

## Resolução da 1ª Prova de Cálculo I

1. Obter o conjunto solução da inequação

$$|2x - 4| (x^2 + x - 2) \leq 0$$

**Resolução.** Inicialmente observe que, se um dos fatores é zero, então o produto é zero, assim,  $x = 2$  é uma solução, caso contrário temos

$$|2x - 4| (x^2 + x - 2) \leq 0 \iff x^2 + x - 2 \leq 0,$$

uma vez que  $|2x - 4| \geq 0$  para todo valor real de  $x$ . Mas a fatoração

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

nos diz que a inequação inicial é equivalente à

$$(x + 2)(x - 1) \leq 0,$$

o que equivale a  $x + 2 \geq 0$  e  $x - 1 \leq 0$  ou  $x + 2 \leq 0$  e  $x - 1 \geq 0$ . Continuando temos

$$x \geq -2 \text{ e } x \leq 1 \text{ ou } x \leq -2 \text{ e } x \geq 1.$$

Como a segunda sentença é contraditória, concluímos que o conjunto solução é dado por  $-2 \leq x \leq 1$ , ou  $x = 2$ , ou seja, é o conjunto  $[-2, 1] \cup \{2\}$ .

2. Resolver a equação  $|5x - 1| = x^2 + 2x + 1$ .

**Resolução.** Há dois casos a serem considerados:

**1º Caso:**  $5x - 1 \geq 0$  ( $\iff x \geq \frac{1}{5}$ ).

Neste caso, a equação é equivalente à

$$5x - 1 = x^2 + 2x + 1$$

$\iff$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$\iff$

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

e a hipótese deste caso conduz à solução  $\{1, 2\}$ .

**2º Caso:**  $5x - 1 \leq 0$  ( $\iff x \leq \frac{1}{5}$ )

Neste caso, a equação é equivalente à

$$1 - 5x = x^2 + 2x + 1$$

$\iff$

$$x^2 + 7x = 0$$

$\iff$

$$x(x + 7) = 0$$

e a hipótese deste caso conduz à solução  $\{-7, 0\}$ .

Em resumo, temos que o conjunto solução é  $\{-7, 0, 1, 2\}$

3. Determinar o domínio de definição da função

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-1}}$$

**Resolução.**

O numerador da expressão obriga a condição  $x \geq 0$ . Já o denominador obriga a condição  $x \neq 1$ . Assim, o domínio da função pode ser descrito por

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ e } x \neq 1\} = [0, 1) \cup (1, \infty)$$

4. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{para } x \leq 2 \\ -\frac{3}{4}x^2 + 3x, & \text{para } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

- (a) Esboçar o gráfico de  $f$ .
- (b) Identificar o valor máximo de  $f(x)$  e dizer para qual  $x$  esse valor é assumido.

**Resolução.**

- (a) Primeiramente se observa que o gráfico de  $f$  coincide, para  $x \leq 2$ , com o gráfico da função

$$g(x) = x + 1$$

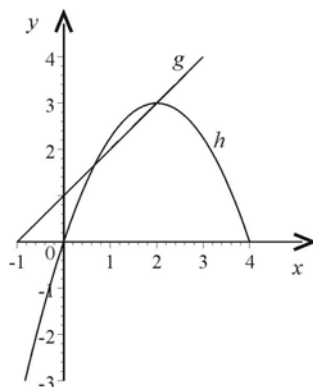
e, para  $x$  no intervalo  $(2, 4]$ , com a parábola

$$h(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x.$$

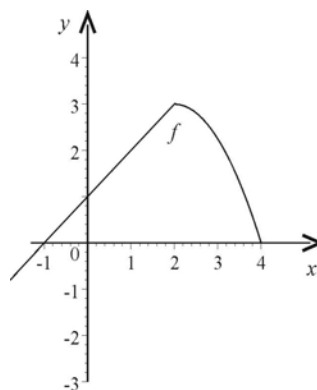
Mas, a fatoração  $-\frac{3}{4}x^2 + 3x = -\frac{3}{4}x(x - 4)$  nos diz que esta parábola corta o eixo  $x$  nos pontos  $x = 0$  e  $x = 4$  e que seu vértice (que é o ponto mais alto de seu gráfico, uma vez que tem concavidade para baixo), é o ponto  $V = (2, 3)$ .

O gráfico a seguir é um esboço dos gráficos das funções  $g$  e  $h$ , no

intervalo  $[-1, 4]$ .



o que permite obter o seguinte gráfico para a função  $f$ :



(b) O gráfico e as deduções que o precederam nos mostra que o valor máximo de  $f$  é 3 e que esse valor é assumido para  $x = 2$ .

5. Considere  $f(x) = 2 + |x - 1|$ .

- (a) Encontrar  $x_1 \neq x_2$  no domínio de  $f$ , tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ .
- (b) Do item (a), o que se conclui a respeito de  $f$ ?

**Resolução.**

- 1. (a) Como  $|r| = |-r|$ , para todo número real  $r$ , pode-se escolher, por exemplo  $x_1 - 1 = 1$ , ou,  $x_1 = 2$  e  $x_2 - 1 = -1$ , ou,  $x_2 = 0$ , por exemplo. Em resumo:  $f(2) = f(0) = 3$ .
- (b) Do item (a) se conclui que  $f$  não é injetora.