

**Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática**

Grupos de Jaffard

por

João Luzeilton de Oliveira

sob orientação do

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Novembro/2001

João Pessoa - Pb

Grupos de Jaffard

por

João Luzeilton de Oliveira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva

Prof. Dr. José Gomes de Assis

Prof. Dr. Orlando Stanley Juriaans

**Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática**

Novembro/2001

Agradecimentos

1. A Deus, agradeço, por permitir que eu pudesse chegar até o fim desta caminhada.
2. À Universidade Estadual do Ceará - UECE e à CAPES, agradeço pelo apoio financeiro recebido. E também ao Departamento de Ciências da Natureza, FE-CLESC/UECE, onde estou lotado.
3. Ao meu pai, Inácio (in memorian), à minha mãe, Antônia, meu irmão, Luzenor e ao meu sogro Sr. Oracy, que sempre estiveram comigo em todos os momentos da minha vida, os meus sinceros agradecimentos.
4. Aos meus Amigos Caminha, Mário de Assis e Stálio, agradeço, pelas palavras de incentivo.
5. Quero também agradecer a minha esposa Oralnir e aos meus filhos, por permitirem que ficasse, por algum tempo, deles afastado, para realizar este trabalho.
6. Um agradecimento muito especial e sincero, ao Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva, pelo inegável e indefectível trabalho de orientação, fazendo assim, com que eu realizasse, com sucesso, este trabalho.

Dedicatória

Ao meu pai “in memoriam”
À minha mãe Antônia
À minha esposa Oralnir
E aos meus filhos Luzeilton Jr.,
Glória Maria e Gabriel Inácio,
razão maior da minha luta,
o meu maior agradecimento.

Notação

$\square$ - indica referências.

$\blacksquare$ - indica o fim de uma demonstração.

$|G|$ - indica o número de elementos ou a cardinalidade do grupo G .

$H \leq G$ - H é subgrupo de G .

$G \simeq G'$ - indica que os grupos G e G' são isomorfos.

$\leq$ - indica uma relação de ordem (parcial ou total).

$G \oplus_D H$ - indica a soma direta lexicográfica à direita dos grupos G e H .

$G \oplus_E H$ - indica a soma direta lexicográfica à esquerda dos grupos G e H .

$\text{End}(G)$ - Conjunto dos endomorfismos do grupo G .

$\text{Aut}(G)$ - Conjunto dos automorfismos do grupo G .

G_+ - indica o conjunto dos elementos positivos do grupo G .

$\frac{G}{H}$ - Grupo quociente de G por H .

$U(R)$ - indica o conjunto de todas as unidades de R .

$\mathcal{I}$ - Conjunto de índices

$\mathbb{N}$ - Conjunto dos números naturais

$\mathbb{Z}$ - Conjunto dos números inteiros

$\mathbb{R}$ - Conjunto dos números reais

G - Grupo

$\ker \phi$ - Núcleo do homomorfismo ϕ

$\oplus$ - Soma direta

$\langle a \rangle$ - Subgrupo gerado pelo elemento a

$\langle a \rangle$ - Subgrupo gerado pelo elemento a

Sumário

Introdução	vii
1 Resultados Básicos	1
1.1 Grupos	1
1.2 Grupos Ordenados	2
2 Grupos de Divisibilidade	19
2.1 Anéis	19
2.2 Seqüências Exatas	23
2.3 Grupos de Divisibilidade	28
2.4 V-Homomorfismos	32
2.5 Grupos que não são Grupos de Divisibilidade	36
3 Grupos de Jaffard	39
3.1 Grupos de Jaffard	39
3.2 Grupos de Jaffard em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	43
Referências Bibliográficas	47

Introdução

Um grupo ordenado é chamado um grupo filtrante se dois elementos quaisquer deste grupo possuem sempre uma cota superior (ou uma cota inferior).

Dado um domínio R , com corpo quociente K e $U = U(R)$ o grupo das unidades de R , existe um grupo ordenado G tal que G é o-isomorfo a $G(R)$, onde

$$G(R) = \frac{K^*}{U(R)}.$$

O grupo G , neste caso, é chamado o grupo de divisibilidade de R . E, sendo assim, existe uma semi-valorização de K em G .

Nosso objetivo neste trabalho é exibir uma classe de grupos filtrantes que não são grupos de divisibilidade.

Um exemplo de um grupo filtrante que não é um grupo de divisibilidade, foi dado primeiramente por Jaffard [6]. Ohm [9], dar um método para a construção de uma classe de grupos que não grupos de divisibilidade. E Bastos [2] generaliza o exemplo de Jaffard, definindo o que ele chama um “Grupo de Jaffard” e mostra que o mesmo não é um grupo de divisibilidade. É tomando como referencial o exemplo de Bastos, que desenvolveremos o nosso trabalho.

O exemplo dado por Jaffard, foi

$$H = \{(x, y) \in G : x + y \equiv 0(\text{mod } 2)\},$$

onde $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, que segundo a definição de Bastos é um grupo de Jaffard.

A definição a seguir, para um “Grupo de Jaffard”, é a definição dada por Bastos [2]. Sendo G um grupo filtrante, dizemos que G é um grupo de Jaffard se existir um V -homomorfismo

$$\varphi : G \rightarrow H,$$

onde H é um subgrupo de

$$G = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

(produto direto ordenado de grupos totalmente ordenados G_λ) tal que para algum par

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda, k = 1, 2,$$

G_{λ_k} é Arquimediano, satisfazendo as seguintes propriedades:

- (J1) Para cada $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, existe $a \in H$ tal que $\pi_{\lambda_1}(a) \neq r\pi_{\lambda_2}(a)$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
- (J2) H é um V-subgrupo de $H_{\lambda_1\lambda_2}$;
- (J3) $\pi_{\lambda_1\lambda_2}(H) \subsetneq \pi_{\lambda_1}(H) \times \pi_{\lambda_2}(H)$.

O conjunto

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + y \equiv 0 \pmod{2}\}$$

é um grupo filtrante e não é um grupo de divisibilidade. É também um Grupo de Jaffard, pois:

- (J1) Dado $a = (0, 2) \in H$, $\pi_{\lambda_1}(0, 2) \neq r\pi_{\lambda_2}(0, 2)$, para todo $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$;
- (J2) $H \subseteq H_{\lambda_1\lambda_2}$;
- (J3) H não coincide com os eixos $\mathbb{R}$, ou seja, H é subgrupo não próprio de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Com o objetivo de facilitar o desenvolvimento do trabalho, no capítulo 1, fizemos uma lista de definições e resultados básicos da Teoria dos Grupos Ordenados. Como precisamos mostrar que um grupo filtrante não é um grupo de divisibilidade, no capítulo 2, organizamos os pré-requisitos para chegarmos ao tal resultado. Finalmente, no capítulo 3, mostraremos que um grupo de Jaffard não é um grupo de divisibilidade, mostrando a relação do grupo

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + y \equiv 0 \pmod{2}\}$$

com a definição de grupo de Jaffard, ou seja, que H satisfaz as condições da definição de Bastos para um Grupo de Jaffard.

Capítulo 1

Resultados Básicos

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados básicos da Teoria dos Grupos Ordenados, pré-requisitos para uma boa compreensão dos capítulos seguintes. O leitor interessado em mais detalhes poderá consultar [5, 7, 10].

1.1 Grupos

Um conjunto não vazio G munido com uma operação binária

$$\begin{aligned} * : G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto a * b \end{aligned}$$

é um *grupo* se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $a * (b * c) = (a * b) * c$, para todos $a, b, c \in G$.
2. Existe $e \in G$ tal que $e * a = a * e = a$, para todo $a \in G$.
3. Para todo $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$.

O grupo G é *Abeliano* ou *comutativo* se também vale

4. $a * b = b * a$, para todos $a, b \in G$.

Com o objetivo de simplificar a notação, usaremos ab em vez de $a * b$. A *ordem* ou *cardinalidade* de um grupo G , denotada por $|G|$, é o número de elementos de G .

Sejam G um grupo e H um subconjunto de G . Dizemos que H é um *subgrupo* de G , denotado por $H \leq G$, se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $H \neq \emptyset$;
2. $ab^{-1} \in H$, para todos $a, b \in H$.

Nesta dissertação todos os grupos considerados são, salve menção explícita em contrário, *grupos Abelianos* escritos na forma *aditiva*.

Sejam G e G' dois grupos. Uma aplicação $\psi : G \longrightarrow G'$ é um *homomorfismo de grupos* se

$$\psi(a + b) = \psi(a) + \psi(b), \quad \forall a, b \in G.$$

Um homomorfismo de grupos $\psi : G \longrightarrow G'$ é um *isomorfismo* se ψ é bijetora. Quando existir um isomorfismo entre G e G' , dizemos que G e G' são *isomorfos* e denotaremos por $G \simeq G'$. Um *endomorfismo* de um grupo G é um homomorfismo $\psi : G \longrightarrow G$. Denotamos por

$$\text{End}(G) = \{\psi : G \longrightarrow G : \psi \text{ é um homomorfismo}\},$$

o conjunto dos endomorfismos de G . Um *automorfismo* de um grupo G é um isomorfismo $\psi : G \longrightarrow G$. Denotamos por

$$\text{Aut}(G) = \{\psi : G \longrightarrow G : \psi \text{ é um isomorfismo}\},$$

o conjunto dos automorfismos de G .

1.2 Grupos Ordenados

Sejam G um grupo e “ $\leq$ ” uma relação em G . Dizemos que a relação “ $\leq$ ” é uma relação de ordem parcial em G , se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $x \leq x, \forall x \in G$;
2. $x \leq y$ e $y \leq x \implies x = y, \forall x, y \in G$;
3. $x \leq y$ e $y \leq z \implies x \leq z, \forall x, y, z \in G$.

Uma relação de ordem parcial “ $\leq$ ” em G é chamada *compatível com a operação do grupo* G , se

$$a \leq b \implies a + x \leq b + x, \quad \text{para todos } a, b, x \in G$$

ou, equivalentemente,

$$a \leq b \text{ e } c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d, \text{ para todos } a, b, c, d \in G.$$

Definição 1.1 Um grupo G munido com uma relação de ordem parcial, compatível com a operação deste grupo é chamado grupo ordenado.

Uma relação de ordem parcial $\leq$ em G é uma *ordem total* se $x \leq y$ ou $y \leq x$, $\forall x, y \in G$. Neste caso, dizemos que o grupo G é um *grupo totalmente ordenado*.

Sejam G um grupo ordenado e $g \in G$. Dizemos que g é um *elemento positivo* de G se $g \geq 0$; g é um *elemento negativo* de G se $g \leq 0$. Se $g \geq 0$ e $g \neq 0$, dizemos que g é *estritamente positivo* e denotamos por $g > 0$. De modo análogo, definimos um elemento *estritamente negativo*.

Seja G um grupo ordenado. O *cone positivo* de G é o conjunto de todos os elementos positivos de G , isto é,

$$G_+ = \{g \in G : g \geq 0\}.$$

A proposição seguinte nos garante que se G é um grupo ordenado, então G_+ determina a ordem de G .

Proposição 1.1 Seja G um grupo ordenado. Então G_+ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $0 \in G_+$;
2. $G_+ \cap (-G_+) = \{0\}$;
3. $G_+ + G_+ \subseteq G_+$;
4. Se G é totalmente ordenado e $g \in G^* = G - \{0\}$, então G_+ satisfaz apenas uma das afirmações: $g \in G_+$ ou $-g \in G_+$. ■

Um subconjunto P de um grupo ordenado G satisfazendo as condições 1., 2. e 3. da Proposição 1.1 é chamado um *subconjunto positivo* de G . Por exemplo,

$$P = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

é um subconjunto positivo de $\mathbb{Z}$ com a ordem usual.

Como recíproca da Proposição 1.1, temos o seguinte:

Corolário 1.1 Se P é um subconjunto positivo de G , então a relação definida por

$$y \geq x \Leftrightarrow y - x \in P$$

é uma relação de ordem parcial compatível com a operação do grupo G e $P = G_+$. Além disso, se a condição 4. da Proposição 1.1 também vale para P , então $\leq$ é uma relação de ordem total em G . ■

Afirmção. Se G é um grupo ordenado e H um subgrupo de G , então $H_+ = H \cap G_+$.

De fato, $0 \in H \cap G_+$, pois $0 \in H$ e $0 \in G_+$. Se $h \in (H \cap G_+) \cap [-(H \cap G_+)]$, então $h \in H \cap G_+$ e $-h \in H \cap G_+$. Logo,

$$h \geq 0 \text{ e } -h \geq 0,$$

isto é, $h = 0$. Assim, $(H \cap G_+) \cap [-(H \cap G_+)] = \{0\}$. Finalmente, se $a, b \in H \cap G_+$, então $a, b \in H$ e $a, b \in G_+$. Logo, $a + b \in H$ e $a + b \in G_+$, isto é, $a + b \in H \cap G_+$. Portanto, $H_+ = H \cap G_+$. Neste caso, dizemos que H é um *subgrupo ordenado* de G .

Sejam $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de grupos ordenados não nulos e $G = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ o produto direto dos grupos G_λ , isto é, o conjunto de todas as funções

$$a : \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

com $a(\lambda_0) = a_{\lambda_0} \in G_{\lambda_0}$, $\lambda_0 \in \Lambda$. Dados $a = (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, b = (b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in G$, definimos uma relação $\leq$ em G por

$$a \leq b \Leftrightarrow a_\lambda \leq b_\lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

É fácil verificar que G é um grupo ordenado, com $G_+ = \prod_{\lambda \in \Lambda} (G_\lambda)_+$, chamado o *produto cardinal* ou *produto direto ordenado* dos G_λ . A *soma cardinal* ou *soma direta ordenada* dos G_λ , denotada por $H = \sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, é o subgrupo ordenado de $G = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, de todos os elementos $a = (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tais que $a_\lambda = 0$, para quase todo λ (para quase todo, significa: exceto para um número finito de índices λ). Quando Λ é um conjunto finito o produto e a soma direta coincidem.

Sejam G e G' grupos ordenados. Definimos uma relação $\leq$ em $G \times G'$ por

$$(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a < c \text{ ou } a = c \text{ e } b \leq d.$$

É claro que $\leq$ é uma ordem total em $G \times G'$. Neste caso, dizemos que $G \times G'$ é *ordenado lexicograficamente à esquerda* e denotamos por $G \oplus_E G'$.

Sejam G e G' grupos ordenados. Um homomorfismo de grupos $\alpha : G \rightarrow G'$ é um *homomorfismo de ordem* ou um *o-homomorfismo* se

$$a \leq b \text{ em } G \Rightarrow \alpha(a) \leq \alpha(b) \text{ em } G'.$$

Uma condição necessária e suficiente para que um homomorfismo de grupos seja um o-homomorfismo é dada pela seguinte proposição.

Proposição 1.2 *Sejam G e G' grupos ordenados. Um homomorfismo $\alpha : G \rightarrow G'$ é um o-homomorfismo se, e somente se, $\alpha(G_+) \subseteq G'_+$.*

Prova. Suponhamos que α seja um o-homomorfismo. Então, dado $b \in \alpha(G_+)$, existe $a \in G_+$ tal que $b = \alpha(a)$. Como $\alpha(G_+) \subset G'$ temos que $b = \alpha(a) \in G'$. Assim, $b = \alpha(a) \geq \alpha(0) = 0$, pois $a \geq 0$. Portanto, $b \in G'_+$, isto é,

$$\alpha(G_+) \subseteq G'_+.$$

Reciprocamente, suponhamos que $\alpha(G_+) \subseteq G'_+$. Sejam $a, b \in G$ tais que $a \leq b$. Então $b - a \in G_+$. Assim,

$$\alpha(b - a) \in \alpha(G_+) \subseteq G'_+.$$

Como α é um homomorfismo temos que

$$\alpha(a) \leq \alpha(b).$$

Portanto, α é um o-homomorfismo. ■

Exemplo 1.1 *Seja $G = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$. Então para cada $\lambda_0 \in \Lambda$ a função*

$$\pi_{\lambda_0} : G \rightarrow G_{\lambda_0}$$

definida por $\pi_{\lambda_0}((a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = a_{\lambda_0}$ é um o-homomorfismo sobrejetor, chamado a projeção de G sobre o grupo fator G_{λ_0} .

Corolário 1.2 *Sejam G e G' grupos ordenados. Um homomorfismo $\alpha : G \rightarrow G'$ é um o-isomorfismo se, e somente se, α é um isomorfismo e $\alpha(G_+) = G'_+$.* ■

Definição 1.2 *Seja X um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que X é filtrante à direita (filtrante à esquerda) se para todos $a, b \in X$, existe $c \in X$ ($d \in X$) tal que $a, b \leq c$ ($d \leq a, b$).*

Proposição 1.3 *Seja G um grupo ordenado. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *Para todos $a, b \in G$, existe $c \in G$ tal que $a, b \leq c$;*
2. *Para todos $a, b \in G$, existe $d \in G$ tal que $d \leq a, b$.*

Prova. Suponhamos que para todos $a, b \in G$, exista $c \in G$ tal que $a, b \leq c$. Então $a' = c - a$ e $b' = c - b$ são elementos de G . Assim, existe $c' \in G$, tal que $a', b' \leq c'$. Logo,

$$a = c - a' \geq c - c' \text{ e } b = c - b' \geq c - c'.$$

Portanto, existe $d = c - c' \in G$, tal que $d \leq a, b$ para todos $a, b \in G$. Para provarmos a recíproca, usaremos o mesmo argumento. ■

Definição 1.3 *Um grupo ordenado G é filtrante ou dirigido se pelo menos uma das condições da Proposição 1.3 for satisfeita.*

Proposição 1.4 *Seja G um grupo ordenado. Então G é filtrante se, e somente se, G_+ gera G como um grupo, isto é, $G = \langle G_+ \rangle = G_+ - G_+$.*

Prova. Suponhamos que G seja filtrante. Então para cada $g \in G$, existe $c \in G$ tal que

$$g, 0 \leq c.$$

Assim, $g = c - (c - g)$, com $c \in G_+$ e $c - g \in G_+$. Portanto, $g \in \langle G_+ \rangle$.

Reciprocamente, dados $a, b \in G$, existem $p, r, s, t \in G_+$ tais que $a = p - r$ e $b = s - t$.

Assim,

$$a \leq a + r \leq p + s \text{ e } b \leq b + t \leq p + s.$$

Portanto, existe $c = p + s \in G$ tal que $a, b \leq c$, isto é, G é filtrante. ■

Exemplo 1.2 *Seja $n \in \mathbb{Z}_+$. É fácil verificar que*

$$P_n = \{0, n, n + 1, \dots\}$$

é um subconjunto positivo de $\mathbb{Z}$. Se

$$a \leq b \Leftrightarrow b - a \in P_n$$

é a ordem parcial em $\mathbb{Z}$ induzida por P_n , então $\mathbb{Z} = P_n - P_n$, pois cada $a \in \mathbb{Z}$ pode ser escrito na forma

$$a = |a| - 0 \text{ ou } a = 0 - |a|.$$

Portanto, $\mathbb{Z}$ é filtrante com esta ordem.

Exemplo 1.3 Seja $n \in \mathbb{Z}_+$. É fácil verificar que

$$P_n = \{0, n, 2n, \dots\}$$

é um subconjunto positivo de $\mathbb{Z}$. Se

$$a \leq b \Leftrightarrow b - a \in P_n$$

é a ordem parcial em $\mathbb{Z}$ induzida por P_n e $n > 1$, então $\mathbb{Z} \neq P_n - P_n$. Portanto, $\mathbb{Z}$ não é filtrante com esta ordem, exceto o caso em que $n = 1$.

Sejam X um conjunto parcialmente ordenado e Y um subconjunto não vazio de X . Dizemos que:

1. $b \in X$ é uma *cota superior* de Y se $a \leq b$, para todo $a \in Y$;
2. $c \in X$ é uma *cota inferior* de Y se $c \leq a$, para todo $a \in Y$.

A menor (maior) das cotas superiores (inferiores) de Y é chamada de *supremo* (*ínfimo*) de Y e será denotada por $b = \sup Y$ ($c = \inf Y$).

Teorema 1.1 Sejam G um grupo ordenado, X e Y subconjuntos não vazios de G . Então:

1. Se $\sup X$ existe, então $\inf(-X)$ existe e $\inf(-X) = -\sup X$;
2. Se $\sup X$ e $\sup Y$ existem, então $\sup(X + Y)$ existe e $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$. Além disso, se $\sup X$ e $\sup(X + Y)$ existem, então $\sup Y$ existe e $\sup Y = \sup(X + Y) - \sup X$;
3. Se $\sup X$ existe, então $\sup(a + X)$ existe e $\sup(a + X) = a + \sup X$, para todo $a \in G$;
4. Se $\sup\{a, b\}$ existe, então $\inf\{a, b\}$ existe e $\sup\{a, b\} + \inf\{a, b\} = a + b$, para todos $a, b \in G$ (Relação de Dedekind);
5. Se $\sup X = a$, $\sup Y = b$ e $\sup\{a, b\}$ existe, então $\sup(X \cup Y)$ existe e $\sup(X \cup Y) = \sup\{a, b\}$.

Prova. Provaremos apenas os itens 1. e 4..

1. Suponhamos que $\sup X = c$. Então $a \leq c$, para todo $a \in X$. Logo, $-c \leq -a$, para todo $-a \in -X$, isto é, $-c$ é uma cota inferior de $-X$. Seja $d \in -X$ tal que $d \leq b$, para todo

$b \in -X$. Então $-b \leq -d$, para todo $-b \in X$. Assim, por hipótese, $c \leq -d$. Portanto, $d \leq -c$, ou seja, $-c = \inf(-X)$.

4. Suponhamos que $\sup\{a, b\} = c$. Então $a \leq c$ e $b \leq c$. Assim, $a+b-c \leq b$ e $a+b-c \leq a$, isto é, $a+b-c$ é uma cota inferior de $\{a, b\}$. Seja $d \in G$ tal que $d \leq a$ e $d \leq b$. Então $b \leq a+b-d$ e $a \leq a+b-d$. Assim, $c \leq a+b-d$, ou seja, $d \leq a+b-c$. Portanto, $a+b-c$ é a maior das cotas inferiores de $\{a, b\}$, isto é, $\inf\{a, b\} = a+b-c$. ■

Sejam G um grupo ordenado e $a, b \in G$. Dizemos que a e b são *disjuntos* se $\inf\{a, b\}$ existe e $\inf\{a, b\} = 0$. Neste caso,

$$\sup\{a, b\} = a + b.$$

O $\sup\{a, 0\}$, quando existe, é chamado a *parte positiva* de a , denotado por a^+ e

$$a^+ = \sup\{a, 0\}.$$

Se a^+ está definido, então existe a^- , chamado a *parte negativa* de a , e

$$a^- = \inf\{a, 0\}.$$

Assim,

$$a^+ - a^- = \sup\{a, 0\} + \inf\{a, 0\} = a,$$

ou seja,

$$a = a^+ - a^-.$$

Proposição 1.5 *Sejam G um grupo ordenado e $a, b, c, x, y \in G$.*

1. *Se $\sup\{a, 0\}$ existe e $a = x - y$, onde $x, y \in G_+$, então $\inf\{x, y\}$ existe, $x = a^+ + \inf\{x, y\}$ e $y = a^- + \inf\{x, y\}$. Em particular, $a^+ \leq x$ e $a^- \leq y$.*
2. *Se $a = x - y$, onde $x, y \in G_+$, e $\inf\{x, y\} = 0$, então $x = a^+$ e $y = a^-$. Além disso, $\inf\{a^+, a^-\} = 0$.*
3. *Se $a, b, c \in G_+$, $\inf\{a, b\}$ existe e $\inf\{a, c\} = 0$, então $\inf\{a, b+c\}$ existe e $\inf\{a, b+c\} = \inf\{a, b\}$.*
4. *Se $a, b, c \in G_+$ e $\inf\{a, c\} = \inf\{b, c\} = 0$, então $\inf\{a+b, c\} = 0$. Se $\inf\{a, c\} = 0$ e $c \leq a+b$, então $c \leq b$.*

5. Se $\sup\{a, b\}$ existe, então $\sup\{na, nb\}$ existe e $\sup\{na, nb\} = n \sup\{a, b\}$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Um resultado similar é válido para $\inf\{na, nb\}$.

Prova. Provaremos apenas os itens 1. e 5..

1. Suponhamos que $\sup\{a, 0\}$ exista. Então $\sup\{x - y, 0\}$ existe. Como

$$\begin{aligned}\sup\{x - y, 0\} &= \sup\{-y + x, -x + x\} \\ &= \sup\{-x, -y\} + x,\end{aligned}$$

temos, pelo item 3. do Teorema 1.1, que $\sup\{-x, -y\}$ existe. Assim, pelo item 1. do Teorema 1.1, $\inf\{x, y\}$ existe e $\inf\{x, y\} = -\sup\{-x, -y\}$. Agora,

$$\begin{aligned}a^+ &= \sup\{a, 0\} \\ &= \sup\{x - y, 0\} \\ &= x + \sup\{-x, -y\} \\ &= x - \inf\{x, y\},\end{aligned}$$

isto é, $x = a^+ + \inf\{x, y\}$. De modo inteiramente análogo, prova-se que $y = a^- + \inf\{x, y\}$.

Em particular, $a^+ \leq x$ e $a^- \leq y$.

5. Como $\sup\{a, b\}$ existe, temos que $(a - b)^+ = \sup\{a - b, 0\}$ existe. Logo,

$$a - b = (a - b)^+ - (a - b)^-,$$

onde

$$\inf\{(a - b)^+, (a - b)^-\} = 0.$$

Usando indutivamente o item 4., obtemos que

$$\inf\{n(a - b)^+, n(a - b)^-\} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Além disso,

$$n(a - b) = n(a - b)^+ - n(a - b)^-, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Assim, pelo item 1., $\sup\{na - nb, 0\}$ existe e

$$\begin{aligned}\sup\{na - nb, 0\} &= n(a - b)^+ \\ &= n \sup\{a - b, 0\} \\ &= n[\sup\{a, b\} - b] \\ &= n \sup\{a, b\} - nb, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} n \sup\{a, b\} &= \sup\{na - nb, 0\} + nb \\ &= \sup\{na, nb\}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

■

Definição 1.4 *Seja G um grupo ordenado. Dizemos que G é um l -grupo se $\sup\{a, b\}$ existir, para todos $a, b \in G$. Neste caso, a ordem parcial de G é chamada de l -ordem.*

Observação 1.1 *Todo l -grupo é um grupo filtrante. A recíproca não verdadeira, como mostra o seguinte exemplo.*

Exemplo 1.4 *Sejam $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ com a ordem usual e*

$$H = \{(a, b) \in G : a + b \equiv 0 \pmod{2}\}$$

um subgrupo ordenado de G . Então H é filtrante mas não é l -grupo. De fato, é fácil verificar que

$$H_+ = \{(a, 2k - a) : a \geq 0 \text{ e } k \geq \frac{a}{2}\}.$$

Dado $a \in \mathbb{Z}$, se $a \geq 0$ e escolhendo $c \in \mathbb{Z}_+$ tal que $2c + 2k - a \geq 0$, obtemos que

$$(a, 2k - a) = (a, 2c + 2k - a) - (0, 2c) \in H_+ - H_+.$$

Se $a < 0$ e escolhendo $-d \in \mathbb{Z}_+$ tal que $2d + 2k - a \leq 0$, obtemos que

$$(a, 2k - a) = (0, -2d) - (-a, -2d - 2k + a) \in H_+ - H_+.$$

Portanto, $H = H_+ - H_+$, isto é, H é filtrante. Sejam $u = (1, 1), v = (0, 2) \in H$. Então

$$\sup_G\{u, v\} = (1, 2)$$

e $\sup\{u, v\}$ não existe em H , pois se existisse $(a, b) \in H$ tal que $(a, b) = \sup\{u, v\}$, então $(a, b) \geq (1, 2)$. Como $(1, 1), (0, 2) \leq (1, 3)$ e $(1, 1), (0, 2) \leq (2, 2)$ temos que $a \leq 1$ e $b \leq 2$. Assim, $(a, b) \leq (1, 2)$. Portanto, $(a, b) = (1, 2) \in H$, o que é uma contradição.

Teorema 1.2 *Seja G um grupo filtrante. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. G é um l -grupo;

2. $\sup\{a, b\}$ existe, para todos $a, b \in G_+$;

3. $\inf\{a, b\}$ existe, para todos $a, b \in G_+$.

Prova. (1. $\Rightarrow$ 2.) Segue da definição.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Suponhamos que $\sup\{a, b\}$ existe, para todos $a, b \in G_+$. Então, pelo item 4. do Teorema 1.1, $\inf\{a, b\}$ existe, para todos $a, b \in G_+$.

(3. $\Rightarrow$ 1.) Suponhamos que $\sup\{a, b\}$ existe, para todos $a, b \in G_+$. Dados $x, y \in G$ temos, por hipótese, que existe $t \in G$ tal que $t \leq x$ e $t \leq y$. Como $x - t, y - t \in G_+$ temos que $\sup\{x - t, y - t\}$ existe e

$$\sup\{x - t, y - t\} = \sup\{x, y\} - t,$$

isto é, $\sup\{x, y\}$ existe, para todos $x, y \in G$. Portanto, G é um l -grupo. ■

Proposição 1.6 *Sejam G um l -grupo e $a, b \in G$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. $a \leq b$;

2. $\sup\{a, b\} = b$;

3. $\inf\{a, b\} = a$. ■

Observação 1.2 *Todo grupo totalmente ordenado é um l -grupo.*

Corolário 1.3 *Seja G um grupo ordenado. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. G é um l -grupo;

2. Para cada $a \in G$ existem $x, y \in G_+$ tais que $a = x - y$ e $\inf\{x, y\} = 0$. ■

Proposição 1.7 *Sejam G um l -grupo e $\{a_i\}_{i=1}^n$ um subconjunto finito de G . Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. $\inf\{a_1, \dots, a_n\} = 0$;

2. Para cada $a \in G$, com $a > 0$, existem $i \in \{1, \dots, n\}$ e $x \in G$ com $0 < x \leq a$ tais que $\inf\{x, a_i\} = 0$.

Prova. (1. $\Rightarrow$ 2.) Suponhamos que $\inf\{a_1, \dots, a_n\} = 0$ e $a > 0$. Então

$$a \geq \inf\{a, a_1\} \geq \dots \geq \inf\{a, a_1, \dots, a_n\} = 0.$$

Assim, se $\inf\{a, a_1\} = 0$, basta escolher $x = a$. Caso contrário, escolhemos i tal que

$$x = \inf\{a, a_1, \dots, a_i\} > 0,$$

enquanto

$$\inf\{a, a_1, \dots, a_{i+1}\} = \inf\{x, a_{i+1}\} = 0.$$

(2. $\Rightarrow$ 1.) Suponhamos que $\inf\{a_1, \dots, a_n\} = b > 0$. Então é claro que não existe $0 < x \leq b$ tal que $\inf\{x, a_i\} = 0$, para algum i . ■

Definição 1.5 *Seja G um grupo ordenado. Um subgrupo ordenado H de G é chamado isolado ou convexo, se*

$$0 \leq b \leq x \text{ com } x \in H, b \in G \Rightarrow b \in H$$

ou, equivalentemente,

$$x \leq b \leq y \text{ com } x, y \in H, b \in G \Rightarrow b \in H.$$

Definição 1.6 *Seja G um grupo ordenado. Um subgrupo ordenado H de G é chamado fortemente isolado ou fortemente convexo, se para cada $x \in H$ e $b \in G$,*

$$x \leq b \Leftrightarrow b \in H \text{ ou } b > 0.$$

Proposição 1.8 *Todo subgrupo fortemente convexo de um grupo ordenado G é um subgrupo convexo de G .*

Prova. Suponhamos que H seja um subgrupo fortemente convexo de G e $x \leq b \leq y$, com $x, y \in H$ e $b \in G$. Então $x - b \geq x - y$. Como $x - y \in H$ temos, por hipótese, que $x - b > 0$ ou $x - b \in H$. Sendo $x - b \leq 0$ temos que $x - b \in H$ e $b = x - (x - b) \in H$. Portanto, H é um subgrupo convexo de G . ■

Proposição 1.9 *Sejam G um grupo ordenado, H um subgrupo ordenado de G e π o homomorfismo canônico de G sobre $\frac{G}{H}$. Então $\pi(G_+)$ é um cone positivo de $\frac{G}{H}$ se, e somente se, H é um subgrupo convexo de G .*

Prova. Suponhamos que $\pi(G_+)$ seja um cone positivo de $\frac{G}{H}$. Sejam $a \in H$ e $b \in G$ tais que $0 \leq b \leq a$. Como

$$\pi(G_+) = \left(\frac{G}{H}\right)_+$$

temos que

$$H = \pi(0) \leq \pi(b) \leq \pi(a) = H,$$

pois $a \in H$. Logo, $\pi(b) = H$, isto é, $b \in H$. Portanto, H é um subgrupo convexo de G .

Reciprocamente, suponhamos que H seja um subgrupo convexo de G . Então é claro que

$$H = 0 + H = \pi(0) \in \pi(G_+),$$

pois $0 \in G_+$. Seja $x + H \in \pi(G_+) \cap (-\pi(G_+))$. Então $x + H \in \pi(G_+)$ e $x + H \in -\pi(G_+)$, isto é, $x + H = \pi(a)$ e $x + H = \pi(-b)$, para alguns $a, b \in G_+$. Logo, $\pi(a) = \pi(-b)$, ou seja, $a + b \in H$. Como

$$0 \leq a \leq a + b$$

temos, por hipótese, que $a \in H$. Assim, $x + H = H$. Finalmente, se $x + H, y + H \in \pi(G_+)$, então existem $a, b \in G_+$ tais que $x + H = \pi(a)$ e $y + H = \pi(b)$. Logo,

$$\begin{aligned} (x + H) + (y + H) &= \pi(a) + \pi(b) \\ &= \pi(a + b) \in \pi(G_+), \end{aligned}$$

pois $a + b \in G_+$. Portanto, $\pi(G_+)$ é um cone positivo de $\frac{G}{H}$. ■

Sejam G um grupo ordenado e H um subgrupo convexo de G . Então o grupo quociente $\frac{G}{H}$ ordenado por:

$$a + H \leq b + H \iff \text{existe } c \in H \text{ tal que } a \leq b + c,$$

é chamado o *grupo ordenado quociente* de G por H . Isto é, a relação de ordem determinada pelo cone positivo é dada por $\pi(G_+)$.

Corolário 1.4 *Se G é totalmente ordenado, então $\frac{G}{H}$ é totalmente ordenado.*

Proposição 1.10 *Seja G um grupo totalmente ordenado. Se H e K são subgrupos convexos de G , então $H \subseteq K$ ou $K \subseteq H$.*

Prova. Sejam $a \in H$ e $b \in K$. Como G é totalmente ordenado temos que $0 \leq a \leq b$ ou $0 \leq b \leq a$. Assim, por hipótese, $b \in H$ ou $a \in K$. Portanto, $H \subseteq K$ ou $K \subseteq H$. ■

Definição 1.7 *Seja G um grupo totalmente ordenado. Se G tem somente um número finito de subgrupos convexos, dizemos que o número de subgrupos convexos próprios de G é o posto de G . Caso contrário, o posto de G é infinito.*

Exemplo 1.5 *O posto do grupo $\mathbb{Z}$, com a ordem usual, é igual 1, pois $\{0\}$ é o único subgrupo convexo próprio de $\mathbb{Z}$.*

Observação 1.3 *Seja G um grupo totalmente ordenado. Então G tem posto 1 se, e somente se, $G \neq \{0\}$ e os únicos subgrupos convexos de G são $\{0\}$ e G .*

Proposição 1.11 *Seja G um grupo totalmente ordenado, com $G \neq \{0\}$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *O posto de G é igual a 1;*
2. *G é Arquimédiano (se $a \in G$, com $a > 0$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$, para todo $b \in G$);*
3. *G é o-isomorfo a um subgrupo do grupo aditivo $\mathbb{R}$.*

Prova. (1. $\Rightarrow$ 2.) Suponhamos, por absurdo, que existem $a, b \in G$ com $a > 0$ e $b > 0$ tais que $b \geq na$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja

$$S = \{c \in G : 0 \leq c < na, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}.$$

Então $b \notin S$. Dados $x, y \in S$, obtemos

$$0 \leq x < n_1 a \text{ e } 0 \leq y < n_2 a.$$

Logo, $0 \leq x + y < ma$, onde $m = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$, isto é, $x + y \in S$. Seja H o subgrupo de G gerado por S . Então

$$H = \{x - y : x, y \in S\}.$$

Consideremos um elemento de H_+ , digamos $x - y \geq 0$, e $0 \leq d < x - y$. Assim, se $na > x$ e $y > 0$, então

$$0 \leq d \leq d + y < x < na.$$

Como $d \in S$ e $H = \langle S \rangle$ temos que $d \in H$. Portanto, H é um subgrupo convexo próprio de G com $H \neq \{0\}$, o que é uma contradição.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Suponhamos que $a = \inf G_+$ exista. Então dado $b \in G$, com $b \geq 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(n-1)a < b < na.$$

Assim,

$$0 < b - (n-1)a < a \Rightarrow b - (n-1)a = a,$$

isto é, $b = na$. Se $b \in G$ com $b \leq 0$, então $b = -(-b) = (-n)a$. Logo, $G = \langle a \rangle$. Portanto, a função $\phi : G \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $\phi(na) = n$ é um o-isomorfismo.

Agora, suponhamos que $\inf G_+$ não exista. Seja $a \in G_+$ fixado com $\phi(a) = 1$. Então dado $b \in G$, com $b \geq 0$, existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $a \leq nb$ e $b < ma$. Sejam

$$L_b = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+^* : ma \leq nb \right\}$$

e

$$U_b = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+^* : ma > nb \right\}.$$

Então L_b e U_b são não vazios. Se

$$\frac{m}{n} \in L_b \text{ e } \frac{p}{q} \in U_b,$$

então

$$mqa \leq nqb \text{ e } nqb < npa.$$

Assim,

$$mqa < npa \text{ e } \frac{m}{n} < \frac{p}{q}.$$

Logo, $L_b \cup (-\mathbb{Q}_+)$ e U_b formam um corte de Dedekind dos números racionais. Portanto, eles determinam um único número real positivo $\phi(b)$. Fixemos $\phi(0) = 0$. Se $c \in -G_+$, então $\phi(c) = -\phi(-c)$. Logo, a função $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}$ definida acima é um o-isomorfismo de G em $\phi(G)$. Portanto, em qualquer caso, existe um o-isomorfismo de G sobre um subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$.

(3. $\Rightarrow$ 1.) Seja $K \neq \{0\}$ um subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ tal que G seja o-isomorfo a K . Se $L \neq \{0\}$ é um subgrupo convexo de K , então L contém um elemento positivo a . Seja $b \in K$, com $b \geq 0$. Como $\mathbb{R}$ é Arquimediano temos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq b < na$. Assim, $b \in L$, pois $na \in L$. Portanto, $K_+ \subseteq L$, isto é, $K = L$. Assim, o posto de G é igual a 1. ■

Sejam G um l -grupo e H um subgrupo ordenado de G . Dizemos que H é um *subgrupo próprio* de G se

$$x, y \in H \Rightarrow \sup\{x, y\} \in H.$$

Observação 1.4 *Essa terminologia “subgrupo próprio,” nas condições acima, significa que o mesmo é um l -grupo. Portanto, não tem relação com a definição de subgrupo próprio que conhecemos.*

Proposição 1.12 *Todo subgrupo fortemente convexo de um l -grupo G é um subgrupo próprio de G .*

Prova. Suponhamos que H seja um subgrupo fortemente convexo de G . Basta mostrar que $x \in H$ implica que $x^+ = \sup\{x, 0\} \in H$, pois se $x, y \in H$, então $x - y \in H$. Logo, $\sup\{x - y, 0\} \in H$ e

$$\sup\{x, y\} = \sup\{x - y, 0\} + y \in H.$$

Dado $x \in H$, temos $x^+ = \sup\{x, 0\}$. Se $x \leq 0$, então $x^+ = 0 \in H$. Se $x > 0$, então $x^+ > 0$ e $x^+ < 2x$. Como $2x \in H$ temos, por hipótese, que $x^+ \in H$. ■

Sejam G e G' dois l -grupos. Dizemos que um homomorfismo $\phi : G \rightarrow G'$ é um *l -homomorfismo* se

$$\phi(\sup\{a, b\}) = \sup\{\phi(a), \phi(b)\}, \quad \forall a, b \in G.$$

Observação 1.5 *Todo l -homomorfismo é um o -homomorfismo.*

Exemplo 1.6 *Seja $G = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, onde cada G_λ é um l -grupo. Então para cada $\lambda_0 \in \Lambda$ a função*

$$\pi_{\lambda_0} : G \rightarrow G_{\lambda_0}$$

definida por $\pi_{\lambda_0}((a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = a_{\lambda_0}$ é um l -homomorfismo, pois

$$\pi_\lambda(\sup\{a, b\}) = \sup\{\pi_\lambda(a), \pi_\lambda(b)\}, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Exemplo 1.7 *Sejam H um grupo ordenado e $G = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, onde cada G_λ é um grupo totalmente ordenado. Se $\phi_\lambda : H \rightarrow G_\lambda$ é um l -homomorfismo, então*

$$\begin{aligned} \phi : H &\rightarrow G \\ h &\mapsto (\phi_\lambda(h))_{\lambda \in \Lambda} \end{aligned}$$

é um l -homomorfismo.

Proposição 1.13 *Sejam G um l-grupo, H um subgrupo convexo de G e π o o-homomorfismo canônico de G sobre $\frac{G}{H}$. Então $\frac{G}{H}$ será um l-grupo e π um l-homomorfismo se, e somente se, H é um subgrupo próprio de G .*

Prova. Suponhamos que $\frac{G}{H}$ seja um l-grupo e π um l-homomorfismo. Dado $x \in H$, obtemos $x + H = H$. Logo,

$$\begin{aligned} x^+ + H &= \pi(x^+) \\ &= \pi(\sup\{x, 0\}) \\ &= \sup\{\pi(x), \pi(0)\} \\ &= \sup\{x + H, H\} \\ &= H^+ \\ &= H \end{aligned}$$

e $x^+ \in H$, isto é, H é um subgrupo próprio de G .

Reciprocamente, suponhamos que H seja um subgrupo próprio de G . Dados $r, s \in \frac{G}{H}$, existem $a, b \in G$ tais que $r = a + H$ e $s = b + H$. Como $c = \sup\{a, b\} \in G$ temos que $a, b \leq c$ e $r, s \leq t$, onde $t = c + H$. Seja $x = d + H$ tal que $r, s \leq x$. Então existem $g, h \in H$ tais que

$$a + g \leq x \text{ e } b + h \leq x.$$

Assim, $a \leq x - g$ e $b \leq x - h$. Logo,

$$\begin{aligned} \sup\{a, b\} &\leq \sup\{x - g, x - h\} \\ &= x + \sup\{-g, -h\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x &\geq \sup\{a, b\} - \sup\{-g, -h\} \\ &= \sup\{a, b\} + \inf\{g, h\}. \end{aligned}$$

Como $\inf\{g, h\} \in H$ temos que $t \leq x$, isto é, $t = \sup\{r, s\} \in \frac{G}{H}$. Portanto, $\frac{G}{H}$ é um l-grupo. Finalmente,

$$\begin{aligned} \pi(\sup\{a, b\}) &= t \\ &= \sup\{r, s\} \\ &= \sup\{\pi(a), \pi(b)\}. \end{aligned}$$

Assim, π um l-homomorfismo. ■

Exemplo 1.8 *Sejam $G = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, onde cada G_λ é um l-grupo, e $H = \sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$. Então H é um subgrupo convexo próprio de G . Logo, $\frac{G}{H}$ é um l-grupo e π é um l-homomorfismo.*

Proposição 1.14 *Sejam G e G' l-grupos e $\phi : G \rightarrow G'$ um l-homomorfismo injetor. Então ϕ é uma o-imersão.*

Prova. Seja $a \in G$ com $a \geq 0$. Então

$$0 = \phi(\inf\{a, 0\}) = \inf\{\phi(a), 0\}.$$

Logo, $\phi(a) \geq 0$, isto é, $\phi(G_+) \subseteq G'_+ \cap \phi(G)$.

Reciprocamente, seja $b \in G'_+ \cap \phi(G)$. Então existe $a \in G$ tal que $b = \phi(a)$. Como $0 = \inf\{b, 0\}$ temos que

$$\begin{aligned} \phi(\inf\{a, 0\}) &= \inf\{\phi(a), 0\} \\ &= \inf\{b, 0\} = 0. \end{aligned}$$

Assim, $\inf\{a, 0\} = 0$, pois ϕ é injetora. Logo, $a \in G_+$, isto é, $G'_+ \cap \phi(G) \subseteq \phi(G_+)$. Portanto,

$$\phi(G_+) = G'_+ \cap \phi(G),$$

isto é, $\phi(G)$ é um subgrupo ordenado de G' . ■

Capítulo 2

Grupos de Divisibilidade

Neste capítulo apresentaremos uma família de grupos filtrantes que não são grupos de divisibilidade.

2.1 Anéis

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados básicos da Teoria dos Anéis. O leitor interessado em mais detalhes poderá consultar [1, 8].

Um *anel* R é um grupo Abelian aditivo munido com uma operação binária

$$(x, y) \rightarrow xy,$$

chamada multiplicação, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $x(yz) = (xy)z$, para todos $x, y, z \in R$.
2. $x(y + z) = xy + xz$, $(x + y)z = xz + yz$, para todos $x, y, z \in R$.

Se um anel R satisfaz as propriedades:

3. Existe $1 \in R$ tal que $x1 = 1x = x$, para todo $x \in R$, dizemos que R é um *anel com identidade*.
4. $xy = yx$, para quaisquer $x, y \in R$, dizemos que R é um *anel comutativo*.

Se um anel R satisfaz a propriedade:

5. Para todos $x, y \in R$, $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$, dizemos que R é um *anel sem divisores de zero*.

Dizemos que um elemento $x \in R$ é um *divisor de zero* se existir $y \in R$, $y \neq 0$ tal que $xy = 0$. Se $x \neq 0$, dizemos que x é um *divisor próprio de zero*. Se $x \in R$ não é um divisor de zero, dizemos que x é um *elemento regular* do anel R .

Se R é um anel comutativo, com identidade e sem divisores de zero, dizemos que R é um *domínio*. Um elemento $x \in R$ é dito uma *unidade* de R se existir $y \in R$ tal que $xy = yx = 1$. Denotaremos por $U(R)$ o conjunto de todas as unidades de R . Se $U(R) = R^* = R - \{0\}$, dizemos que R é um *corpo*.

Neste trabalho, todo anel R , salvo menção explícita em contrário, será um anel comutativo com identidade.

Sejam R e R' dois anéis. Um *homomorfismo de anéis* é uma função $\phi : R \rightarrow R'$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$, para todos $x, y \in R$;
2. $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$, para todos $x, y \in R$;
3. $\phi(1) = 1$.

Um subconjunto não vazio S de um anel R é um *subanel* de R se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $x - y \in S$, para todos $x, y \in S$;
2. $xy \in S$, para todos $x, y \in S$;
3. $1 \in S$.

Um subconjunto não vazio I de um anel R é um *ideal* de R se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $x - y \in I$, para todos $x, y \in I$;
2. $rx \in I$, para todo $x \in I$ e $r \in R$.

Um ideal I de R é dito *finitamente gerado* se existir um subconjunto finito $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de R tal que

$$\begin{aligned} I &= \langle S \rangle = Rx_1 + Rx_2 + \dots + Rx_n \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n r_i x_i : r_i \in R \right\}. \end{aligned}$$

O ideal $I = Rx = xR = \langle x \rangle$ é chamado *ideal principal* gerado por $x \in R$. Um domínio R é um *domínio de ideais principais* se todo ideal de R é principal.

Sejam I e J dois ideais de R . Então

$$I + J = \{x + y : x \in I, y \in J\}$$

e

$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i y_i : x_i \in I, y_i \in J \right\}$$

são ideais de R .

Seja P um ideal de um anel R . Dizemos que P é um *ideal primo* de R se $P \neq R$ e se $xy \in P$, para todos $x, y \in R$, então $x \in P$ ou $y \in P$.

Um ideal M de um anel R é um *ideal maximal* de R se $M \neq R$ e J é um ideal de R tal que $M \subseteq J \subseteq R$, então $M = J$ ou $J = R$. Dizemos que R é um *anel local* se R tem um único ideal maximal. Neste caso, $U(R) = R - M$.

Observação 2.1 *Todo ideal maximal é primo.*

Proposição 2.1 *Seja R um anel. Então M é um ideal maximal de R se, e somente se, para todo $x \notin M$ existe $r \in R$ tal que $1 + xr \in M$.*

Prova. Para cada $x \notin M$ temos que $M \subsetneq M + \langle x \rangle$. Logo, por hipótese, $M + \langle x \rangle = R$. Como $1 \in R$ temos que $1 \in M + \langle x \rangle$, isto é, existe $r \in R$ tal que $1 + xr \in M$.

Reciprocamente, seja J um ideal de R tal que $M \subseteq J \subseteq R$. Suponhamos que $M \neq J$. Então existe $x \in J$ tal que $x \notin M$. Assim, por hipótese, existe $r \in R$ tal que $1 + xr \in M$. Logo,

$$1 = -xr + (1 + rx) \in J$$

e $J = R$. Portanto, M é um ideal maximal de R . ■

Seja R um anel. Dizemos que I é um *ideal próprio* de R se $I \neq R$.

Um subconjunto A de um anel R é um *sistema multiplicativo* de R se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $1 \in A$;
2. $ab \in A$, para todos $a, b \in A$.

Consideremos em $R \times A$ a seguinte relação de equivalência:

$$(x, a) \sim (y, b) \Leftrightarrow (xb - ya)c = 0, \text{ para algum } c \in A.$$

A classe de equivalência de (x, a) será denotada por $\frac{x}{a}$ e

$$\frac{R \times A}{\sim} = A^{-1}R.$$

Assim, podemos definir em $A^{-1}R$ as seguintes operações binárias:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= \frac{bx + ay}{ab} \\ \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} &= \frac{xy}{ab}. \end{aligned}$$

É fácil verificar que estas operações estão bem definidas e $A^{-1}R$ é um anel comutativo com identidade, chamado o *anel das frações* de R , onde $\frac{0}{b}$ e $\frac{b}{b}$, para todo $b \in A$, é o elemento zero e o elemento identidade de $A^{-1}R$, respectivamente. Neste caso, temos também um homomorfismo de anéis

$$\varphi : R \rightarrow A^{-1}R$$

definido por

$$\varphi(x) = \frac{x}{1}.$$

Assim,

$$\ker \varphi = \{x \in R : xb = 0, \text{ para algum } b \in A\}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} x &\in \ker \varphi \\ \Leftrightarrow \frac{x}{1} &= \frac{0}{1} \\ \Leftrightarrow (x1 - 0 \cdot 1)b &= 0, \text{ para algum } b \in A \\ \Leftrightarrow xb &= 0, \text{ para algum } b \in A. \end{aligned}$$

Note que, este homomorfismo não é, em geral, injetor, pois

$$\ker \varphi = \{0\} \Leftrightarrow xb = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Lema 2.1 *Sejam R um domínio e $A = R^*$. Então*

$$K = A^{-1}R = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in R \text{ e } b \neq 0 \right\}$$

é um corpo, chamado o corpo quociente de R .

Seja R um anel. Um R -módulo V sobre R é um grupo Abelianado aditivo munido com uma aplicação

$$\begin{aligned} \cdot : R \times V &\longrightarrow V \\ (x, v) &\longmapsto x \cdot v \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $x(yv) = (xy)v$, para todos $x, y \in R$ e $v \in V$;
2. $x(u + v) = xu + xv$, para todo $x \in R$ e $u, v \in V$;
3. $(x + y)v = xv + yv$, para todos $x, y \in R$ e $v \in V$;
4. $1v = v$, para todo $v \in V$.

Note que, se R for um corpo, então um R -módulo V é um espaço vetorial sobre R .

Um subconjunto não vazio W de um R -módulo V é um R -submódulo de V se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $w - v \in W$, para todos $w, v \in W$;
2. $xw \in W$, para todo $x \in R$ e $w \in W$.

2.2 Seqüências Exatas

Uma seqüência de homomorfismos de grupos

$$\cdots \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} Q \longrightarrow \cdots$$

é dita *exata* em G se

$$\text{Im } \alpha = \ker \beta$$

ou, equivalentemente,

$$\beta\alpha(h) = 0, \forall h \in H$$

e cada $g \in G$ com $\beta(g) = 0$ tem a forma $g = \alpha(h)$, para algum $h \in H$. Uma seqüência é dita *exata* se ela é exata em cada um dos grupos que a constituem. Por exemplo, se H é um subgrupo de G , a seqüência

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} \frac{G}{H} \longrightarrow 0,$$

onde i é a inclusão e π a projeção canônica, é exata.

A seqüência

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} Q \longrightarrow 0$$

é exata se, e somente se, α for injetora e β for sobrejetora. Uma seqüência exata deste tipo é dita *seqüência exata curta*. Neste caso, dizemos que o grupo G é uma *extensão* de H por Q . Esta extensão é dita *cindível* ou *fatorável* quando existir um homomorfismo $\gamma : Q \rightarrow G$ tal que $\beta\gamma = I_Q$. Duas seqüências exatas curtas

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} Q \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G' \xrightarrow{\beta} Q \longrightarrow 0$$

são *equivalentes* se existir um isomorfismo $\phi : G \rightarrow G'$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{\alpha} & G & \xrightarrow{\beta} & Q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \phi & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{\alpha} & G' & \xrightarrow{\beta} & Q & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

comuta.

Exemplo 2.1 *Sejam H e Q grupos. Então a seqüência exata curta*

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} Q \longrightarrow 0,$$

onde $G = H \times Q$, $\alpha(h) = (h, 0)$ e $\beta(h, q) = q$, é cindível, pois existe $\gamma : Q \rightarrow G$ dado por $\gamma(q) = (0, q)$ tal que $\beta\gamma = I_Q$.

Definição 2.1 *Sejam H , G e Q grupos ordenados. Dizemos que uma seqüência exata*

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} Q \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

é *o-exata* se

$$\alpha(H_+) = \alpha(H) \cap G_+ \text{ e } \beta(G_+) = Q_+.$$

Neste caso, é fácil verificar que α e β são *o-homomorfismos*. O grupo G é chamado uma *o-extensão* de H por Q .

Observação 2.2 *Se G é uma o-extensão de H por Q , então H pode ser visto como um subgrupo convexo de G identificando H com $\ker \beta$. Neste caso, a ordenação de Q será a ordem quociente de $\frac{G}{H}$. De fato, como α é injetora temos que $\ker \alpha = \{0\}$ e, assim,*

$$\frac{H}{\{0\}} \simeq \text{Im } \alpha.$$

Mas, $\text{Im } \alpha = \ker \beta$; logo, $H \simeq \ker \beta$. Agora, dados $a, b \in G$ tais que $0 \leq b \leq a$ e $a \in \ker \beta$, obtemos que $\beta(a) = 0$ e $0 = \beta(0) \leq \beta(b) \leq \beta(a) = 0$, ou seja, $0 \leq \beta(b) \leq 0$. Daí, $\beta(b) = 0$, ou seja, $b \in \ker \beta$. Portanto, H é convexo. Como β é sobrejetora temos que

$$\frac{G}{H} \simeq Q.$$

Logo, a ordem de Q será a ordem quociente de $\frac{G}{H}$.

Definição 2.2 *Sejam α e β o-homomorfismos. Dizemos que a seqüência exata (2.1) é lex-exata se*

$$G_+ = \{a \in G : \beta(a) > 0 \text{ ou } a \in \alpha(H_+)\}.$$

Neste caso, o grupo G é chamado uma lex-extensão de H por Q .

Proposição 2.2 *Toda seqüência lex-exata é o-exata.*

Prova. Seja

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} Q \longrightarrow 0$$

uma seqüência lex-exata. Dado $x \in Q_+$, existe $a \in G$ tal que $x = \beta(a)$. Como $\beta(a) \geq 0$ temos que $\beta(a) > 0$ ou $\beta(a) = 0$. Logo, se $\beta(a) > 0$, então $a \in G_+$ e $x \in \beta(G_+)$, isto é, $\beta(G_+) = Q_+$. Se $\beta(a) = 0$, então $a \in \alpha(H_+)$ e, assim, $a \in G_+$ e $x \in \beta(G_+)$, isto é, $\beta(G_+) = Q_+$.

Finalmente, se $a \in \alpha(H) \cap G_+$, então existe $r \in H$ tal que $a = \alpha(r)$ e $a \in G_+$. Assim, $r \geq 0$, pois se $r < 0$, teríamos $a = \alpha(r) < 0$. Logo, $a \in \alpha(H_+)$, isto é, $\alpha(H_+) = \alpha(H) \cap G_+$.

■

Exemplo 2.2 Se H e Q são grupos ordenados e $G = H \oplus_D Q$, onde

$$G_+ = \{(a, b) : b > 0 \text{ ou } b = 0 \text{ e } a \geq 0\},$$

então a seqüência exata

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0,$$

é lex-exata.

Observação 2.3 Se a seqüência exata (2.1) é lex-exata, então H é um subgrupo fortemente convexo. De fato, sendo a seqüência exata (2.1) lex-exata, pela Proposição 2.2, essa seqüência é o-exata e daí, pela Observação 2.2, $H \simeq \ker \beta$. Agora, sejam $x \in H$ e $b \in G$ tais que $x \leq b$, ou seja, $b - x \geq 0$. Logo,

$$\beta(b - x) > 0 \text{ ou } b - x \in \alpha(H_+).$$

De $\beta(b - x) > 0$, vem $\beta(b) > \beta(x)$. Mas, $x \in \ker \beta$; logo, $\beta(x) = 0$. Assim, $\beta(b) > 0$ e $b > 0$. Se $b - x \in \alpha(H_+)$, então existe $a \in H_+$ tal que $b - x = \alpha(a)$. Daí, $\beta(b - x) = \beta\alpha(a) = 0$, e assim, $\beta(b) - \beta(x) = 0$. Mas, $x \in \ker \beta$; logo, $\beta(b) = 0$ e $b \in H$.

Dizemos que a seqüência exata (2.1) é lex-cindível se existir um o-isomorfismo $\phi : G \rightarrow H \oplus_D Q$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{\alpha} & G & \xrightarrow{\beta} & Q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \phi & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{i} & H \oplus_D Q & \xrightarrow{\pi} & Q & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2.2)$$

comuta.

Proposição 2.3 Toda seqüência lex-exata e cindível é lex-cindível.

Prova. Basta mostrar que $\phi(G_+) = (H \oplus_D Q)_+$. Como

$$G_+ = \{a \in G : \beta(a) > 0 \text{ ou } a \in \alpha(H_+)\}$$

temos que

$$\begin{aligned} \phi(G_+) &= \{(c, r) : (c, r) = \phi(a), \text{ para algum } a \in G_+\} \\ &= \{(c, r) : r > 0 \text{ ou } r = 0 \text{ e } c \geq 0\} \\ &= (H \oplus_D Q)_+, \end{aligned}$$

pois $\beta(a) = \pi\phi(a) = r$ e

$$(c, r) = \phi(a) \in \phi\alpha(H_+) = i(H_+) = \{(x, 0) : x \in H_+\}.$$

■

Teorema 2.1 *Sejam G uma lex-extensão de H por Q e $H, Q \neq \{0\}$. Então:*

1. G é filtrante se, e somente se, Q é filtrante;
2. G é um l-grupo se, e somente se, H é um l-grupo e Q é totalmente ordenado.

Prova. 1. Suponhamos que G seja filtrante. Dados $x, y \in Q$, existem $a, b \in G$ tais que $x = \beta(a)$ e $y = \beta(b)$. Como G é filtrante temos que existe $c \in G$ tal que $a, b \leq c$. Fazendo $z = \beta(c) \in Q$, obtemos

$$x, y \leq z.$$

Logo, Q é filtrante.

Reciprocamente, suponhamos que Q seja filtrante. Para cada $a, b \in G$ temos que $\beta(a), \beta(b) \in Q$. Logo, existe $\beta(c) \in Q$ tal que $\beta(a), \beta(b) \leq \beta(c)$. Como Q é filtrante e $Q \neq \{0\}$ temos que existe $\beta(r) \in Q$ tal que $\beta(r) > 0$. Fazendo $\beta(e) = \beta(c + r)$, obtemos que

$$\beta(a), \beta(b) < \beta(e) \text{ e } a, b < e.$$

Assim, G é filtrante.

2. Suponhamos que G seja um l-grupo. Como G é uma lex-extensão temos que H é um subgrupo fortemente convexo de G . Logo, pela Proposição 1.12, H é um subgrupo próprio de G . Portanto, H é um l-grupo.

Suponhamos, por absurdo, que existam $x, y \in Q$ tais que $x \not\leq y$ e $y \not\leq x$. Sejam $a, b \in G$ tais que $x = \beta(a)$, $y = \beta(b)$ e $c = \sup\{a, b\} \in G$. Então $x, y \leq z$, onde $z = \beta(c)$. Como x e y não são comparáveis temos que $x, y < z$. Assim,

$$\sup\{c - a, c - b\} = c - \sup\{a, b\} > 0,$$

o que é uma contradição.

Reciprocamente, suponhamos que H seja um l-grupo e Q totalmente ordenado. Dados $a, b \in G$, temos que $\beta(a), \beta(b) \in Q$. Podemos, sem perda de generalidade, supor que $\beta(a) \leq \beta(b)$. Então $a + c \leq b$, para todo $c \in \alpha(H)$, pois $\beta(c) = 0$. Se $a = b$, então

$c \leq 0$, para todo $c \in \alpha(H)$ e, assim, $H = \{0\}$, o que é uma contradição. Logo, $a < b$ e $b = \sup\{a, b\}$ existe. Portanto, G é um l-grupo. ■

Corolário 2.1 *Se G é uma o-extensão de H por Q e G é totalmente ordenado, então a seqüência é lex-exata e H e Q são totalmente ordenados.* ■

Corolário 2.2 *Se G é um l-grupo e H é um subgrupo fortemente convexo de G , então $\frac{G}{H}$ com a ordem quociente é totalmente ordenado.*

Prova. Se H é um subgrupo fortemente convexo de G , então a seqüência

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} \frac{G}{H} \longrightarrow 0$$

é lex-exata, isto é, G é uma lex-extensão de H por $\frac{G}{H}$. Portanto, pelo Teorema 2.1, $\frac{G}{H}$ é totalmente ordenado. ■

2.3 Grupos de Divisibilidade

Sejam K um corpo e $K^\bullet = K - \{0\}$ o grupo multiplicativo de K . Uma *semi-valorização* de K é uma função ν de $K^\bullet$ em um grupo ordenado G tal que, para todos $x, y \in K^\bullet$,

1. $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$;
2. $\nu(x + y) \geq \inf_{\nu(K^\bullet)} \{\nu(x), \nu(y)\}$, com $x + y \neq 0$;
3. $\nu(-1) = 0$.

$\nu(K^\bullet)$ é chamado o *grupo de semi-valores* de ν .

A função ν pode ser estendida a K definindo $\nu(0) = \infty$, onde $\infty > g$ e

$$g + \infty = \infty + g = \infty + \infty = \infty, \forall g \in G \text{ e } \infty \geq \infty.$$

Neste caso, os axiomas 2. e 3. podem ser substituídos por um único axioma

$$(2)' \quad \nu(x - y) \geq \inf_{\nu(K)} \{\nu(x), \nu(y)\}.$$

Seja ν uma semi-valorização de K . O conjunto

$$R_\nu = \{x \in K : \nu(x) \geq 0\}$$

é chamado o *anel de semi-valorização* de K . Sejam ν_1 e ν_2 duas semi-valorizações de K tendo grupos de semi-valores G_1 e G_2 , respectivamente. Dizemos que ν_1 e ν_2 são *equivalentes* se existir um α -isomorfismo $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\nu_1} & G_1 \\ & \searrow \nu_2 & \downarrow \phi \\ & & G_2 \end{array}$$

comuta (i.e., $\phi\nu_1 = \nu_2$).

Sejam R um domínio, K seu corpo quociente e $U = U(R)$. Vamos considerar a operação binária no grupo quociente

$$G(R) = \frac{K^*}{U}$$

como sendo aditiva, $xU + yU = xyU$, para todos $x, y \in K^*$. Dados $xU, yU \in G(R)$, vamos definir

$$xU \leq yU \Leftrightarrow yx^{-1} \in R \Leftrightarrow y = rx \text{ para algum } r \in R.$$

Note que,

$$xU \leq yU \Leftrightarrow Ry \subseteq Rx,$$

onde Rx e Ry são R -submódulos cíclicos de K , gerados por x e y , respectivamente. Como

1. $Rx \subseteq Rx$, para todo $x \in K$;
2. $Rx \subseteq Ry$ e $Ry \subseteq Rx \implies Rx = Ry$, para todos $x, y \in K$;
3. $Rx \subseteq Ry$ e $Ry \subseteq Rz \implies Rx \subseteq Rz$, para todos $x, y, z \in K$,

temos que $\leq$ é uma relação de ordem parcial em $G(R)$. Além disso,

$$Ry \subseteq Rx \implies Ryz \subseteq Rxz, \forall x, y, z \in K^*.$$

Logo, a relação $\leq$ é compatível com a operação do grupo $G(R)$. Portanto, $G(R)$ é um grupo ordenado.

A projeção canônica

$$\omega : K \longrightarrow G(R)$$

definida por $\omega(x) = xU$ e $\omega(0) = \infty$ é uma semi-valorização de K .

Afirmção. $G(R)_+ = \omega(R^*)$ e $G(R)$ é filtrante.

De fato,

$$\begin{aligned} G(R)_+ &= \{xU \in G(R) : x \in K^* \text{ e } xU \geq U\} \\ &= \{xU : x \in R^*\} \\ &= \omega(R^*). \end{aligned}$$

Finalmente, dado $g \in G(R)$, existe $x \in K^*$ tal que $g = \omega(x)$. Como $x = \frac{r}{s}$, com $r, s \in R^*$, temos que

$$\begin{aligned} g &= \omega(r) - \omega(s) \\ &= rU - sU \in G(R)_+ - G(R)_+. \end{aligned}$$

Portanto, $G(R) = \langle G(R)_+ \rangle$, isto é, $G(R)$ é filtrante.

O grupo ordenado $G(R)$ é chamado o *grupo de divisibilidade* de R . Esta terminologia expressa a analogia com a situação clássica da divisão em $\mathbb{Z}$. Mais geralmente, um grupo ordenado G é chamado um *grupo de divisibilidade* se existir um domínio R tal que G é o-isomorfo a $G(R)$.

Exemplo 2.3 *Seja R um domínio de fatoração única. Então $G(R)$ é o-isomorfo a*

$$H = \sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, G_\lambda = \mathbb{Z}.$$

De fato, sejam

$$\mathbf{P} = \{p \in R : p \text{ é um elemento irredutível}\}$$

e K seu corpo quociente. Como R é um domínio de fatoração única temos que todo $x \in K^$ pode ser escrito de modo único na forma*

$$x = u \prod_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda^{n_\lambda}, p_\lambda \in \mathbf{P}, u \in U \text{ e } n_\lambda \in \mathbb{Z}.$$

Seja

$$\begin{aligned} \phi : G(R) &\longrightarrow H \\ xU &\longmapsto (n_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \end{aligned}.$$

Então é fácil verificar que ϕ é um o-isomorfismo.

Uma semi-valorização ν de K é chamada uma *semi-valorização aditiva* se

$$\nu(x) < \nu(y) \Rightarrow \nu(x+y) = \nu(x), \text{ quando } x+y \in K^*.$$

Proposição 2.4 *Sejam R um domínio e K seu corpo quociente. Então uma semi-valorização ν de K é aditiva se, e somente se, R_ν é local.*

Prova. Suponhamos que ν seja uma semi-valorização aditiva de K . Então é fácil verificar que

$$U(R_\nu) = R_\nu - M,$$

onde

$$M = \{x \in K^* : \nu(x) > 0\}$$

é um ideal maximal de R_ν . Portanto, R_ν é local.

Reciprocamente, suponhamos que R_ν seja local. Sejam $x, y \in K^*$, com $x+y \in K^*$ e $\nu(x) < \nu(y)$. Então

$$\nu\left(\frac{y}{x}\right) = \nu(y) - \nu(x) > 0.$$

Assim, $\frac{y}{x} \in M$ e $1 + \frac{y}{x} \notin M$. Logo,

$$0 = \nu\left(1 + \frac{y}{x}\right) = \nu(x+y) - \nu(x),$$

isto é,

$$\nu(x+y) = \nu(x).$$

Portanto, ν é aditiva. ■

Seja ν uma semi-valorização de K com anel de semi-valorização R_ν e grupo de semi-valores G . Então G é um l-grupo se, e somente se, $G(R_\nu)$ é um l-grupo. Neste caso, ν é chamada uma *demi-valorização* de K . G é um grupo totalmente ordenado se, e somente se, $x \in R_\nu$ ou $x^{-1} \in R_\nu$, para todo $x \in K^*$. Neste caso, ν é chamada uma *valorização* de K .

Definição 2.3 *Um anel R é um domínio de Bézout se qualquer ideal principal de R é finitamente gerado.*

Teorema 2.2 (Krull-Jaffard-Ohm) [5, p.215] *Seja G um l-grupo. Então existe um domínio de Bézout R tal que G é, a menos de o-isomorfismo, o grupo de divisibilidade de R .* ■

Sejam ν e ω duas valorizações de K tendo anéis de valorizações R_ν e R_ω , respectivamente. Dizemos que ν e ω são independentes se $\langle 0 \rangle$ é o único ideal primo de $R_\nu \cap R_\omega$ ou, equivalentemente, $K = R_\nu R_\omega$.

Teorema 2.3 (Teorema da Aproximação) [5, p.282] *Sejam $\nu_1, \dots, \nu_n$ valorizações de K , duas a duas independentes, $a_1 \in G_1, \dots, a_n \in G_n$ e $x_1, \dots, x_n \in K$. Então existe $x \in K$ tal que*

$$\nu_i(x - x_i) = a_i,$$

para todo $i = 1, \dots, n$. ■

2.4 V-Homomorfismos

Sejam G um grupo ordenado e $a_0, a_1, \dots, a_n \in G$. Definimos a expressão

$$a_0 \geq \inf_G \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

por

$$a_0 \geq \inf_G \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \Leftrightarrow a_0 \geq a \text{ para todo } a \in G \text{ tal que } a \leq a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Sejam G e G' grupos ordenados e $\sigma : G \rightarrow G'$ um homomorfismo de grupos. Dizemos que σ é um *V-homomorfismo* se para quaisquer $a_0, a_1, \dots, a_n \in G$,

$$a_0 \geq \inf_G \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \Rightarrow \sigma(a_0) \geq \inf_{G'} \{\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)\}.$$

Um *V-isomorfismo* é um isomorfismo onde ele e seu inverso são V-homomorfismos. Uma *V-imersão* de G em G' é um V-homomorfismo injetor. Um subgrupo H de G é um *V-subgrupo* se a função inclusão é um V-homomorfismo.

Proposição 2.5 *Todo V-homomorfismo é um o-homomorfismo.*

Prova. Sejam G e G' grupos ordenados, $\sigma : G \rightarrow G'$ um V-homomorfismo e $a, b \in G$, com $a \leq b$. Então

$$b \geq \inf_G \{a, b\} \Rightarrow \sigma(b) \geq \inf_{G'} \{\sigma(a), \sigma(b)\}.$$

Logo, $\sigma(a) \leq \sigma(b)$. Portanto, σ é um o-homomorfismo. ■

Proposição 2.6 *Seja ν uma semi-valorização de K com grupo de semi-valores G . Se β é um V -homomorfismo de G em um grupo ordenado G' , então $\beta\nu$ é uma semi-valorização de K .*

Prova. Sejam $\nu : K \rightarrow G$ uma semi-valorização de K e $\beta : G \rightarrow G'$ um V -homomorfismo. Então $\beta\nu : K \rightarrow G'$ e para todos $x, y \in K^*$, obtemos

$$1. \beta\nu(xy) = \beta(\nu(x) + \nu(y)) = \beta(\nu(x)) + \beta(\nu(y)) = \beta\nu(x) + \beta\nu(y).$$

$$2. \text{ Como } \nu(x + y) \geq \inf_G \{\nu(x), \nu(y)\} \text{ temos que}$$

$$\begin{aligned} \beta\nu(x + y) &\geq \inf_{G'} \{\beta(\nu(x)), \beta(\nu(y))\} \\ &= \inf_{G'} \{\beta\nu(x), \beta\nu(y)\}. \end{aligned}$$

$$3. \beta\nu(-1) = \beta(\nu(-1)) = \beta(0) = 0.$$

Finalmente, $\beta\nu(0) = \infty$. ■

Exemplo 2.4 *Sejam*

$$\mathbf{P} = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ é um número primo}\}$$

e $\mathbb{Q}$ o corpo dos números racionais. Como $\mathbb{Z}$ é um domínio de fatoração única temos que todo $x \in \mathbb{Q}^*$ pode ser escrito de modo único na forma

$$x = u \prod_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda^{n_\lambda}, p_\lambda \in \mathbf{P}, u \in U \text{ e } n_\lambda \in \mathbb{Z}.$$

Sejam

$$H = \sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, G_\lambda = \mathbb{Z},$$

e ν uma semi-valorização de $\mathbb{Q}$ definida por $\nu(x) = a \in H$, com $a(\lambda) = n_\lambda, \lambda \in \Lambda$. Agora, seja $\beta : H \rightarrow \mathbb{Z}$ um o -homomorfismo definido por

$$\beta(a) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda).$$

Então $\beta\nu$ não é uma semi-valorização, pois $\beta\nu(4) = 2$, $\beta\nu(9) = 2$ e $\beta\nu(4 + 9) = 1$. Portanto, a recíproca da Proposição 2.6 é falsa.

Corolário 2.3 *Se $\alpha : G \rightarrow G'$ e $\beta : G' \rightarrow Q$ são dois V -homomorfismos, então $\beta\alpha$ também o é.* ■

Proposição 2.7 *Se G é uma lex-extensão de H por Q , então α é um V -homomorfismo.*

Prova. Seja

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} Q \longrightarrow 0$$

uma seqüência lex-exata. Suponhamos que

$$a_0 \geq \inf_H \{a_1, \dots, a_n\}, \forall a_0, a_1, \dots, a_n \in H.$$

Logo, $a_0 \geq a$, para todo $a \in H$ tal que $a \leq a_1, \dots, a_n$. Como $a_0 - a \in H_+$ temos que

$$\alpha(a_0) - \alpha(a) \in \alpha(H_+),$$

ou seja,

$$\alpha(a_0) \geq \alpha(a),$$

para todo $a \in H$ tal que $\alpha(a) \leq \alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)$. Portanto,

$$\alpha(a_0) \geq \inf_G \{\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)\},$$

isto é, α é um V -homomorfismo. ■

Proposição 2.8 *Seja G uma lex-extensão de H por Q . Se G e Q são l -grupos, então β é um V -homomorfismo, se e somente se, β é um l -homomorfismo.* ■

Teorema 2.4 *Seja G uma lex-extensão de H por Q . Então:*

1. *Se H filtrante, então β é um V -homomorfismo.*
2. *Se H não é filtrante, então β é um V -homomorfismo se, e somente se, Q satisfaz a propriedade*

$$\text{para } x, y \in Q, y > z \text{ para todo } z < x \Rightarrow y > x. \quad (2.3)$$

Prova. Seja

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} Q \longrightarrow 0$$

uma seqüência lex-exata. Suponhamos que

$$b_0 \geq \inf_G \{b_1, \dots, b_n\}, \forall b_0, b_1, \dots, b_n \in G.$$

Devemos provar que

$$\beta(b_0) \geq \inf_Q \{\beta(b_1), \dots, \beta(b_n)\},$$

isto é, $\beta(b_0) \geq x$, para todo $x \in Q$ tal que

$$x \leq \beta(b_1), \dots, \beta(b_n).$$

Seja $b \in G$ tal que $\beta(b) = x$. Então $\beta(b_i - b) \geq 0$, para cada $i = 1, \dots, n$.

1. Suponhamos que H seja filtrante. Se $\beta(b_i - b) > 0$, então $b_i - b \geq 0$, ou seja, $b_i \geq b$, para cada $i = 1, \dots, n$. Se $\beta(b_i - b) = 0$, então $b_i - b \in \alpha(H_+)$, para cada $i = 1, \dots, n$. Em qualquer caso, $a_i \leq b_i - b$, para algum $a_i \in \alpha(H)$, ou seja, $b \leq b_i - a_i$, para algum $a_i \in \alpha(H)$. Como H é filtrante temos que existe $a \in \alpha(H)$ tal que $a \leq a_1, \dots, a_n$. Logo, $b \leq b_i - a$ e $b + a \leq b_1, \dots, b_n$. Como

$$b_0 \geq \inf_G \{b_1, \dots, b_n\}$$

temos que $b_0 \geq b + a$. Portanto,

$$\beta(b_0) \geq \beta(b + a) \geq \beta(b) = x.$$

2. Suponhamos que H não seja filtrante e que β seja um V-homomorfismo. Sejam $y, z \in Q$ tais que $z > w$ para todo $w < y$. Então existem $c, d \in G$ tais que $y = \beta(c)$ e $z = \beta(d)$. Como H não é filtrante, podemos encontrar $r, s \in \alpha(H)$ tais que não existe $t \in \alpha(H)$ com $t \leq r, s$. Suponhamos que $e \leq c + r, c + s$. Então $\beta(e) \leq y$. Se $\beta(e) = y$, então $e = c + u$, para algum $u \in \alpha(H)$. Assim, $t \leq r, s$, o que é uma contradição. Logo, $\beta(e) < y$. Por hipótese, $\beta(e) < z$. Logo, $d > e$. Como β é um V-homomorfismo temos que

$$z \geq \inf_Q \{\beta(c + r), \beta(c + s)\} = \beta(c) = y.$$

Reciprocamente, suponhamos que H não seja filtrante e que Q satisfaça a propriedade 2.3. Seja $w \in Q$ tal que $w < x$. Para cada $c \in G$ tal que $\beta(c) = w$ temos que $b_i \geq c$, para cada $i = 1, \dots, n$, pois $\beta(b_i) \geq x > w$. Logo, $b_0 \geq c$. Assim, $b_0 \geq c + a$, para todo $a \in \alpha(H)$, pois $\beta(a) = 0$. Se $b_0 = c$, então $a \leq 0$, para todo $a \in \alpha(H)$. Logo, $H = \{0\}$, o que é uma contradição, pois H não é filtrante. Assim, $b_0 > c$, para cada $c \in G$ tal que $\beta(c) = w$, isto é, $\beta(b_0) > \beta(c) = w$. Portanto, pela propriedade 2.3, $\beta(b_0) \geq x$, ou seja, β é um V-homomorfismo. ■

Corolário 2.4 *Seja G uma lex-extensão de H por Q . Se Q é um l-grupo, então β é um V-homomorfismo.* ■

2.5 Grupos que não são Grupos de Divisibilidade

Nesta seção apresentaremos um método para construir uma classe de grupos filtrantes que não são grupos de divisibilidade. O primeiro exemplo de um grupo filtrante que não é um grupo de divisibilidade foi apresentado por Jaffard, o qual mostraremos a seguir:

Exemplo 2.5 *Seja*

$$H = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a + b \equiv 0 \pmod{2}\}.$$

Sabemos pelo Exemplo 1.4 que H é um grupo filtrante. Vamos provar que H não é um grupo de divisibilidade. Suponhamos, por absurdo, que H seja um grupo de divisibilidade. Então existe um domínio R tal que H é o-isomorfo a $G(R)$. Sejam K o corpo quociente de R e ω uma semi-valorização de K tendo G como seu grupo de semi-valores. Sejam $r, s \in R$ tais que

$$\omega(r) = (2, 2) \text{ e } \omega(s) = (3, 1).$$

Então

$$\begin{aligned} (c, d) &= \omega(r + s) \\ &\geq \inf\{(2, 2), (3, 1)\} \\ &> (1, 1), (2, 0). \end{aligned}$$

Assim, $c \geq 2$ e $d \geq 1$. Se $c = 2$, então $d \geq 2$. Se $d = 1$, então $c \geq 3$. Logo, em qualquer caso, $\omega(r + s) \geq \omega(r)$ ou $\omega(r + s) \geq \omega(s)$. Portanto, temos a relação entre os ideais cíclicos $\langle r + s \rangle \subseteq \langle r \rangle$ ou $\langle r + s \rangle \subseteq \langle s \rangle$, isto é, $\omega(r) \geq \omega(s)$ ou $\omega(s) \geq \omega(r)$, o que é uma contradição.

Lema 2.2 *Sejam G uma lex-extensão de H por Q , ν uma função de K^* sobre G e $\omega = \beta\nu$. Se $H \neq \{0\}$ e existem $x, y \in K^*$ tais que $\omega(x + y) < \omega(x), \omega(y)$, então ν não é uma semi-valorização de K .*

Prova. *Seja*

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} Q \longrightarrow 0$$

uma seqüência lex-exata. Como $\omega(x + y) < \omega(x), \omega(y)$ temos que $\nu(x + y) + a \leq \nu(x), \nu(y)$, pois $\beta(a) = 0$, para todo $a \in \alpha(H)$. Agora, suponhamos, por absurdo, que ν seja uma

semi-valorização de K . Então,

$$\begin{aligned}\nu(x+y) &\geq \inf\{\nu(x), \nu(y)\} \\ &\geq \nu(x+y) + a.\end{aligned}$$

Logo, $a \leq 0$, para todo $a \in \alpha(H)$ e, assim, $H = \{0\}$, o que é uma contradição. ■

Sejam $G = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, onde cada G_λ é um grupo filtrante, i uma imersão do grupo ordenado Q em G ,

$$\pi_\lambda : G \rightarrow G_\lambda$$

a projeção de G sobre o grupo fator G_λ e $i_\lambda = \pi_\lambda \circ i$. Então é fácil verificar que

$$i = \prod_{\lambda \in \Lambda} i_\lambda.$$

Como as π_λ são sempre V-homomorfismos temos que i é um V-homomorfismo se, e somente se, todas as i_λ são V-homomorfismos. Além disso, se ω é uma função de K^* sobre G e i é um V-homomorfismo, então ω é uma semi-valorização de K se, e somente se, cada $\lambda = i_\lambda \omega$ é uma semi-valorização de K . Se R_ω e R_λ são os anéis de semi-valores de ω e λ , respectivamente, então

$$R_\omega = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda.$$

Lema 2.3 *Sejam $G = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, onde cada G_λ é um grupo totalmente ordenado, i uma V-imersão do l-grupo Q em G e ω uma semi-valorização de K com grupo de semi-valores Q . Se Q satisfaz a propriedade*

$$\text{existem } a, b \in Q \text{ tais que } a \not\leq b \text{ e } b \not\leq a \text{ e tal que} \quad (2.4)$$

$$i_\lambda(a) \neq i_\lambda(b), \forall \lambda \in \Lambda,$$

então existem $x, y \in K^$ tais que $\omega(x+y) < \omega(x), \omega(y)$.*

Prova. Como ω é sobrejetora temos que existem $x, y \in K^*$ tais que $\omega(x) = a$ e $\omega(y) = b$. Seja $\lambda = i_\lambda \omega$. Desde que λ é uma semi-valorização de K , $i_\lambda(x) \neq i_\lambda(y), \forall \lambda \in \Lambda$, e Q um l-grupo temos que

$$\lambda(x+y) = \inf\{\lambda(x), \lambda(y)\}.$$

Logo,

$$i\omega = \prod_{\lambda \in \Lambda} \lambda \text{ e } \omega(x+y) = \inf\{\omega(x), \omega(y)\}.$$

Como a e b não são comparáveis temos que

$$\inf\{\omega(x), \omega(y)\} < \omega(x), \omega(y),$$

isto é, $\omega(x + y) < \omega(x), \omega(y)$. ■

Exemplo 2.6 Se $Q = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, então Q satisfaz a propriedade (2.4).

Teorema 2.5 Sejam G uma lex-extensão de H por Q , com Q um l-grupo que satisfaz a propriedade (2.4) e $H \neq \{0\}$. Então G não é um grupo de divisibilidade.

Prova. Seja

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} Q \longrightarrow 0$$

uma seqüência lex-exata. Suponhamos, por absurdo, que G seja um grupo de divisibilidade. Então existe um domínio R tal que G é o-isomorfo a $G(R)$. Sejam K o corpo quociente de R e ν uma semi-valorização de K tendo G como seu grupo de semi-valores. Como Q é um l-grupo temos, pelo Corolário 2.4, que β é um V-homomorfismo. Logo, pela Proposição 2.6, $\omega = \beta\nu$ é uma semi-valorização de K . Assim, pelo Lema 2.3, existem $x, y \in K^*$ tais que

$$\omega(x + y) < \omega(x), \omega(y).$$

Mas pelo Lema 2.2, ν não é uma semi-valorização de K , o que é uma contradição. Portanto, G não é um grupo de divisibilidade. ■

Corolário 2.5 Todo grupo ordenado H é um subgrupo ordenado de um grupo ordenado G , o qual não é um grupo de divisibilidade.

Prova. Seja Q qualquer l-grupo satisfazendo a propriedade (2.4). Então basta tomar $G = H \oplus_D Q$. ■

Exemplo 2.7 Sejam $Q = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $H = \mathbb{Z}$. Pelo exemplo 2.2 e o exemplo 1.6 temos que $G = H \oplus_D Q$ é uma lex-extensão. Portanto, pelo Teorema 2.3, G não é um grupo de divisibilidade.

Capítulo 3

Grupos de Jaffard

Neste capítulo apresentaremos uma nova classe de grupos filtrantes que não são grupos de divisibilidade. Estes grupos foram introduzidos por [2] e chamados “grupos de Jaffard”.

3.1 Grupos de Jaffard

Sejam $G = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, onde cada G_λ é um grupo totalmente ordenado e $|\Lambda| \geq 2$, e

$$\pi_\lambda : G \rightarrow G_\lambda$$

é a projeção de G sobre o grupo fator G_λ .

Dados $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ e H um subgrupo de G , fixemos

$$\begin{aligned} \pi_{\lambda_1 \lambda_2} : G &\rightarrow G_{\lambda_1} \times G_{\lambda_2} \\ (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} &\mapsto (a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}) \end{aligned}$$

e

$$H_{\lambda_1 \lambda_2} = \left\{ a = (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in G : H \cap \left[\bigcap_{\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2} \pi_\lambda^{-1}(a_\lambda) \right] \neq \emptyset \right\}.$$

Proposição 3.1 $H_{\lambda_1 \lambda_2}$ é um subgrupo de G , contendo H .

Prova. Como $\pi_\lambda(\mathbf{0}) = 0$, para todo $\lambda \in \Lambda$, temos que $\mathbf{0} \in \pi_\lambda^{-1}(0)$, para todo $\lambda \in \Lambda$, isto é,

$$\mathbf{0} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \pi_\lambda^{-1}(0).$$

Assim,

$$\mathbf{0} \in H \cap \left[\bigcap_{\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2} \pi_\lambda^{-1}(a_\lambda) \right],$$

exceto talvez nas posições λ_1 e λ_2 . Portanto, $\mathbf{0} \in H_{\lambda_1\lambda_2}$.

Sejam $a = (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, b = (b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in H_{\lambda_1\lambda_2}$. Então

$$a, b \in H \cap \left[\bigcap_{\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2} \pi_\lambda^{-1}(a_\lambda) \right].$$

Logo, $a, b \in H$ e

$$a, b \in \bigcap_{\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2} \pi_\lambda^{-1}(a_\lambda).$$

Assim, $a - b \in H$ e

$$a - b \in \bigcap_{\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2} \pi_\lambda^{-1}(a_\lambda).$$

Portanto, $a - b \in H_{\lambda_1\lambda_2}$, ou seja, $H_{\lambda_1\lambda_2}$ é um subgrupo de G .

Finalmente, se $a = (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in H$, então $a \in \pi_\lambda^{-1}(a_\lambda)$, para todo $\lambda \in \Lambda$, exceto talvez nas posições λ_1 e λ_2 . Logo,

$$a \in \bigcap_{\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2} \pi_\lambda^{-1}(a_\lambda).$$

Assim,

$$a \in H \cap \left[\bigcap_{\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2} \pi_\lambda^{-1}(a_\lambda) \right].$$

Portanto, $H \subseteq H_{\lambda_1\lambda_2}$. ■

Um *reticulado* em $\mathbb{R}^2$ é um subgrupo aditivo discreto infinito de $\mathbb{R}^2$ ou, equivalentemente, o subconjunto

$$\Gamma = \{x\alpha_1 + y\alpha_2 : x, y \in \mathbb{Z}\},$$

onde os vetores α_1, α_2 estão em $\mathbb{R}^2$, isto é, Γ é um $\mathbb{Z}$ -módulo sobre $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 3.1 $\mathbb{Z}\alpha$, onde $\alpha = (x, y)$ com $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ são reticulados em $\mathbb{R}^2$.

Um reticulado Γ em $\mathbb{R}^2$ é *próprio* se o posto de Γ é menor do que 2 ou

$$\Gamma = \pi_1(\Gamma) \times \pi_2(\Gamma),$$

isto é, os geradores α_1 e α_2 ficam nos eixos $\mathbb{R}$. Neste caso,

$$\Gamma = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2.$$

Caso contrário, o reticulado Γ é *não próprio*.

Proposição 3.2 *Todo reticulado em $\mathbb{R}$ é da forma $\mathbb{Z}\alpha$, para algum $\alpha > 0$.*

Prova. Seja Γ um reticulado em $\mathbb{R}$. Suponhamos que $\Gamma \neq \{0\}$. Então $\Gamma_+ \neq \emptyset$, pois se $\beta \in \Gamma$ e $\beta \neq 0$, então $-\beta \in \Gamma$ e $\beta > 0$ ou $-\beta > 0$. Seja $0 < \alpha = \inf \Gamma_+$.

Afirmção. $\alpha \in \Gamma_+$ e $\Gamma = \mathbb{Z}\alpha$.

De fato, se $\alpha \notin \Gamma_+$, então existem $\beta, \gamma \in \Gamma_+$ tais que

$$\alpha < \beta < \gamma < \alpha + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \gamma - \beta < \frac{\alpha}{2} < \alpha.$$

Logo, $\gamma - \beta \in \Gamma_+$, com $\gamma - \beta < \alpha$, o que é uma contradição. Como todo $\beta \in \Gamma$ pode ser escrito na forma

$$\beta = q\alpha + r, \text{ com } q \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq r < \alpha$$

temos, pela escolha de α , que $r = 0$, pois $r = \beta - q\alpha \in \Gamma$. Portanto, $\beta \in \mathbb{Z}\alpha$, isto é, $\Gamma = \mathbb{Z}\alpha$. ■

Um grupo filtrante G' é um *grupo de Jaffard* se G' pode ser aplicado V-homomorficamente sobre um subgrupo H de $G = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, tal que para algum par

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda, k = 1, 2,$$

G_{λ_k} é Arquimediano e as seguintes condições são satisfeitas:

- (J1) Para todo $r \in \mathbb{R}^*$, existe $a \in H$ tal que $\pi_{\lambda_1}(a) \neq r\pi_{\lambda_2}(a)$, para todos $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
- (J2) H é um V-subgrupo de $H_{\lambda_1\lambda_2}$;
- (J3) $\pi_{\lambda_1\lambda_2}(H) \not\subseteq \pi_{\lambda_1}(H) \times \pi_{\lambda_2}(H)$.

Observação 3.1 A definição acima foi inspirada no Lema 2.3, no Teorema 2.5 e no Exemplo 1.4.

Um subgrupo H de G é chamado um *subgrupo de Jaffard* de G se a aplicação identidade de H é a mesma da definição de grupo de Jaffard para H .

Teorema 3.1 Um grupo de Jaffard não é um grupo de divisibilidade.

Prova. Seja G' um grupo de Jaffard. Então existe um V-homomorfismo $\varphi : G' \rightarrow H$, onde H é um subgrupo de $G = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$. Suponhamos, por absurdo, que G' seja um grupo de divisibilidade. Então existe uma semi-valorização $\omega : K^* \rightarrow G'$, para algum

corpo K . Como $\varphi\omega$ é uma semi-valorização de K podemos supor $G' = H$. Definimos $\omega_k : K^* \rightarrow G_{\lambda_k}$, pondo $\omega_k = \pi_{\lambda_k}\omega$, $k = 1, 2$.

Afirmção. ω_k são valorizações independentes.

De fato, é claro que

$$\begin{aligned}\omega_k(xy) &= \pi_{\lambda_k}\omega(xy) \\ &= \pi_{\lambda_k}(\omega(x) + \omega(y)) \\ &= \pi_{\lambda_k}\omega(x) + \pi_{\lambda_k}\omega(y) \\ &= \omega_k(x) + \omega_k(y),\end{aligned}$$

para todos $x, y \in K^*$. Dados $x, y \in K$, com $x + y \neq 0$, obtemos que

$$\omega(x + y) \geq \inf_H \{\omega(x), \omega(y)\}.$$

Por (J2), a função $\psi : H \rightarrow H_{\lambda_1\lambda_2}$ definida por $\psi(a) = a$, para todo $a \in H$, é um V-homomorfismo. Logo,

$$(\psi\omega)(x) = \omega(x), \forall x \in K.$$

Assim,

$$\omega(x + y) \geq \inf_{H_{\lambda_1\lambda_2}} \{\omega(x), \omega(y)\}.$$

Como H é filtrante podemos escolher $a = (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in H$ tal que $a \leq \omega(x), \omega(y)$. Fixados $b_\lambda = a_\lambda$ se $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2$ e

$$b_{\lambda_k} = \min \{\omega_k(x), \omega_k(y)\}, \quad k = 1, 2,$$

obtemos que

$$b = (b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in H \quad \text{e} \quad b \leq \omega(x), \omega(y).$$

Como

$$\inf_H \{\omega(x), \omega(y)\} \leq \omega(x), \omega(y)$$

temos que

$$b \leq \inf_H \{\omega(x), \omega(y)\}.$$

Assim, $b \leq \omega(x + y)$. Logo,

$$\omega_k(x + y) = \pi_{\lambda_k}\omega(x + y) \geq \pi_{\lambda_k}(b) = b_{\lambda_k} = \inf_{H_{\lambda_1\lambda_2}} \{\omega_k(x), \omega_k(y)\},$$

ou seja,

$$\omega_k(x + y) \geq \inf_{H_{\lambda_1 \lambda_2}} \{\omega_k(x), \omega_k(y)\}.$$

Além disso, se $\omega(x) = (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, então, por (J1),

$$\begin{aligned} \omega_1(x) &= \pi_{\lambda_1}(\omega(x)) \\ &= a_{\lambda_1} \\ &\neq r a_{\lambda_2} \\ &= r \pi_{\lambda_2}(\omega(x)) \\ &= r \omega_2(x), \end{aligned}$$

ou seja, ω_1 e ω_2 são valorizações independentes.

Finalmente, pelo Teorema 2.2, dado $(c_{\lambda_1}, c_{\lambda_2}) \in \pi_{\lambda_1}(H) \times \pi_{\lambda_2}(H)$, existe $x \in K^*$ tal que

$$\omega_k(x) = c_{\lambda_k}.$$

Seja $\omega(x) = (c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in H$. Então

$$\begin{aligned} \pi_{\lambda_1 \lambda_2}(\omega(x)) &= (c_{\lambda_1}, c_{\lambda_2}) \\ &= (\omega_1(x), \omega_2(x)) \\ &= (\pi_{\lambda_1} \omega(x), \pi_{\lambda_2} \omega(x)) \in \pi_{\lambda_1}(H) \times \pi_{\lambda_2}(H). \end{aligned}$$

Logo,

$$\pi_{\lambda_1 \lambda_2}(H) \subseteq \pi_{\lambda_1}(H) \times \pi_{\lambda_2}(H).$$

o que contradiz (J3). Portanto, um grupo de Jaffard não é um grupo de divisibilidade. ■

3.2 Grupos de Jaffard em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Nesta seção vamos considerar $G = G_1 \times G_2$, onde $G_i = \mathbb{Z}$ é o grupo dos inteiros com a ordem usual.

Proposição 3.3 *Se H é um reticulado próprio não trivial de $G = G_1 \times G_2$, então H não é um grupo de Jaffard.*

Prova. Como H é um reticulado próprio de G há dois casos a serem considerados:

1^o Caso. Se $H = \mathbb{Z}\alpha$, onde $\alpha = (x, y) \in G$, com $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, então

$$H_+ = H \cap G_+.$$

Se $xy \geq 0$, então H é o-isomorfo a $\mathbb{Z}$, isto é, H é um l-grupo. Assim, pelo Teorema 2.1, H é um grupo de divisibilidade. Se $xy < 0$, então $H_+ = \{0\}$, ou seja, H é trivialmente ordenado. Assim, H não é filtrante. Portanto, em ambos os casos, H não pode ser um grupo de Jaffard.

2^o Caso. Se $H = \pi_1(H) \times \pi_2(H)$, então H é um l-grupo. De fato, dados $u = (r, s), v = (x, y) \in H$ e tomando

$$t = \min\{r, x\} \text{ e } z = \min\{s, y\},$$

obtemos que

$$w = (t, z) = \inf\{u, v\} \in H.$$

Assim, pelo Teorema 2.2, H é um grupo de divisibilidade. Portanto, H não pode ser um grupo de Jaffard. ■

Teorema 3.2 *Seja H um reticulado de G . Então H é um reticulado não próprio se, e somente se, H é um grupo de Jaffard.*

Prova. Suponhamos que H é um reticulado não próprio de G . Então existem vetores $\alpha_1, \alpha_2 \in G$ linearmente independentes tais que

$$H = \mathbb{Z}\alpha_1 \times \mathbb{Z}\alpha_2.$$

Assim, dado $a \in H$, existem $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$a = z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2$$

Como $\pi_1(a) = z_1\alpha_1$ e $\pi_2(a) = z_2\alpha_2$ temos que

$$z_1\alpha_1 + rz_2\alpha_2 \neq 0, \forall r \in \mathbb{Q}^*,$$

ou seja, $\pi_1(a) \neq r\pi_2(a)$. Assim, a condição (J1) está satisfeita.

Vamos provar (J2). Seja $c_i = (a_i, b_i) \in H$, $i = 0, 1, \dots, n$, e suponhamos que

$$c_0 \geq \inf_H \{c_1, \dots, c_n\}.$$

Mostraremos que

$$c_0 \geq \inf_G \{c_1, \dots, c_n\}.$$

Para cada $g \in G$,

$$g \leq c_i \implies g \leq \inf_G \{c_1, \dots, c_n\} \leq c_1, \dots, c_n.$$

Escolhemos $g = (a, b)$, onde

$$a = \min_{1 \leq i \leq n} \{a_i\} \text{ e } b = \min_{1 \leq i \leq n} \{b_i\}.$$

Afirmação. $g \leq c_0$.

De fato, se $\alpha_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, vamos determinar $a' \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a' \leq a \text{ e } \alpha' = (a', b) \in H,$$

ou seja, vamos determinar $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\begin{cases} x_1 p + x_2 q \leq a \\ y_1 p + y_2 q = b. \end{cases}$$

Se $d = \text{mdc}(y_1, y_2)$ divide b , então podemos determinar $p_0, q_0 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$y_1 p_0 + y_2 q_0 = b.$$

A solução geral da equação Diofantina é dada por

$$p = p_0 + k \frac{y_2}{d} \text{ e } q = q_0 - k \frac{y_1}{d}, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, se $a' = x_1 p_0 + x_2 q_0$, então

$$x_1 p + x_2 q = x_1 p_0 + x_2 q_0 + \frac{k(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{d} \leq a,$$

pois $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$. Então,

$$\alpha' = p_0 \alpha_1 + q_0 \alpha_2 \in H \text{ e } \alpha' \leq g \leq c_i$$

Desde que

$$c_0 \geq \inf_H \{c_1, \dots, c_n\}$$

segue-se que $\alpha' \leq c_0$. Em particular, $b \leq b_0$. Analogamente, mostra-se que $a \leq a_0$. Então $g \leq c_0$, isto é,

$$c_0 \geq \inf_G \{c_1, \dots, c_n\}.$$

Portanto, H é um V-subgrupo de G .

Reciprocamente, suponhamos que H é um grupo de Jaffard de G . Então, pela condição (J3), temos que $H \neq \pi_1(H) \times \pi_2(H)$. Portanto, H é um reticulado próprio de G . ■

Exemplo 3.2 *Seja*

$$H = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a + b \equiv 0(\text{mod } 2)\}.$$

Então H é um grupo de Jaffard, pois H é um reticulado não próprio.

Referências Bibliográficas

- [1] Atiyah, M. F. and MacDonalld, I. G., *Introduction to Commutative Algebra*, Addison Wesley, 1969.
- [2] Bastos, G.G., “A new class of ordered abelian groups which are not groups of divisibility”, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 306, pp. 17-20, 1988.
- [3] Cassels, J.W.S., *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Springer-Verlag, 1971.
- [4] Garcia, A. e Lequain, Y., *Álgebra: Um curso de introdução*, Projeto Euclides-IMPA. Rio de Janeiro, 1988.
- [5] Gilmer, R., *Multiplicative Ideal Theory*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1972.
- [6] Jaffard, P., “Un exemple concernant les groupes de divisibilité”, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 243, pp. 1264-1266, 1956.
- [7] Jaffard, P., *Les systèmes d'idéaux*, Dunod, Paris, 1960.
- [8] Larsen, M. D. and McCarthy, P. J., *Multiplicative Theory of Ideals*, Academic Press, New York, 1971.
- [9] Ohm, J., “Semi-valuation and groups of divisibility”, *Can. J. Math.*, 21, pp. 576-591, 1969.
- [10] Ribenboim, P., *Théorie des groupes ordonnés*, Bahia Blanca, 1957.