V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DE CERTOS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

ERMÍNIA DE LOURDES CAMPELLO FANTI *

1 Introdução

O Geogebra é um software livre e pode ser usado facilmente como uma importante ferramenta para despertar o interesse pela busca do conhecimento Matemático principalmente com alunos dos Ensinos Fundamental e Médio. Possibilita trabalhar de forma dinâmica em todos os níveis da educação básica permitindo a abordagem de diversos conteúdos especialmente os relacionados ao estudo da geometria e funções. Ele foi desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas. Pode ser obtido facilmente em sites de busca ou no endereço www.geogebra.at. O objetivo desse trabalho é introduzir as noções básicas do programa e utilizá-lo no estudo de certos conteúdos matemáticos como polígonos, funções reais, e em especial no estudo das cônicas. São inúmeras as aplicações das cônicas no cotidiano. Devido às suas propriedades físicas e estéticas, os arcos de cônicas surgem freqüentemente em Engenharia e Arquitetura, em pontes, cúpulas, torres e arcos. Além das aplicações relacionadas aos movimentos dos planetas, as cônicas também têm aplicações na tecnologia atual, e tem sido tópico de relevância nos programas de Ensino Médio. Alguns problemas para serem "resolvidos geometricamente" utilizando o software GeoGebra, serão também apresentados.

2 Sobre o GeoGebra: Noções básicas

Como mencionado na introdução, o programa Geogebra foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, professor da Universidade de Salzburg, com o intuito de dinamizar o estudo da Matemática. O GeoGebra pode ser encontrado com facilidade em sites de busca ou em um dos endereços: http://www.baixaki.com.br/download/geogebra.htm http://www.geogebra.org/cms/ ou www.geogebra.at, este último irá redirecionar para o endereço anterior.

Ao acessar selecione, se desejar (e houver essa opção) *Portuguese* (Brazil). Para executar o programa pode ser que seja necessário baixar a máquina virtual Java, que pode ser obtida a partir do site http://www.java.com/getjava/

Vamos então apresentar um pouco da interface do GeoGebra. Obviamente, ao fazer o download, a versão obtida pode estar um pouco diferente da apresentada aqui tendo em vista, em geral, as constantes alterações/atualizações dos softwares.

Ao acessar o programa temos uma janela como a seguinte:

*UNESP-IBILCE, São José do Rio Preto, SP, Brasil, Coordenadora de Projetos sobre Informática e Jogos no Ensino de Matemática, do Núcleo de Ensino e Ciência na UNESP, fanti@ibilce.unesp.br

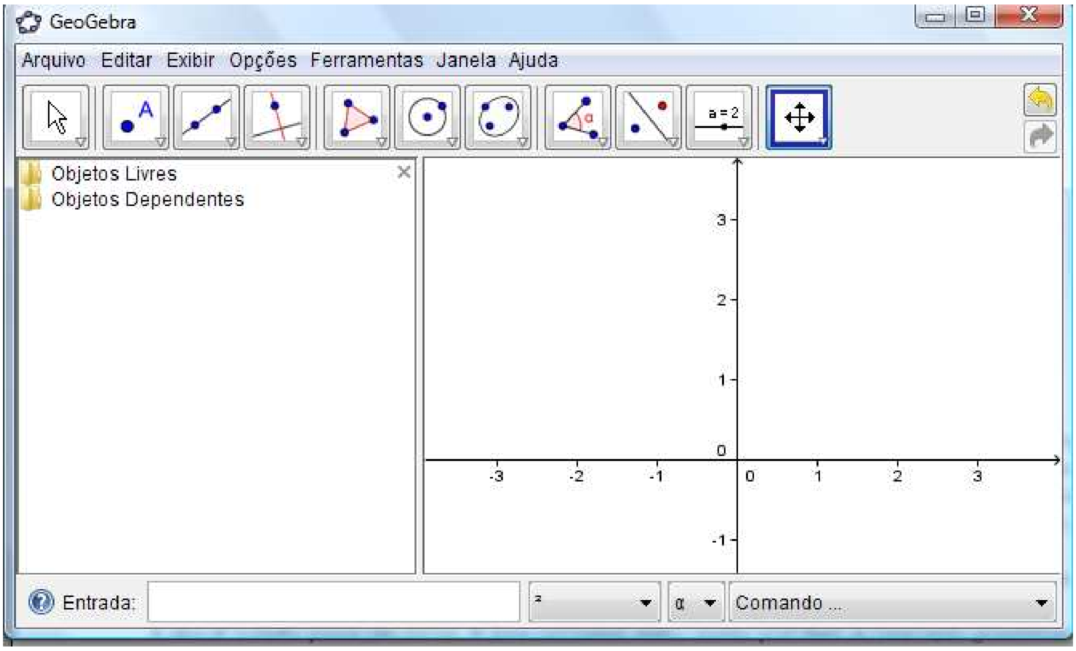


Figura 1 - Tela inicial do GeoGebra

A Interface do software é constituída de uma *janela inicial* (figura acima) que se divide em uma ***área de trabalho*** (à direita - que referiremos também, às vezes, como ***parte/janela geométrica***), uma ***Janela de Álgebra*** (à esquerda, que pode ser fechada se necessário) e um campo de ***Entrada*** (que fica abaixo). O campo de ***Entrada*** é usado para escrever as coordenadas de pontos a serem marcados/representados na tela, equações, comandos e funções (diretamente); e esses objetos serão mostrados na área de trabalho, imediatamente após pressionar a tecla Enter.

Observamos que no Geogebra, ***o sistema decimal*** usa ***ponto*** ao invés de ***vírgula***, assim usa-se, por exemplo, 3.4 (na caixa de entrada) ao invés de 3,4.

A *área de trabalho* possui um sistema de eixos cartesianos onde o usuário pode fazer as construções geométricas (diretamente, com o uso do mouse, ou usando a Entrada) e ao mesmo tempo as coordenadas e equações correspondentes são mostradas na *Janela Algébrica.*

Ao clicar em um dos itens/comandos do menu: ***Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela,*** ou ***Ajuda*** (que tem em geral funções coerentes com o próprio nome) e mantendo o botão do mouse apertado aparecerão sub-comandos que podem ser selecionados para serem aplicados. Por exemplo, se a *Janela de Álgebra* não estiver ativada, para ativá-la basta clicar em ***Exibir***, no menu, e selecionar ***Janela de Álgebra***. Neste mesmo item (***Exibir***) podemos também, ativar/desativar os ***Eixos***, a ***Malha***, além de outras funções:

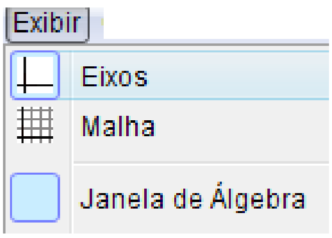


Figura 2 - Explorando o comando Exibir

A barra de ferramentas inicial é composta de 11 ***caixas de ferramentas*** (***ícones***) cada uma delas é indicada por um *quadradinho* com uma figura, e é de fato ***composta de outras ferramentas/ícones*** relacionadas com a função inicialmente descrita na figura:

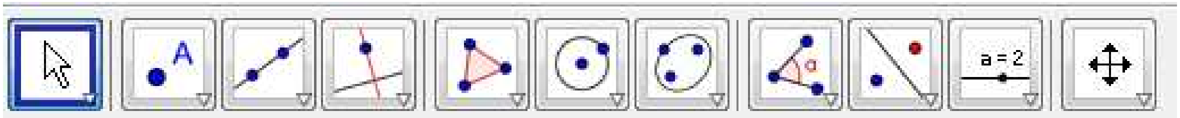


Figura 3 - Barra de ferramentas (inicial)

Para fins didáticos enumeraremos as caixas de ferramentas, da barra inicial, de 01 a 11 (da esquerda para a direita). Para ter acesso a uma das ferramentas (comandos/ ícones) dentro de uma caixa de ferramentas, basta clicar na seta do canto inferior direito de cada caixa de ferramenta/ícone, deslizar o botão do mouse para baixo e selecionar o ícone/ferramenta de interesse. Mostramos abaixo as ferramentas/comandos do ícone ***Polígono*** (caixa de ferramenta $n°$. 5):

Figura 4 - Ícone/caixa de ferramenta Polígono

É interessante observar que ao selecionar uma ferramenta/ícone obtemos no lado direito da Barra de ferramenta inicial a informação de *qual é a função desse ícone, ou como usá-lo*, por exemplo, se selecionamos na penúltima caixa o ícone 

aparecerá a informação: "***Inserir Texto*** *- Clique na área de trabalho ou em um ponto para criar um texto"*, como mostra a figura:

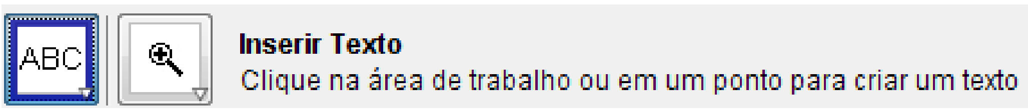


Figura 5 - Detalhes do Ícone Texto

Motivados por essa facilidade, não descreveremos aqui cada uma das ferramentas/ícones, mesmo porque não é nosso objeto fazer um estudo dos comandos/ícones do Geogebra, mas sim utilizá-lo no estudo de certos conteúdos matemáticos como polígonos, funções reais, e cônicas, como já citado no início. Ressaltamos também que em ***Ajuda*** obtemos importantes informações para o estudo/desenvolvimentos de atividades com o GeoGebra.

Figura 6 - Menu: Ajuda

Outro ícone, ainda na penúltima caixa, é o ***Seletor***, que é mostrado na figura seguinte. Esse ícone é muito usado para descrever, por exemplo, uma função que depende de um parâmetro "a", que pode variar num certo intervalo. Mais especificamente, após representar na área de trabalho um *Seletor*, nomeado suponhamos de "a" (com as especificações/intervalos desejados), podemos definir, por exemplo, na *Entrada*, a função $y = a * x + 2$, ou o ponto

$(a, 0)$, e conforme movimentamos o *Seletor* "a"(selecionando primeiramente *Mover* na 1^a caixa e movimentando em seguida o ponto do seletor com o mouse), os objetos também se movimentam, de acordo com o intervalo selecionado (para "a" variar).

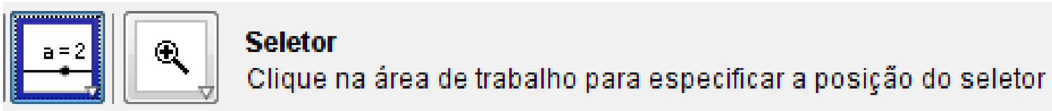


Figura 7 - Ícone Seletor

Para ***mudar a cor*** e/ou ***espessura de um objeto***: Clique sobre o objeto com o botão direito do mouse, a seguir clique em ***Propriedades*** e em ***Cor*** para mudar sua cor, e em ***Estilo*** (selecionado a seguir o nível de espessura) para mudar a espessura do objeto:

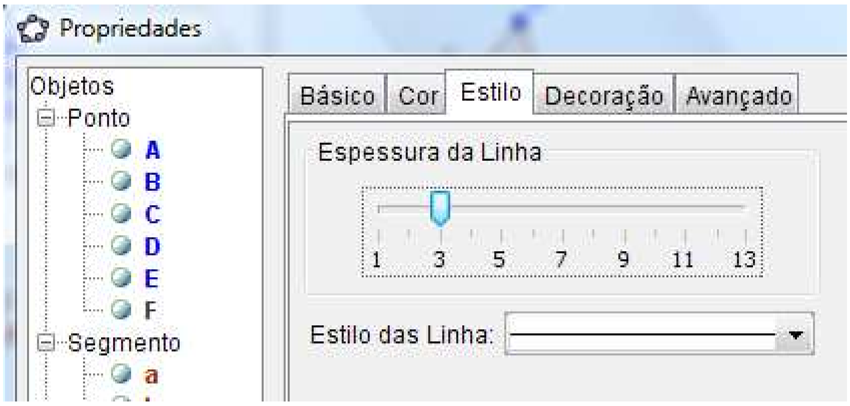


Figura 8 - Sobre Cor e Espessura

Observamos que essa janela também é obtida no menu - *Editar* - *Propriedades*).

Podemos ***adequar a área de trabalho para melhor visualização*** de uma construção/figura apresentada, usando a ferramenta ***Zoom***. Para isso clique na tela (na parte geométrica) com o botão do mouse direito e aparecerá uma tela como a da Figura 9, selecione então a melhor aproximação.

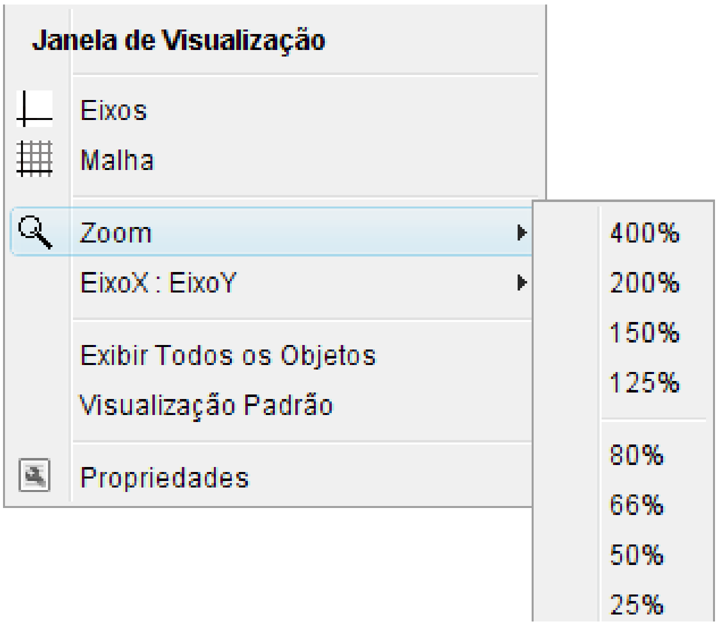


Figura 9 - Janela de Visualização - Ferramenta Zoom

Às vezes, para melhor visualização da *área de trabalho* (*parte geométrica*) é interessante também *deslocar os eixos*, para tanto devemos selecionar ***Deslocar Eixos*** na última caixa de ferramentas e depois clicar na área de trabalho e, mantendo o botão esquerdo do mouse apertado, deslocamos "a tela/área de trabalho" de modo conveniente.

Observamos que grande parte dos elementos/representações geométricas com o Geogebra como, por exemplo, pontos, retas, polígonos, podem ser obtidos sem usar a *Entrada Álgébrica*, basta selecionar o ícone adequado, na barra de ferramentas de acesso rápido e em seguida clicar na parte geométrica da janela inicial do GeoGebra, que facilmente o elemento desejado será representado.

Para representar o gráfico das funções, e em geral, em atividades de Geometria Analítica Plana, necessitamos de um sistema cartesiano ortogonal. Para obter isso procedemos do seguinte modo (já mencionado antes):
Para ***obter os eixos***: Clique em ***Exibir*** no menu e logo depois em ***Eixos***.
Para ***obter a malha ou grade***: clique novamente em ***Exibir*** e selecione agora ***Malha***. Na tela, na parte geométrica, irá aparecer uma grade como mostra a figura (com distância de 1 cm entre os seus pontos consecutivos alinhados - *que pode ser alterada se usamos a ferramenta Zoom*):

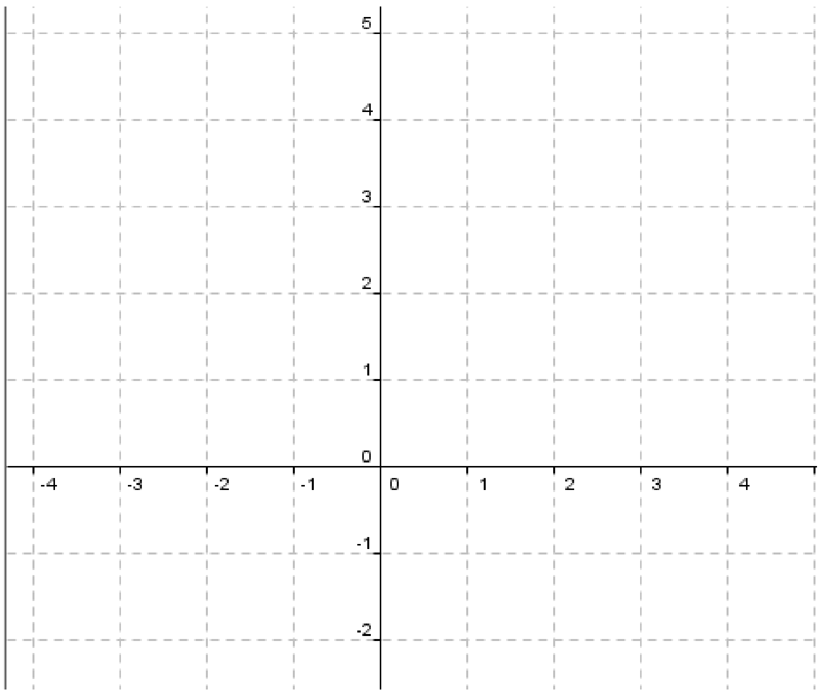


Figura 10 - Eixos e Malha

3 Atividades

Descrevemos a seguir algumas atividades envolvendo *polígonos, funções reais* (incluindo *retas*, uma vez que o gráfico de funções afins são retas), e *cônicas* incluindo, obviamente, *circunferências.*

3.1 Polígonos

Atividade 1: Represente um triângulo qualquer e um triângulo eqüilátero.
Para representar o triângulo qualquer basta selecionar o ícone ***Polígono*** (na caixa n^o5) e clicar em três pontos na tela (não colineares). Para obtermos um triângulo equilátero selecionamos o ícone ***Polígono Regular*** e ao dar o 2° clique na tela (2° ponto) aparecerá uma pequena caixa na qual temos que digitar o número de vértices do

polígono (que no caso é 3).

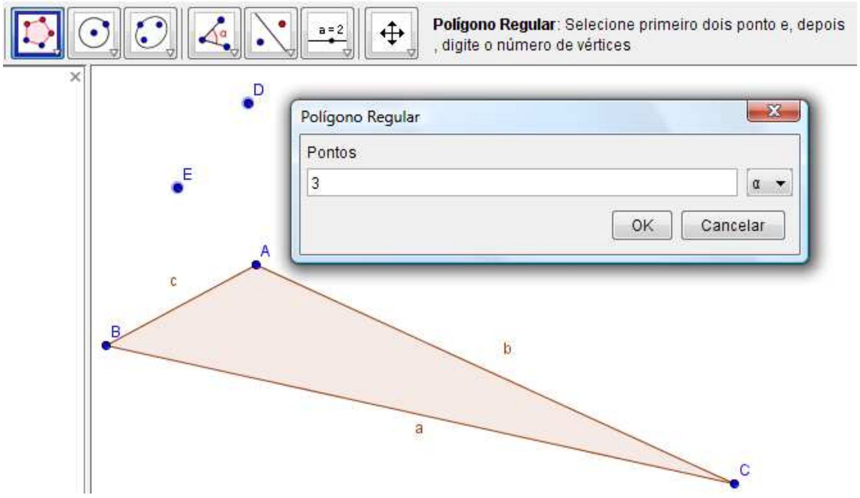
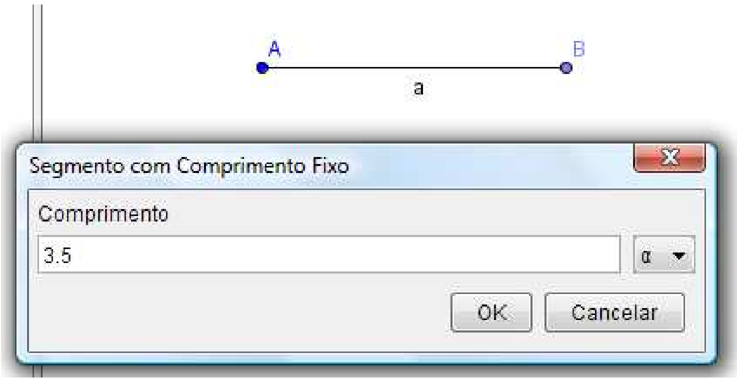


Figura 11 - Construindo Triângulos

Atividade 2. Represente um quadrado de lados $3,5cm$. Obviamente existem outras formas de construção, sugerimos aqui uma: Selecione o ícone ***Segmento com Comprimento Fixo*** (na caixa 3) e em seguida digite, na caixa que irá aparece, o valor 3.5 (lembre-se que no sistema decimal do GeoGebra usa-se ponto e não vírgula). Em seguida, um segmento com a medida desejada será apresentado. Agora basta proceder como na construção do equilátero, escolhendo os extremos do segmento como sendo os dois vértices iniciais do quadrado e digitando então 4 como o número de vértices.



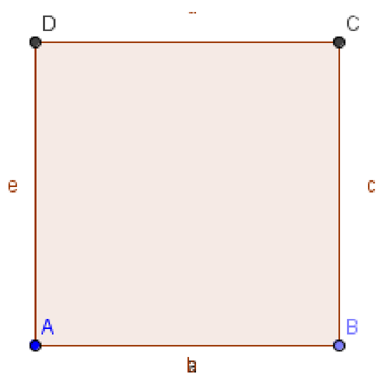


Figura 12- Obtendo um quadrado de lado $3,5$ cm

Exercício: Represente um ***pentágono regular*** que tem $(1,2)$ e $(-1,0)$ como vértices, e o ponto $(-1,3)$ seja um ponto pertencente a região interior do polígono. (*Sugestão*: use *Eixos e Malha, Polígono Regular, marque os pontos* $(-1,0)$, $(1,2)$, *nessa ordem, e use 5 pontos*). Note que se iniciamos a representação do polígono com o ponto $(1,2)$ podemos usar o ícone *Reflexão* (do polígono) *com relação a uma reta* (isto é a reta que contem os dois pontos) para obter o pentágono nas condições desejadas.

3.2 Funções reais (Funções afim, quadráticas e trigonométricas)

Sabemos que o gráfico de uma função real f é um subconjunto do plano cartesiano formado pelos pares ordenados (x, y) onde $y = f(x)$. Em geral, para esboçarmos o gráfico de uma função no plano cartesiano, devemos atribuir valores a variável x, determinando valores numéricos de y. O GeoGebra nos permite construir construir o gráfico de várias funções. Como já observamos, a *Entrada* algébrica fica na parte inferior da tela.

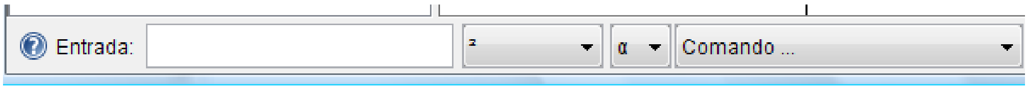


Figura 13 - Entrada

Algumas informações úteis no estudo das funções:
(1) O sinal para indicar a multiplicação na caixa de Entrada tem que ser representado por $*$ (exemplo: xy deve ser representado por x^*y);
(2) para elevar a uma potência, antes do valor da mesma, devemos colocar $\wedge$ (exemplo: $x \wedge k$ significa x^k e $y = a * x \wedge 2 + b * x + c = ax^2 + bx + c$);
(3) para $sen(x)$, use $sin(x)$; para a função tangente use $tan(x)$; para módulo de x, $|x|$, use abs(x), e para $\sqrt{x}$ use $sqrt(x)$.

Atividade 1. Represente o gráfico da função afim: $f(x) = 2x + 4$. Basta ***Exibir - Eixos e Malha***, e digitar $y = 2x + 4$ na ***Entrada*** (algébrica).

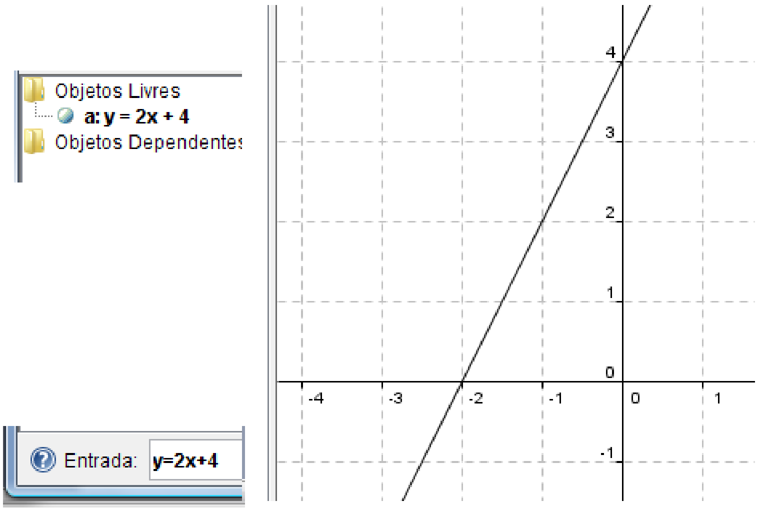


Figura 14 - Gráfico da função $f(x) = 2x + 4$.

Tendo em vista que neste caso o gráfico da função é uma reta, o mesmo pode ser obtido, então, por marcar dois pontos pertencentes ao gráfico (reta) usando o ícone ***Novo Ponto*** na caixa n^o2. No caso podemos tomar, por exemplo, os pontos $(-2, 0)$ e $(0, 4)$), e usar o ícone ***Reta Definida por Dois Pontos*** na caixa n^o3.

Exercícios: **1)**Represente o gráfico da função real (bijetora) $f(x) = 2x + 3$. Calcule a função inversa $f^{-1}(x)$ e represente seu gráfico. Represente o gráfico da função identidade $y = x$. Que relação existe entre os gráficos de $f(x)$ e sua inversa $f^{-1}(x)$? Note que o gráfico de $f^{-1}(x)$ pode ser obtido do gráfico de $f(x)$ utilizando *Reflexão em relação a reta* $y = x$ (caixa n^o 9).
2) Represente o gráfico da função $f(x) = -x + 1$. Clique com o botão direito do mouse sobre o gráfico obtido, e selecione ***Habitar Rastro***. Em seguida selecione *Mover* (caixa n^o1), clique na reta (gráfico) e a arraste com o botão do mouse apertado. Observe os "dados" algébricos (na janela de Álgebra).
3) Selecione ***Seletor*** (caixa n^o 10), clique na tela (pode usar o intervalo de variação de -5 a 5) e selecione aplicar, irá obter um *seletor* a. Repita para obter um outro *seletor* b. Na entrada digite $y = a * x + b$ (as letras deverão estar de acordo com os nomes dos seletores). Selecione *Mover* (caixa n^o1) e movimente como mouse o ponto do seletor a. Repita depois com o ponto do seletor b. Interprete os gráficos obtidos e analise os "dados" algébricos.

Atividade 2. Represente o gráfico da função quadrática: $f(x) = x^2 - 2x - 3 = x \wedge 2 - 2x - 3$.

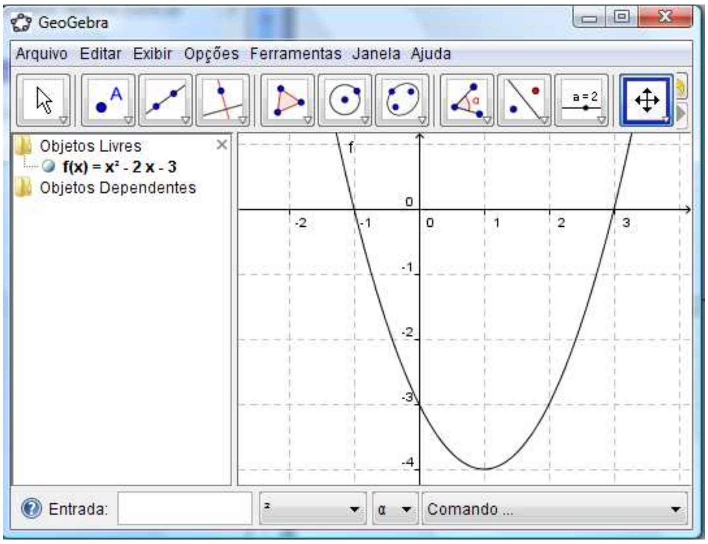


Figura 15 - Gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Quais são os zeros dessa função? Qual é o vértice da parábola (gráfico da função)?

Atividade 3. Represente geometricamente os gráficos das funções $f(x) = sen(x)$ $(= sin(x))$, $g(x) = 2sen(x)$ e $h(x) = 2 + sen(x))$.

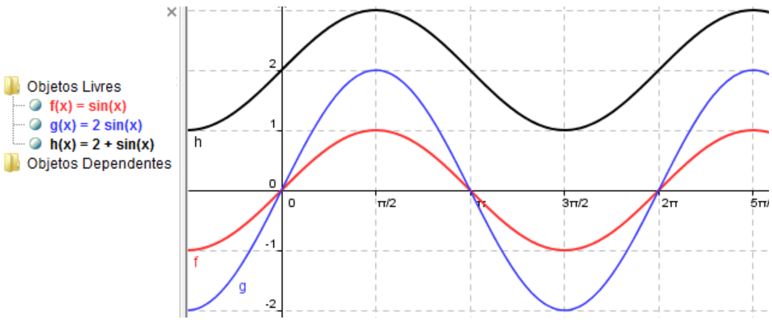


Figura 16 - Gráfico das funções $f(x) = sen(x)$, $g(x) = 2sen(x)$ e $h(x) = 2 + sen(x)$

Observação: Para obter no eixo x a unidade em radianos, por exemplo em múltiplos de π ou $\pi/2$, ir no menu ***Opções***, selecionar ***Janela de Visualização*** (para Eixo X) e escolher em ***Unidade***, π. A seguir selecionar ***Distância*** e escolher π ou $\pi/2$ (com o *Números* também selecionado).

Atividade 4. Represente os gráficos das funções $y = cos(x)$ e $y = cos(2x)$.

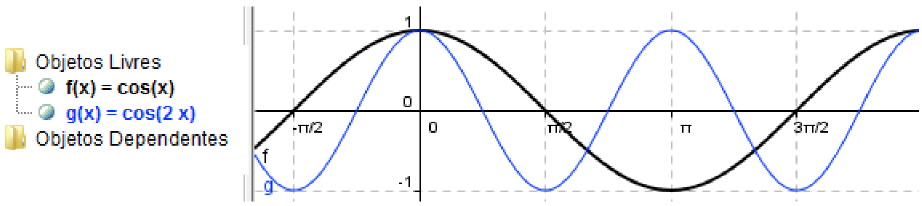


Figura 17 - Gráfico das funções $f(x) = cos(x)$ e $g(x) = cos(2x)$

3.3 Cônicas

Apresentamos uma breve introdução ao estudo das cônicas - incluindo o Teorema de Classificação e alguns exemplos. O leitor interessado poderá ver mais detalhes em Boulos e Camargo [2], cap. 23.

Lugares geométricos: Denominamos *lugar geométrico* a um conjunto de pontos tais que todos eles e só eles possuem uma dada propriedade.

Elipse: A ***elipse*** é o lugar geométrico dos pontos de um plano para os quais a soma das distâncias a dois pontos fixos distintos F_1 e F_2 é uma constante $2a$ (maior que a distância entre os dois pontos fixos). Mais precisamente, consideremos um plano π e dois pontos F_1 e F_2 (de π) tais que $d(F_1, F_2) = 2c > 0$. Seja $a > c$. Ao conjunto de pontos $P \in \pi$ tais que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \qquad \mathbf{(1)}$$

dá - se o nome de ***elipse***. Os pontos F_1 e F_2 são denominados *focos* da elipse.

Equação reduzida : Tomando um sistema ortogonal, considerando os focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ (isto é, sobre o eixo OX), $P = (x, y)$ e considerando $b = \sqrt{a^2 - b^2}$, deduz-se, da igualdade **(1)**, a equação na forma reduzida:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (*).$$

$A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$, $B_2 = (0, b)$ são chamados *vértices*, o segmento A_1A_2 *eixo maior* (é o segmento de comprimento $2a$ e contém os focos) e B_1B_2 *eixo menor* ($B_1B_2 \perp A_1A_2$ no seu ponto médio).

Observação: 1) Se adotamos um sistema ortogonal em que F_1 e F_2 estão no eixo OY, então **(1)** fornecerá, de modo análogo, a seguinte equação reduzida:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ com } \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Por exemplo, a elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ tem focos no eixo OY, e a elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ tem focos no eixo OX.

2) Quando $a = b$, a elipse (centrada - equação reduzida $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$) nada mais é do que a ***circunferência*** de centro na origem e raio a : $x^2 + y^2 = a^2$.

Hipérbole: Consideremos num plano π dois pontos F_1 e F_2 (chamados *focos*), distantes $2c > 0$ entre si. Seja $0 < a < c$. Ao conjunto dos pontos $P \in \pi$ tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a,$$

se dá o nome de ***hipérbole***.

Equação reduzida: Tomando um sistema ortogonal e supondo que $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, isto é estão sobre o eixo dos x, como no caso da elipse, obtém-se que $P = (x, y)$ está na hipérbole se e somente se $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$.

Considerando $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ temos $0 < b < c$ e $c^2 = a^2 + b^2$. A equação na forma reduzida fica assim :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (**).$$

As retas $r : y = \dfrac{b}{a}\, x$ e $s : y = -\dfrac{b}{a}\, x$ são denominadas *assíntotas* da hipérbole. As assíntotas são retas das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os pontos se afastam dos focos. $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$ são chamados *vértices*, $2c$ a *distância focal*, o segmento A_1A_2 *eixo transverso*, o segmento B_1B_2 (onde $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$) *eixo conjugado*, F_1F_2 *segmento focal*, O o *centro* (ponto médio do segmento focal).

Observação: Se adotarmos um sistema ortogonal em que F_1 e F_2 estão no eixo OY, obteremos a equação reduzida da forma $-\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ onde $(b = \sqrt{c^2 - a^2})$; $r : y = \dfrac{a}{b}\, x$ e $s : y = -\dfrac{a}{b}\, x$ são, neste caso, as *assíntotas* da hipérbole.

Exemplo: $x^2-y^2=2$ representa uma hipérbole com focos em OX, e $-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{100}=1$ representa uma hipérbole com focos em OY.

Parábola: Consideremos num plano π um ponto F e uma reta r, tal que F não pertence a r (elementos fixos). A ***parábola*** é o lugar geométrico dos pontos de π equidistantes de F e r, isto é, o conjunto dos pontos P do plano que satisfazem

$$d(P,F)=d(P,r).$$

O ponto F chama-se *foco* e a reta r chama-se *reta diretriz.* Chamamos *parâmetro* da parábola, e representamos por $2p$, a distância entre o foco F e a reta r.

Equação reduzida: Tomemos um sistema ortogonal OXY e suponhamos que F esteja sobre o eixo OX, que r seja paralela ao eixo OY, que a origem O seja o ponto médio de HF, onde H é a projeção ortogonal de F sobre r (ou seja, a origem O é o "vértice"da parábola) e que F esteja à direita de r. Daí, como $2p=d(F,r)$ temos, nesse caso, que $F=(p,0)$ e $r: x=-p$. Então $x+p=0$. Logo, $P=(x,y)$ está na parábola se e somente se $d(P,F)=d(P,r)$, isto é, $\sqrt{(x-p)^2+y^2}=\dfrac{|x+p|}{\sqrt{1^2+0^2}}$ que é equivalente (elevando ao quadrado e simplificando), a:

$$y^2=4px \qquad (***)$$

Observação: São também equações reduzidas da parábola:
$y^2=-4px$, (quando $F=(-p,0)$ e $r: x=p$, i.é, $V=O$, F pertence ao eixo OX e está a esquerda de r),
$y=\dfrac{1}{4p}x^2$, (quando $F=(0,p)$ e $r: y=-p$, i.é, $V=O$, F pertence ao eixo OU e está acima de r) e
$y=-\dfrac{1}{4p}x^2$, (quando $F=(0,-p)$ e $r: y=p$, i.é, $V=O$, F pertence ao eixo OY e está abaixo de r).

Definição (*caso geral*): Chama-se ***Cônica*** ao conjunto dos pontos $P=(x,y)$ em E^2, onde E^2 denota o plano euclidiano, tais que: $g(x,y)=Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$, sendo A,B,C,D,E,F números reais com $A^2+B^2+C^2>0$.

Exemplos de cônicas:
1- O conjunto vazio: $g(x,y)=x^2+y^2+1=0$.
2- Um ponto: $g(x,y)=x^2+y^2=0$.
3- Uma reta: $g(x,y)=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=0$.
4- Reunião de duas retas paralelas: $g(x,y)=(x+y)(x+y+1)=x^2+2xy+y^2+x+y=0$.
5- Reunião de duas retas concorrentes: $g(x,y)=(x+y)(x-y)=x^2-y^2=0$.
6- Elipse: $g(x,y)=x^2+2y^2-1=0$.
7- Hipérbole: $g(x,y)=x^2-y^2-1=0$.
8- Parábola: $g(x,y)=x-y^2=0$.
9- Circunferência: $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$.

De fato, estes são todos os tipos possíveis de cônicas, mais precisamente, tem-se:

Proposição: Fixemos um sistema ortogonal de coordenadas $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ em E^2. Seja Ω um subconjunto de E^2. Então Ω é uma cônica se e somente se Ω é de um dos tipos listados acima (Boulos e Camargo [2], Apêndice C).

Trabalhando com o GeoGebra:

Atividade 1: Representar geometricamente as cônicas dadas pelas equações:

(a) reduzida: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, **(b)** $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$.

(a)

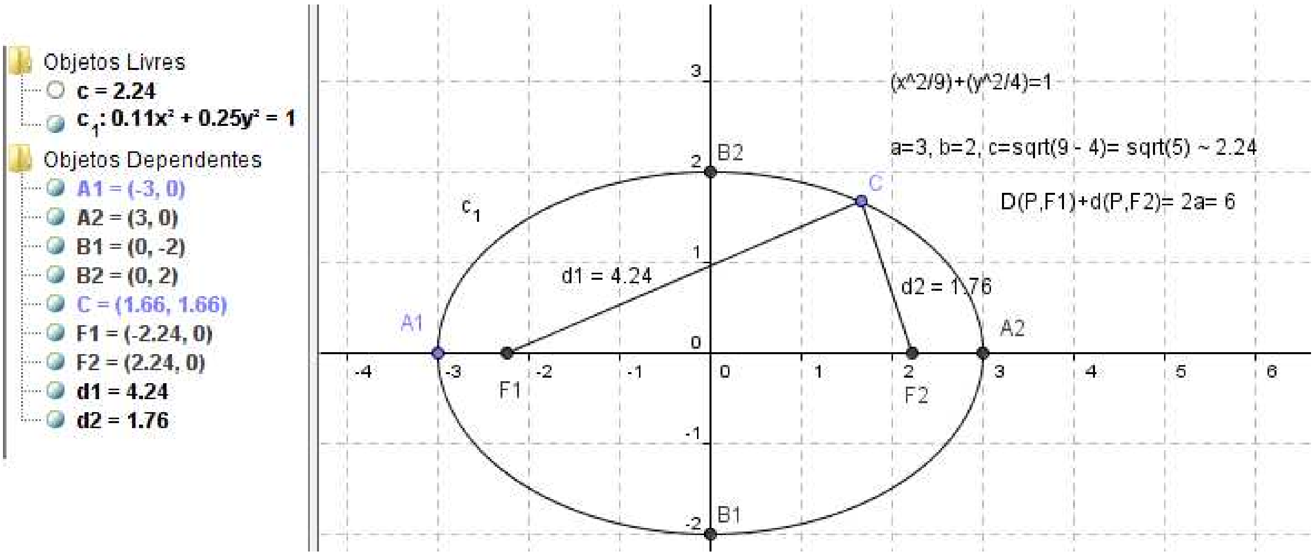


Figura 18 - Elipse (dada por equação reduzida)

Para representar podemos usar a ***Entrada*** *Algébrica* e digitar $(x \wedge 2/9) + (y \wedge 2/4) = 1$ ou, conhecendo os *focos e um ponto* da elipse, podemos usar o ícone/ferramenta ***Elipse*** (na caixa $n^o 7$) para obter a sua representação geométrica. No caso os focos são $F_1 = (-\sqrt{5}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{5}, 0)$, e tomamos como ponto da elipse o vértice $B_2 = (0, 2)$. ***Para representar os focos***, entre na *Entrada Algébrica* com os pontos (-sqrt(5),0) e depois (sqrt(5),0).

Para ***renomear os pontos*** (ou ***objetos***) clique com o botão do mouse direito na letra/nomenclatura existente, selecione ***Renomear*** na caixa que irá abrir e em seguida ***digite o novo nome/letra*** desejada.

Os ***focos*** (***vértices***) podem ser ainda obtidos digitando no campo da ***Entrada*** (algébrica) **Foco**[**c**] (ou **Vértice**[**c**]), onde **c** é a letra que indica/nomea a elipse na tela de trabalho. Podemos em seguida explorar a propriedade da elipse, como lugar geométrico.

(b): Representando a elipse e explorando a propriedade de "Translação"

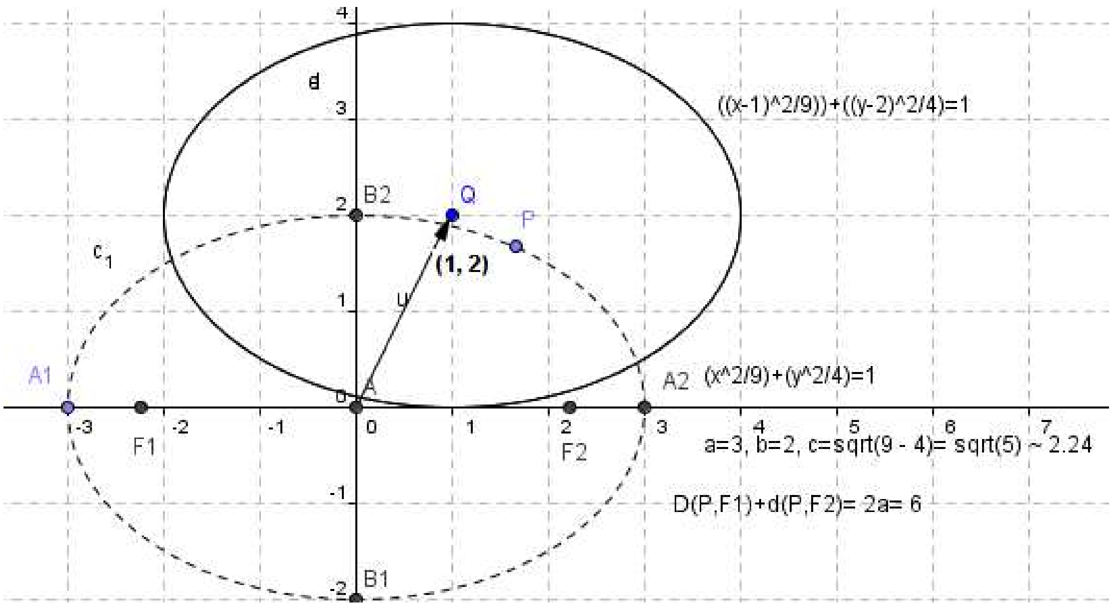


Figura 19 - Elipse (transladada)

Atividade 2: Representar geometricamente as cônicas dadas pelas equações:

(a) reduzida: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = (\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2}) = 1$, **(b)** $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$.

(a): $4 = b^2 = c^2 - a^2 = c^2 - 9 \Rightarrow c^2 = 9 + 4 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13} \sim 3.61$

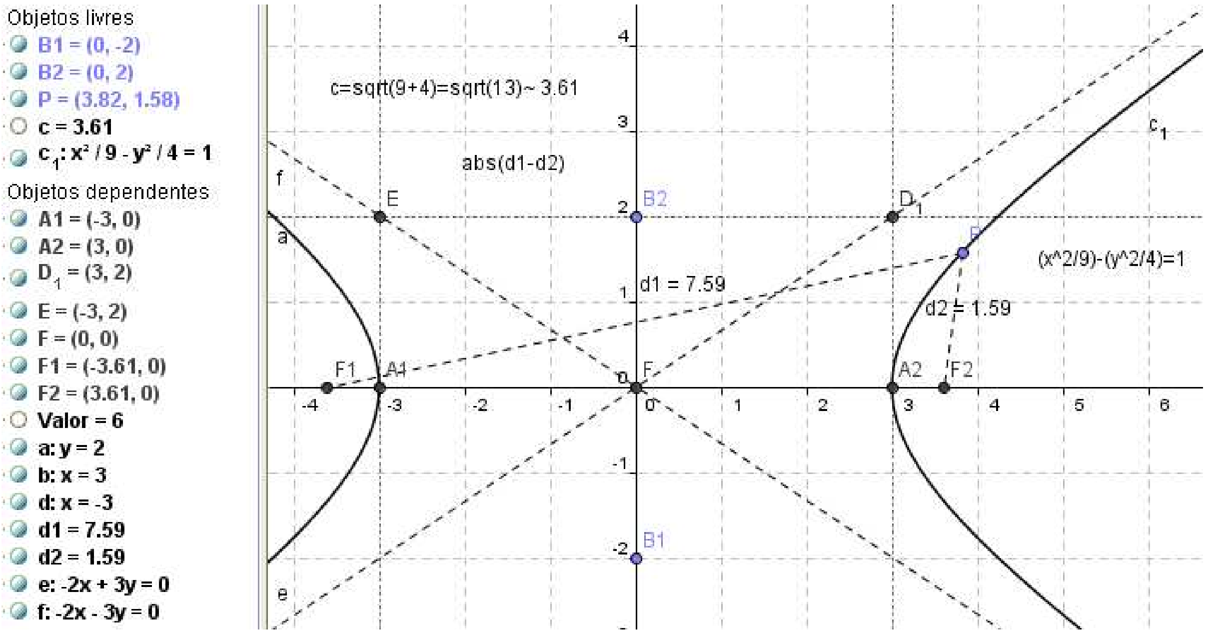


Figura 20 - Hipérbole (dada por equação reduzida)

(b):

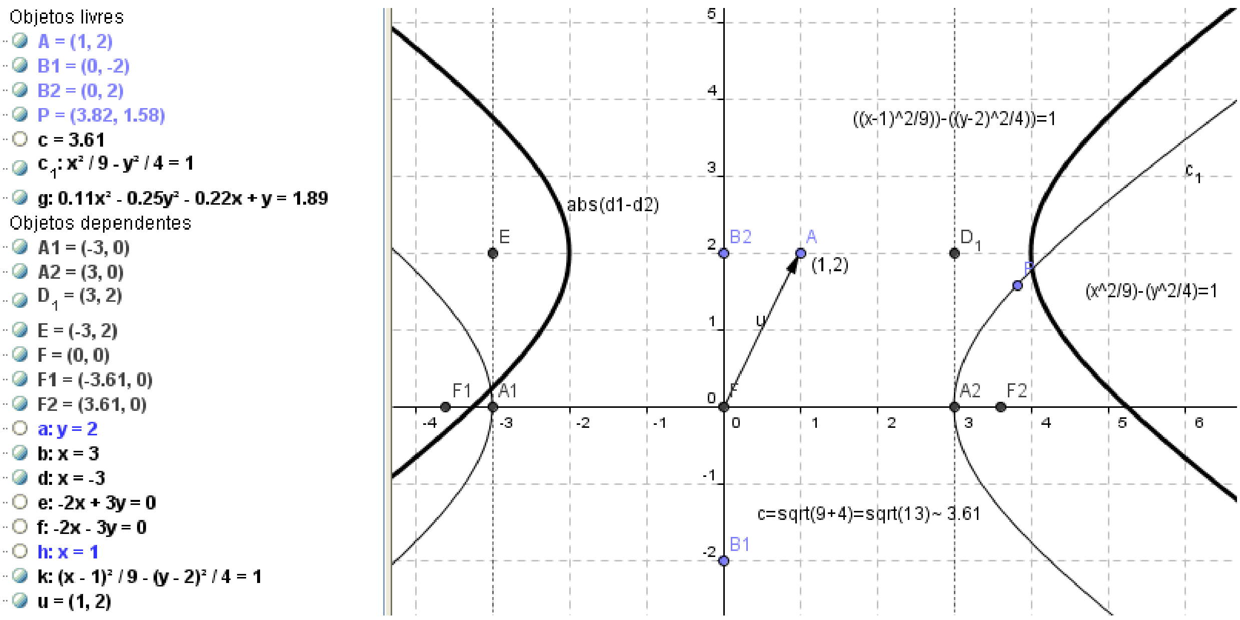


Figura 21 - Hipérbole (transladada)

Atividade 3: Representar as cônicas dadas pelas equações:

(a) reduzida: $y^2 - 5x = 0$, **(b)** $(y-2)^2 - 5(x-1) = 0$.

(a):

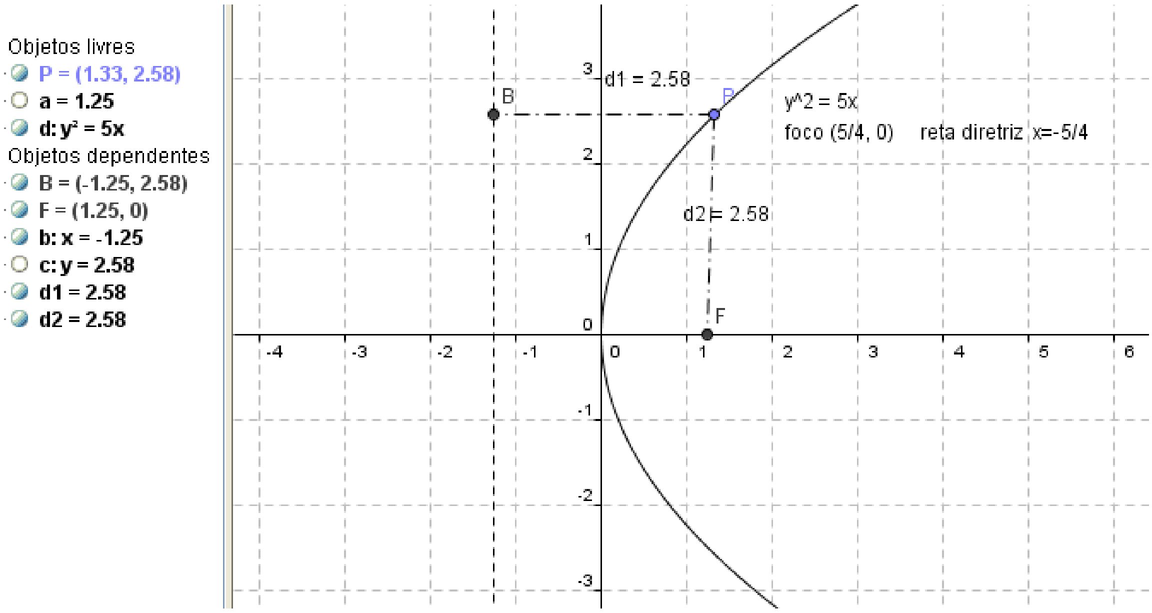


Figura 22 - Parábola (dada por equação reduzida)

Podemos representar a parábola usando diretamente a equação dada e a *Entrada* Algébrica, ou então a ferramenta *Parábola* (para tanto temos que marcar o foco e a diretriz).

Note que a equação é do tipo $y^2 = 4px$, e diretriz $x = -p$. Assim o foco é $F = (5/4, 0)$ e a reta diretriz é $x = -5/4$. Tendo o foco e vértice, a parábola pode ser então obtida usando a ferramenta ***Parábola*** na caixa $n°7$.

(b):

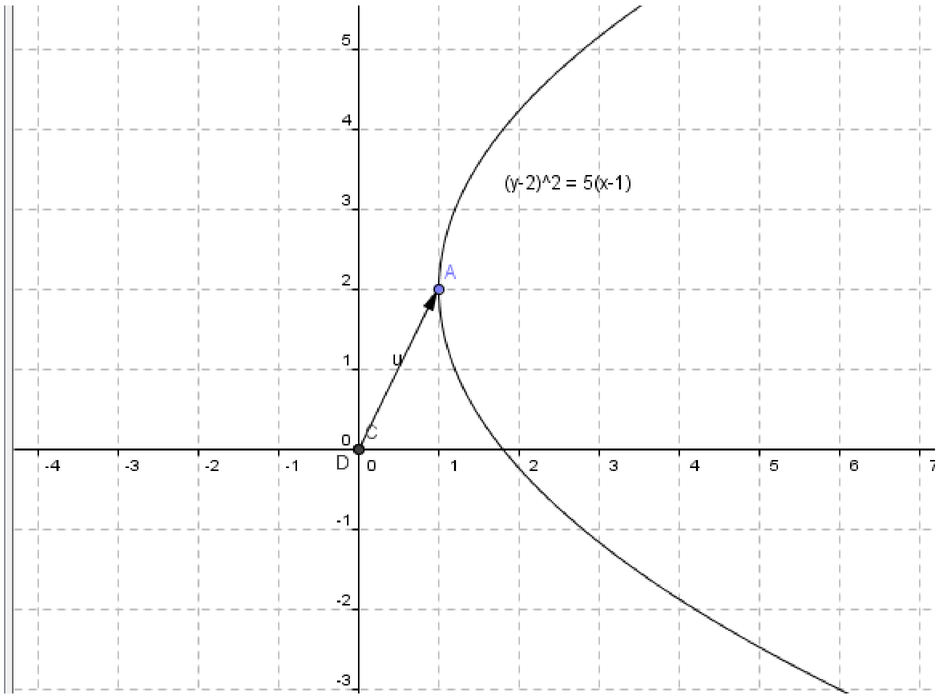
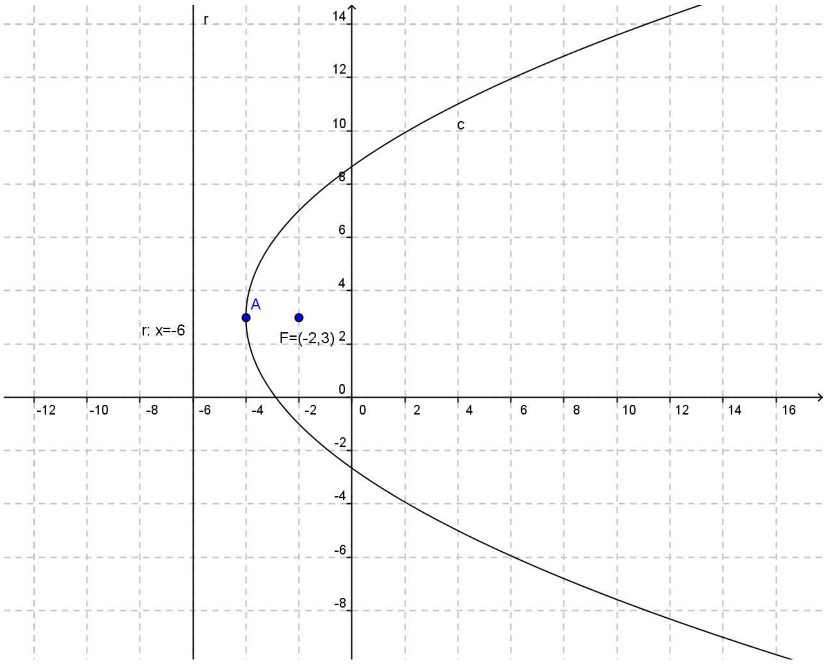


Figura 23 - Parábola (transladada)

Atividade 4. Dada a parábola de equação $y^2 - 8x - 6y - 23 = 0$, represente-a geometricamente:

(1) usando a equação e *Entrada* algébrica,
(2) usando o ícone/ferramenta *Parábola*, e o *foco* e a *diretriz* (para isso complete quadrados): $y^2 - 8x - 6y - 23 = 0 \Rightarrow y^2 - 6y = 8x + 23 \Rightarrow y^2 - 6y + 9 = 8x + 23 + 9 \Rightarrow (y-3)^2 = 8(x+4) \Rightarrow V = (-4,3)$, foco $F = (-2,3) = (2,0) + (-4,3)$ e diretriz $r : x = -6 = -2 + (-4)$).



(aqui usamos a ferramenta Zoom)
Figura 24 - Parábola

Atividade 5. Representar e classificar a cônica de equação: $3x^2 + 12xy + 8y^2 - 18x - 28y + 11 = 0$.

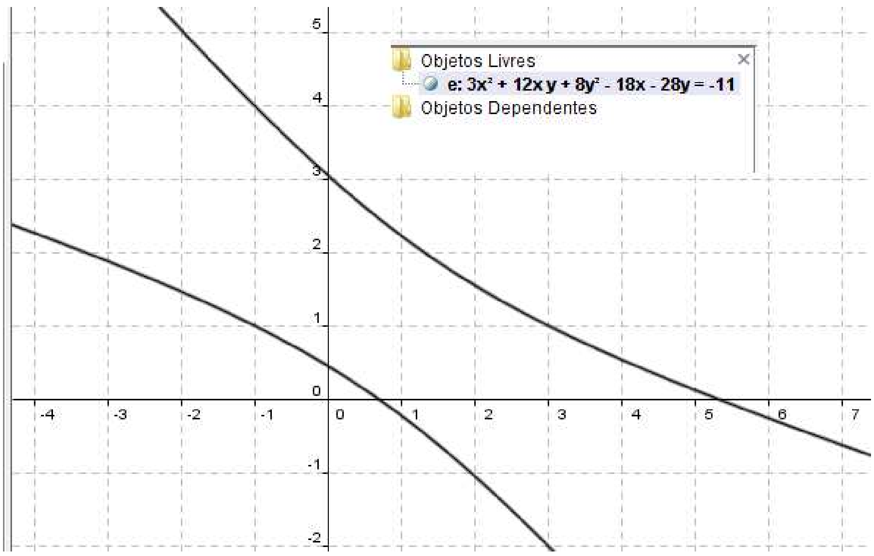


Figura 25 - Cônica (hipérbole)

Pelo gráfico (obtido com o GeoGebra) observamos que a cônica é uma hipérbole. Vale observar que, em geral, não é fácil reconhecer uma cônica a partir de sua equação e fazer sua representação geométrica. Existem alguns métodos que permitem, dada a equação de uma cônica, identifica-la e fazer seu esboço (vide, por exemplo, [2]).

Observação: Podemos ***copiar um trabalho feito na tela*** do GeoGebra e colar num arquivo do *Word*, ou *Paint*, por exemplo. Isso pode ser feito abrindo o arquivo desejado do GeoGebra, clicando em *Arquivo, Exportar* e selecionando, na tela que aparece, *Copiar para a Área de Transferência* (Ctrl+Shift+C). Depois no arquivo (que se pretende copiar - Word, por exemplo) use Ctrl+V para colar.

4 Alguns exercícios gerais

1. Representar e classificar as cônicas de equação:
(1) $2x^2 - 12xy + 7y^2 + 8x + 20y - 14 = 0$,
(2) $9x^2 - 4y2 - 18x - 16y - 7 = 0$,
(3) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 38x - 34y + 71 = 0$,
(4) $35x^2 - 2xy + 35y2 - 34x - 34y - 289 = 0$,
(5) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x + y + 1/5 = 0$.

2. Representar uma reta que faz com o eixo OX um ângulo de $30°$ e passa pelo ponto $P = (5, 2)$.
Sugestão: Crie uma reta r paralela ao eixo OX, passando por $(0, 3)$. Usando a ferramenta/ícone *Girar em torno de um ponto por um ângulo*, gire a reta obtida por um ângulo de $30°$ digitando $30°$ na janela que aparece após clicar na reta e no ponto $(3, 0)$, obtendo uma nova reta s. Marcar o ponto P e criar a uma reta t paralela a s passando por P. Tal reta satisfaz a condição desejada. *Outro modo* é obter a equação da reta t usando que $P = (5, 2)$ pertence a t, e que $tg(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, de modo que a equação é $y - 2 = tg30^o.(x - 5) = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 5)$. Daí basta entrar com a lei da função na *Entrada* algébrica.

3. Representar a reta r de equação $2x - y + 1 = 0$, a reta s paralela a r passando por $P = (2, 1)$e a reta t perpendicular a r passando por P. Dar uma equação da reta s. Idem para reta t.

4. Represente um hexágono regular que tem $A = (2, 1)$ e $B = (5, 1)$ como dois de seus vértices e está no semiplano $x \geq 0$.

5. Representar a cônica de equação $x^2 + 9xy + y^2 - 2x - 4y = 1$ e a circunferência de equação $(x + 1)^2 + y^2 = 9$. Em seguida obter/representar os pontos de interseção das duas curvas.
Observação: Os pontos de interseção podem ser obtidos usando o ícone *Interseção de Dois Objetos* na caixa n^o2, ou digitando na *Entrada* Interseção[***a, b***], onde as letras *a* e *b* que aparecem devem ser tais que *a* indica/nomea a cônica e *b* a circunferência na tela de trabalho do GeoGebra.

6. Representar a hipérbole H_1 de equação $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$. Representar a hipérbole H_2 obtida por rotacionar/girar a hipérbole H_1 em torno do ponto $O = (0, 0)$ por um ângulo de 90^o, e então representar a hipérbole H_3 obtida por transladar H_2 pelo vetor $\overrightarrow{OP}$, onde $P = (3, 2)$. Obtenha a equação de H_3.
Sugestão: Para obter H_2 use o ícone *Girar em torno de um ponto por um ângulo* e para obter H_3 use o ícone *Transladar objeto por um vetor.* Finalmente, se necessário, clique com o botão direito do mouse na equação da hipérbole H_3, que aparecerá na *Janela de Álgebra*, e selecione **Equação** $\mathbf{(x - m)^2/a^2 - (y - n)^2/b^2 = 1}$**”** para obter a equação de H_3 nessa forma.

Referências

[1] ARAÚJO, L. C. L. - *GeoGebra, um bom software livre.* Revista do Professor de Matemática. SP: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, n. 67, p. 43-47, 2008.
[2] BOULOS, P.; CAMARGO, I. - *Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial.*, MacGraw-Hill, 1987.
[3] CARVALHO, P. C. P.; LIMA, E. L. - *Coordenadas no Plano.* Rio de Janeiro, 1982.
[4] CARVALHO, P. C. P.; LIMA, E. L.; MORGADO, A. C; WAGNER, E. - *A Matemática do Ensino Médio*, v. 1 a 3. IMPA- RJ, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 1998.

[5] FANTI, E. L. C.; MORAES, J. R.; SANTOS, J. B. - *Usando a informática no estudo das cônicas*, XIX SEMAT, SJRP, 2007.
[6] SANTOS, C. H. DOS - *GeoGebra Aplicações ao Ensino de Matemática*, Universidade Federal do Paraná- UFPR, 2009.