Análise Real
Professor: Alexandre de Bustamante Simas

4ª Prova

1. (2,0 pontos) Sejam V_0 um conjunto aberto do $\mathbb{R}^m$ e $\psi : V_0 \to V$ uma parametrização de classe C^k do conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$. Dados $U \subset \mathbb{R}^r$ aberto e $f : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^k, então prove que:

i) a composta $\psi^{-1} \circ f : U \to V_0 \subset \mathbb{R}^m$ é de classe C^k;

ii) para cada $x \in U$ e $z = \psi^{-1} \circ f(x)$, temos

$$(\psi^{-1} \circ f)'(x) = [\psi'(z)]^{-1} \circ f'(x).$$

Conclua que a mudança de coordenadas (de parametrizações C^k) é um difeomorfismo de classe C^k.

2. (2,0 pontos) Sejam $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação C^k. Seja $c \in \mathbb{R}^n$. Consideremos o conjunto

$$M = \{p \in U;\ f(p) = c \ \text{ e } \ f'(p) : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n \ \text{ é sobrejetiva}\}.$$

Então, prove que:

i) M é aberto em $f^{-1}(c)$;

ii) Se $M \neq \emptyset$, então M é uma superfície de classe C^k e dimensão m em $\mathbb{R}^{m+n}$;

iii) $TM_p = \ker f'(p)$, para todo $p \in M$.

Conclua que c é valor regular de f, então $f^{-1}(c)$ é uma superfície.

3. (2,0 pontos) Seja $M_m = f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ uma superfície obtida como imagem inversa de valor regular de uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$, de classe C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Fazendo $f = (f_1, \ldots, f_n)$, prove que $\operatorname{grad} f_1, \ldots, \operatorname{grad} f_n : M \to \mathbb{R}^{m+n}$ são campos de vetores normais de classe C^{k-1} em M, os quais, para cada $p \in M$, formam uma base de νM_p.

4. (1,0 ponto) Prove o *método dos multiplicadores de Lagrange*: Sejam $f : U \to \mathbb{R}$ uma função C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ e $M = \varphi^{-1}(c)$ a imagem inversa do valor regular c pela aplicação $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, de classe C^k. Mostre que para que $p \in M$ seja ponto crítico da restrição $f|_M$ é necessário e suficiente que existam números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tais que

$$\operatorname{grad} f(p) = \lambda_1 \operatorname{grad} \varphi_1(p) + \cdots + \operatorname{grad} \varphi_n(p).$$

5. (1,0 ponto) Prove a *forma local das imersões para variedades*: Seja $p \in M$ um ponto regular para a aplicação $f : M \to N$ $f : M \to N$ de classe C^k, $k \geq 1$. Então mostre que existe uma carta local $x : U \to \mathbb{R}^m$ em M, com $p \in U$, e um difeomorfismo C^k, $y : V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ ($V \subset N$ aberto) tais que $f(U) \subset V$ e $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \to x(U) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ é a aplicação de inclusão, i.e., $f_{xy}(w) = (w, 0)$.

6. (2,0 pontos) Prove o *Teorema de Stokes*: Seja M_n uma variedade diferenciável com bordo, compacta e orientada. Seja ω uma $(n-1)$-forma diferencial em M, e seja $i : \partial M \to M$ a aplicação de inclusão do bordo ∂M em M. Então, prove que,

$$\int_{\partial M} i^*\omega = \int_M d\omega.$$

Resolva os exercícios abaixo

7. (1,0 ponto) *Grupo Ortogonal.* Mostre que $\mathcal{O}(n)$ é uma superfície compacta de dimensão $\dfrac{n(n-1)}{2}$ e classe C^∞ em $\mathbb{R}^{n^2}$.

8. (1,5 ponto) Sejam $M_m, N_m \subset \mathbb{R}^n$ superfícies de classe C^k e $f : M \to N$ um difeomorfismo local. Mostre que se N é orientável, então M também é.

9. (1,5 ponto) a) Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auto-adjunta. Seja $f(x) = \langle Tx, x\rangle$. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar $x_1 \in S^{n-1}$ e $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que $Tx = \lambda x$.

b) Seja agora $V_1 = \{x_1\}^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n; \langle x_1, y\rangle = 0\}$. Mostre que $T(V_1) \subset V_1$ e $T : V_1 \to V_1$ é auto-adjunta.

c) Aplique este resultado indutivamente e conclua que $\mathbb{R}^n$ possui uma base de auto-vetores de T.

10. (1,5 ponto) Seja M_n uma variedade diferenciável compacta. Mostre que se M é orientável, então existe uma n-forma diferencial definida em M que não se anula em nenhum ponto.

11. (1,5 ponto) Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável. Se $m < n$ e $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, com $k > m$, mostre que $f^*\omega = 0$.

12. (1,5 ponto) Generalize o Teorema da Divergência para uma variedade n-dimensional com bordo em $\mathbb{R}^n$.

13. (2,0 pontos) Prove o *Teorema do ponto fixo de Brouwer*:

a) Seja M_n uma variedade diferenciável compacta e orientável com bordo $\partial M \neq \emptyset$. Mostre que não existe função diferenciável $f : M \to \partial M$, tal que $f|_{\partial M}$ é a identidade.

Dica: Use $(n-1)$-forma não-nula em ∂M (dada pelo exercício 10).

b) Prove o teorema do ponto fixo de Brouwer: Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ a bola $\{p \in \mathbb{R}^n; |p| \leq 1\}$. Toda aplicação diferenciável $g : B \to B$ possui um ponto fixo.

Dica: Se $g(p) \neq p$ para todo $p \in B$, a semi-reta começando em $g(p)$ e passando por p intersecta ∂B num único ponto, digamos $q = f(p)$.