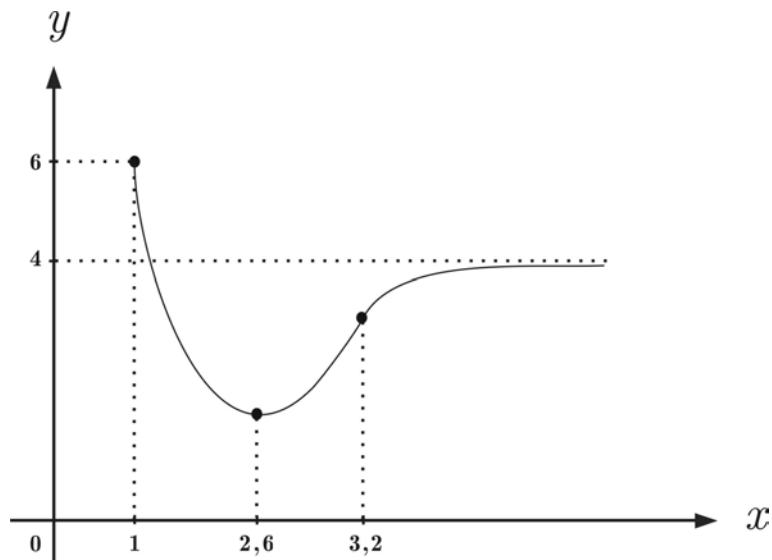
m) $f(x) = \sin x + \cos x$

n) $f(x) = x - \sin x$

o) $f(x) = xe^{-x}$

p) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

21. Suponha que a figura ao lado corresponda ao gráfico de uma função $y = f(x)$.



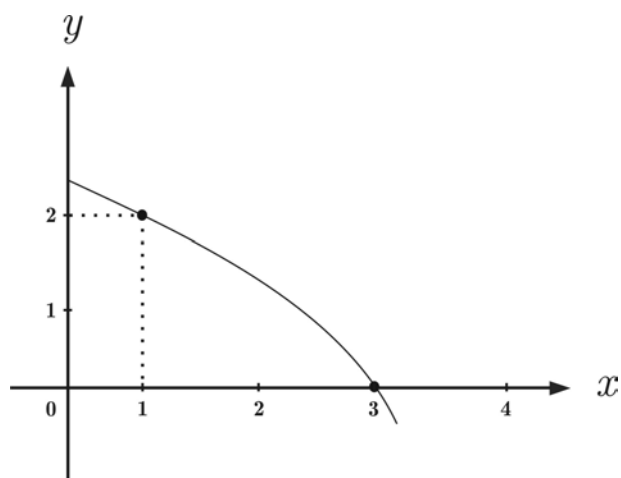
a) Para quais valores de x , f é crescente? E decrescente?

b) Essa função possui pontos de máximo e de mínimo?

c) Essa função possui ponto de inflexão?

c) O que representa, no gráfico, a reta $y = 4$?

22. Suponha que a figura ao lado corresponda ao gráfico de $y = f'(x)$, sendo f' a derivada de uma função f .



a) Qual a inclinação da tangente ao gráfico de f em $x = 1$?

b) Com relação ao crescimento e à concavidade, descreva o gráfico de f no intervalo $[1, 2]$.

c) O gráfico de f possui alguma tangente horizontal?

d) A função f possui algum ponto de máximo ou de mínimo local?

23. Existe algum valor para m , de modo que a função $f(x) = mx - m^2 \ln(1 + x^2)$ tenha $x = 2$ como ponto de mínimo local?

24. Se $a^2 < 3b$, conclua que a função $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ não possui máximo nem mínimo.

25. Qual o número real positivo cuja diferença entre ele e seu quadrado resulta no maior valor possível?

26. Qual ponto da parábola $y = 1 - x^2$ está mais próximo da origem?

(Sugestão: Represente a distância de um ponto à origem pela expressão $f(x, y) = d^2[(x, y), (0, 0)] = x^2 + y^2$).

27. Qual ponto da parábola $y = x^2$ está mais próximo da reta $y = x - 2$?

28. Mostre que de todos os retângulos com o mesmo perímetro p , o de maior área é um quadrado.

(**Sugestão:** Observe que $p = 2x + 2y$ e que $A = xy$).

29. Ache a equação da reta que passa pelo ponto $(3, 2)$ e, no primeiro quadrante, forma com os eixos coordenados um triângulo de área mínima.

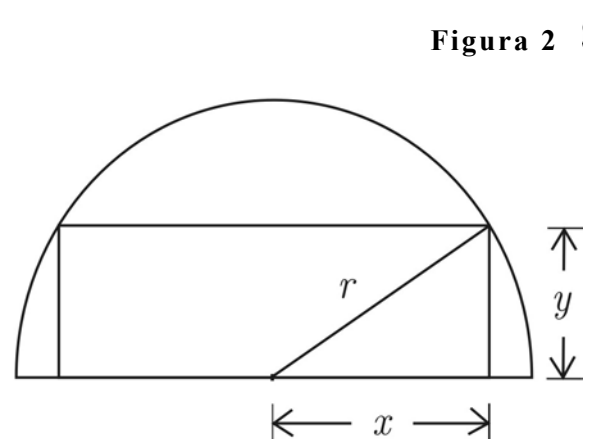
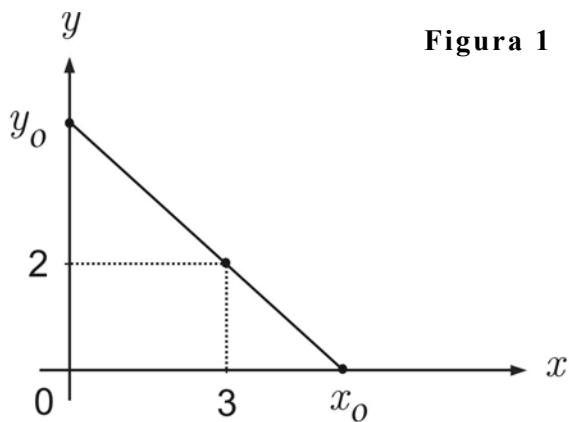
(**Sugestão:** Supondo-se que a equação da reta seja $y = ax + b$, tem-se $3a + b = 2$. Como a área do triângulo vale

$$\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2},$$

vê-se que o problema estará praticamente resolvido quando forem determinados os pontos x_0 e y_0 de acordo com a **Figura 1**, abaixo).

30. Encontre os comprimentos dos lados do retângulo de maior área que pode ser inscrito em um semicírculo de raio unitário, estando a base do retângulo sobre o diâmetro do semicírculo.

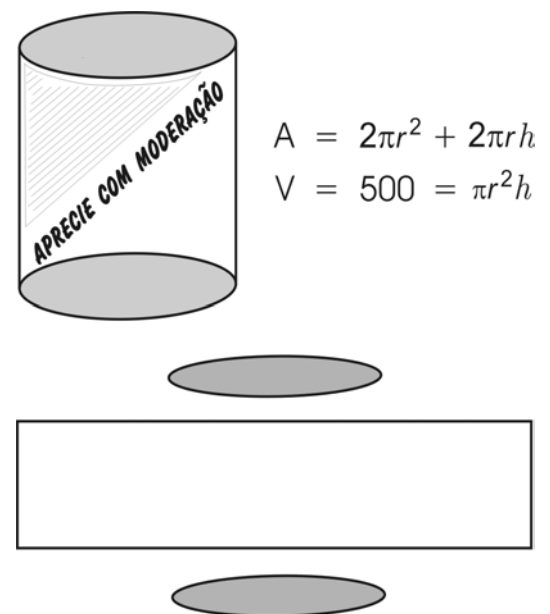
(**Sugestão:** Analise a **Figura 2**, abaixo).



31. Você trabalha em uma indústria de embalagens de metal que acaba de ser a escolhida para fornecer latinhas de cerveja de 500ml para um fabricante multinacional. O gerente da fábrica descobre que você é um funcionário que já estudou cálculo e, por essa razão, lhe procura e pergunta: as dimensões da lata (*altura* e *raio*) podem influir no custo da produção ?

(**Sugestão:** Note que o problema corresponde à minimização da área total da latinha, sabendo-se que seu volume é de 500ml.

Veja a figura ao lado).



32. Uma indústria produz determinado artigo e vende-o com um lucro mensal dado pela expressão $L(q) = -q^3 + 12q^2 + 60q - 4$, onde q representa a quantidade produzida mensalmente.

Qual a produção que maximiza o lucro ? Qual é esse lucro máximo ?

33. Verifique que o gráfico de cada uma das funções definidas abaixo possui pelo menos um tipo de assíntota.

a) $f(x) = x + \ln x$	b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$	c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$
d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$	e) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$	f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
g) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$		h) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Nos exercícios **34** $\rightarrow$ **40**, calcule o limite de $f(x)$ conforme indicado.

34. $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$, $x \mapsto 1$

35. $f(x) = \sqrt{x} \ln x$, $x \mapsto 0_+$

36. $f(x) = x^{1/x}$, $x \mapsto +\infty$

37. $f(x) = (1+x)^{1/x}$, $x \mapsto 0$

38. $f(x) = \left(\frac{x}{x+1} \right)^x$, $x \mapsto +\infty$

39. $f(x) = x^{\sin x}$, $x \mapsto 0_+$

40. $f(x) = (1 - \cos x) \cdot \cotg x$, $x \mapsto 0$

⊕ ⊕ ⊕ ⊕

R E S P O S T A S

01. $c = 2\sqrt{2}$ **02.** Não **03.** Não há contradição: f não é derivável em $]0, 3[$.

05. Não há contradição: f não é derivável em $] -1, 1[$. **12.** $f(x) = x^4 - 4x + 5$.

15.

a) $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$ são, respectivamente, pontos de máximo e de mínimo locais.
Como $x \mapsto \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$, f não possui máximo e mínimo absolutos.

b) $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$ são máximos absolutos, com valor 3; $x_3 = 2$ é ponto de mínimo local, com valor -1 ; $x_4 = -2$ é o mínimo absoluto, com valor -17 .

16.

a) $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ são, respectivamente, pontos de máximo e de mínimo locais.
Como $x \mapsto \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$, f não possui máximo e mínimo absolutos.

b) $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ são, respectivamente, máximo e mínimo locais; $x_3 = 0$ é ponto de mínimo absoluto, com valor 3; $x_4 = 3$ é ponto de máximo absoluto, com valor 12.

16. (continuação)

- c) $x_1 = 1/2$ e $x_2 = 2$ são pontos de mínimo absoluto, com valor 7; $x_3 = 1$ é ponto de máximo local; $x_4 = 3$ é ponto de máximo absoluto, com valor 12.
- d) $x_1 = 1/2$ e $x_2 = 2$ são pontos de mínimo absoluto, com valor 7; $x_3 = 1$ e $x_4 = 5/2$ são pontos de máximo absoluto, com valor 8.
- e) $x_1 = 3/4$ é ponto de mínimo local; $x_2 = 1$ é ponto de máximo absoluto, com valor 8; $x_3 = 2$ é ponto de mínimo absoluto, com valor 7; $x_4 = 9/4$ é ponto de máximo local.

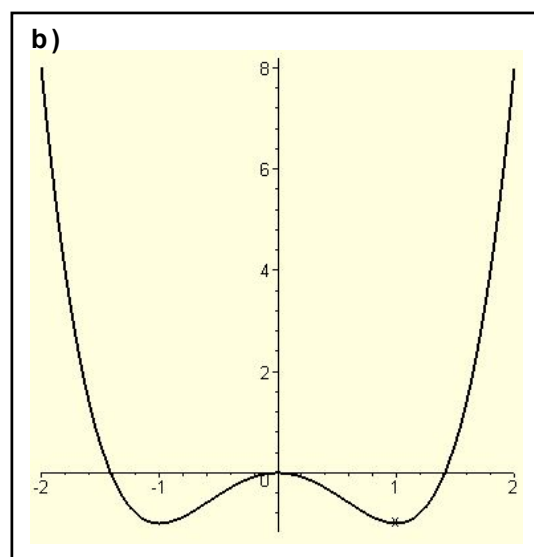
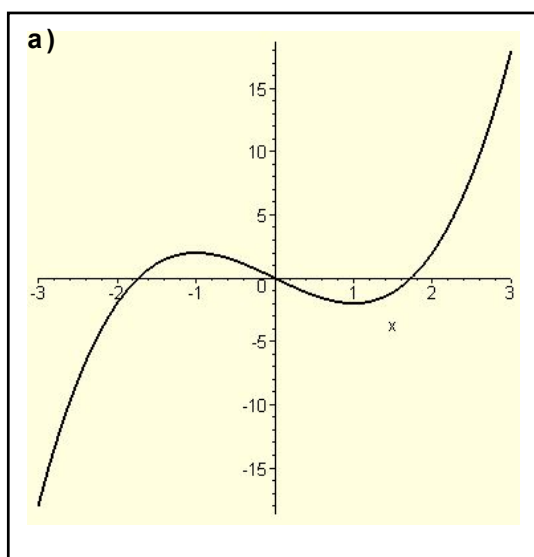
17.

- a) $x_1 = 2\pi$ e $x_2 = 0$ são, respectivamente, máximo e mínimo locais; $x_3 = \pi/4$ é ponto de máximo absoluto, com valor $\sqrt{2}$; $x_4 = 5\pi/4$ é ponto de mínimo absoluto, com valor $-\sqrt{2}$.
- b) $x_1 = 1$ é ponto de máximo absoluto, com valor $1/e$.
Como $x \mapsto -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$ e $x \mapsto +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$, f não possui mínimo.
- c) $x_1 = \pi/2$ é ponto de mínimo absoluto, com valor -3 ; $x_2 = 0$ e $x_3 = \pi$ são pontos de máximo absoluto, com valor 3.
- d) $x_1 = 0$ é ponto de máximo absoluto, com valor 1; $x_2 = -1$ e $x_3 = 1$ são pontos de mínimo absoluto, com valor 0.
- e) $x = 1/\sqrt[3]{2}$ é mínimo local; f não possui máximo e mínimo absolutos.
- f) $x_1 = \sqrt{2/3}$ e $x_2 = -\sqrt{2/3}$ são pontos de máximo absoluto; $x_3 = -1$, $x_4 = 0$ e $x_5 = 1$ são pontos de mínimo absoluto.

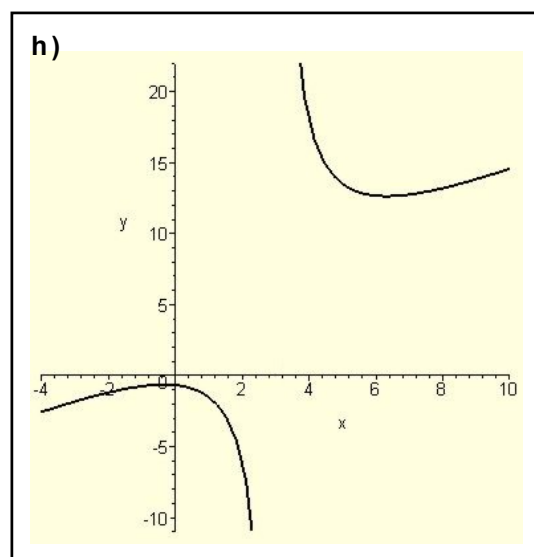
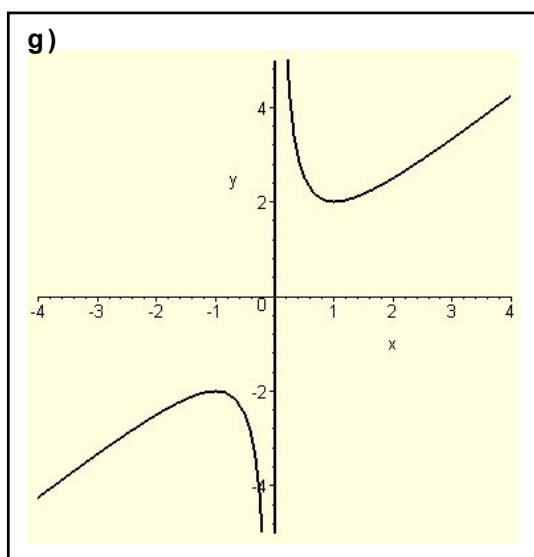
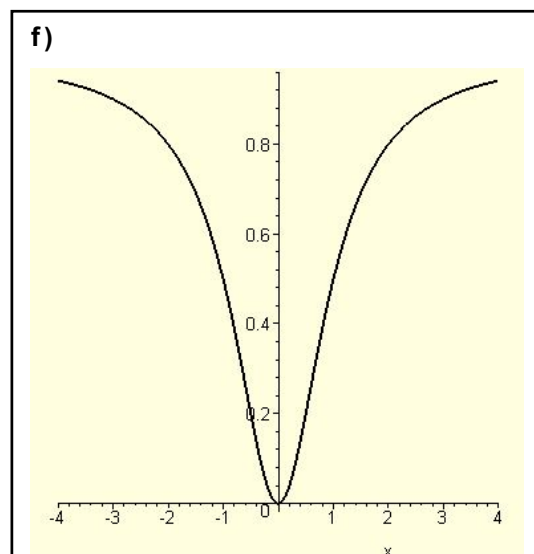
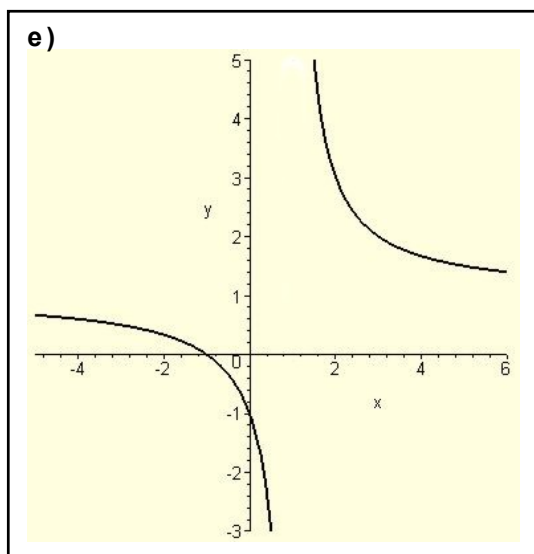
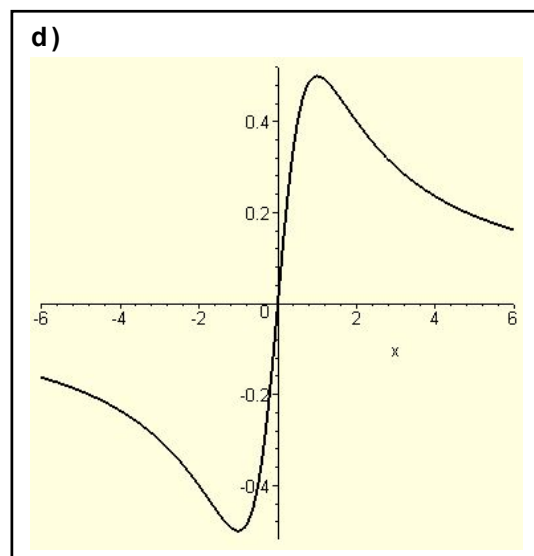
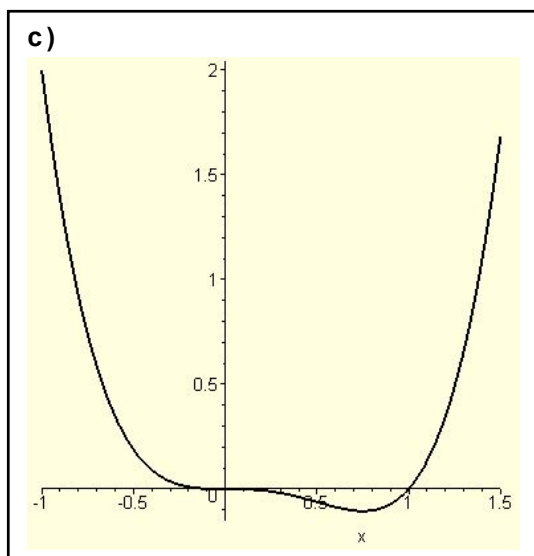
18. $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$ são pontos de mínimo; $x_3 = 1$ é ponto de máximo. Todos são absolutos.

19. $x = -1/2$ é ponto de mínimo local; $x < -1 \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo; $x > -1 \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade voltada para cima.

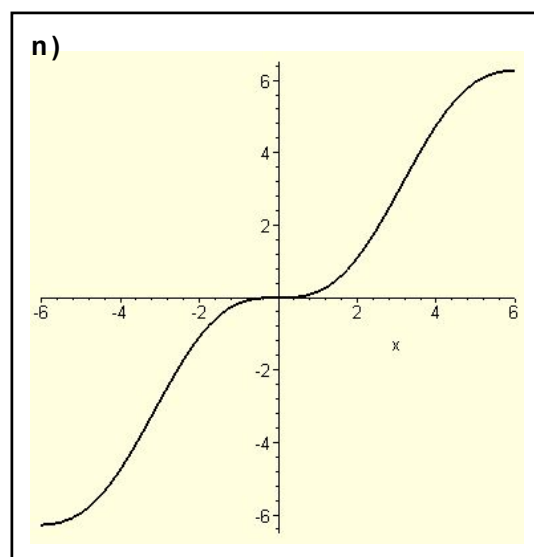
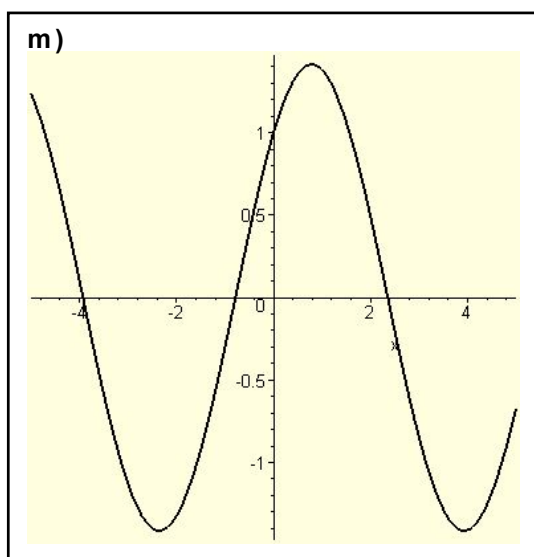
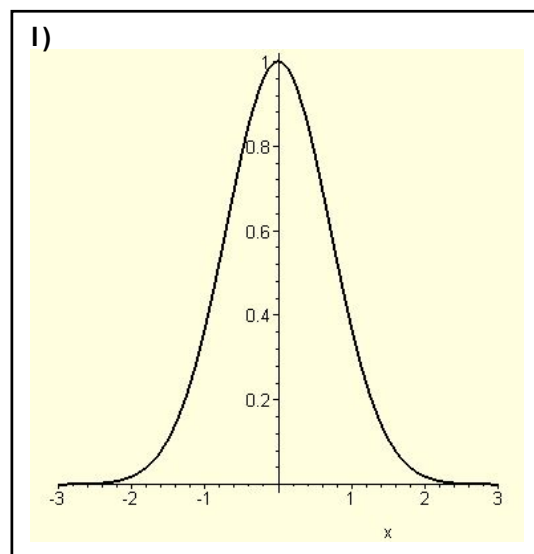
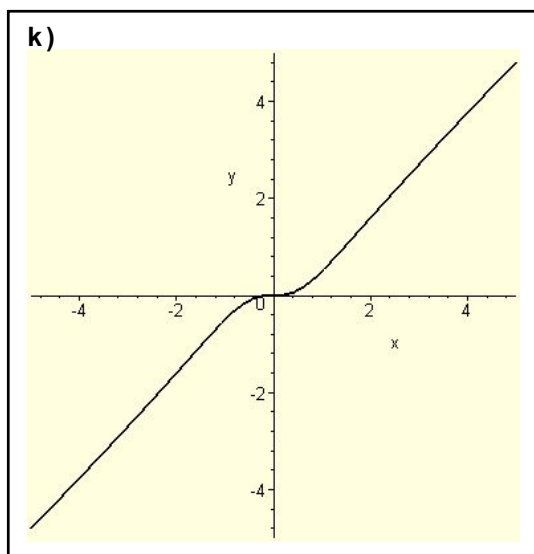
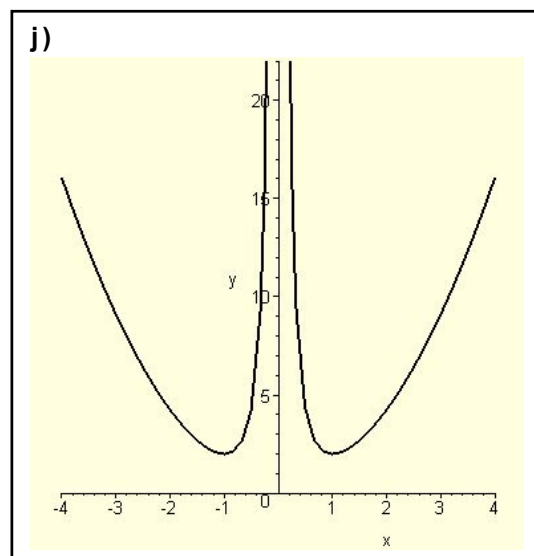
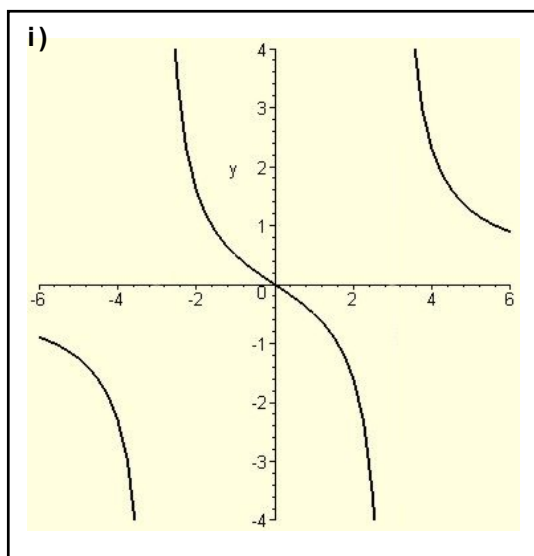
20.



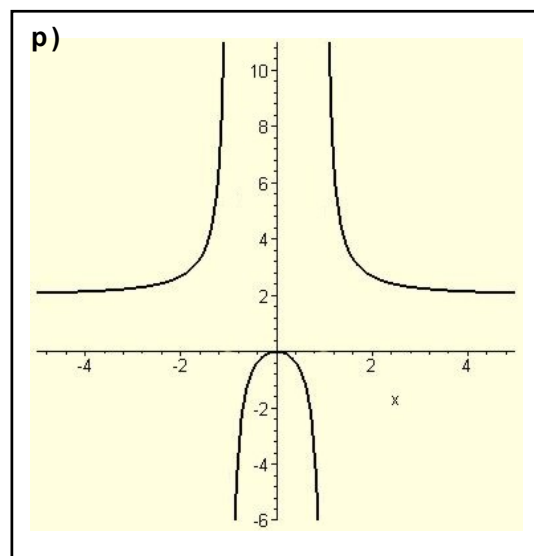
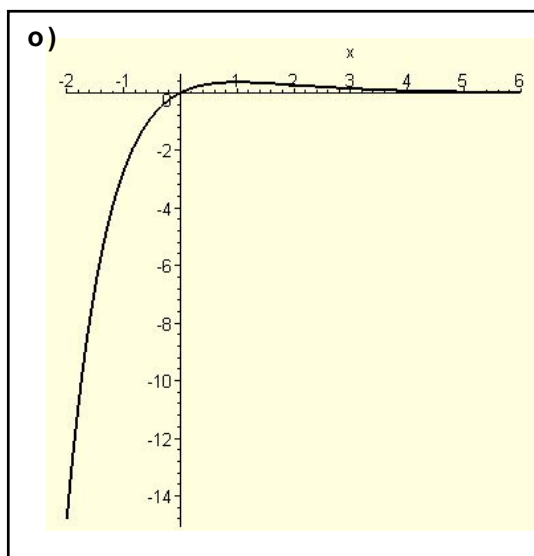
20. (continuação)



20. (continuação)



20. (continuação)



21. a) f decresce para $1 \leq x < 2,6$ e cresce para $x > 2,6$;
 b) f possui mínimo em $x_1 = 2,6$ e máximo em $x_2 = 1$ (ambos são absolutos);
 c) $x = 3,2$ é ponto de inflexão; d) $y = 4$ é assíntota horizontal.
22. a) 2;
 b) Em $[1, 2]$, f' é positiva e decrescente. Logo, f é crescente e seu gráfico possui concavidade voltada para baixo;
 c) Sim, em $x = 3$;
 d) $x = 3$ é máximo local, pois $f' < 0$, para $x > 3$, e $f' > 0$, para $x < 3$.
23. $m = 0$ ou $m = 5/4$. 25. $1/2$ 26. $\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right)$ 27. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$ 29. $y = -\frac{2}{3}x + 4$
30. $\sqrt{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 31. $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$ e $h = 2r$. 32. $q = 10$ e $Lucro_{\text{máx}} = L(10)$
33.
 a) $x = 0$. b) $x = 0$; $y = 0$. c) $x = \pm 2$; $y = 1$. d) $y = x$.
 e) $x = -1$. f) $y = \pm x$. g) $y = 1$ h) $x = \pm 1$; $y = \pm x$.
34. 1 35. 0 36. 1 37. e 38. $1/e$ 39. 1 40. 0