**Análise Real**
Professor: Alexandre de Bustamante Simas

3ª Prova

**1. (2,0 pontos)** Prove a *forma local das submersões*, ou seja, demonstre o seguinte teorema: Sejam $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe $C^k$ $(k \geq 1)$. Suponha que para algum $z_0 \in U$, $f'(z_0) : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ é sobrejetiva. Dada uma decomposição em soma direta $\mathbb{R}^{m+n} = E \oplus F$, com $z_0 = (x_0, y_0)$, $x_0 \in E$, $y_0 \in F$, sendo tal que $\partial_2 f(z_0) = f'(z_0)|_F : F \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, então existe um difeomorfismo $h : V \times W \to Z$ de classe $C^k$, tal que $f \circ h(x, w) = w$, para todo $(x, w) \in V \times W$, onde $V \ni x_0$ é aberto em $E$, $W \ni f(z_0)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e $Z \ni z_0$ é aberto em $\mathbb{R}^{m+n}$, $Z \subset U$.

**2. (1,0 ponto)** Prove o *teorema da função implícita*, ou seja, demonstre o seguinte teorema: Sejam $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe $C^k (k \geq 1)$. Suponha que $\mathbb{R}^{m+n} = E \oplus F$ é uma decomposição em soma direta tal que, para $z_0 = (x_0, y_0) \in U$, a segunda parcial $\partial_2 f(z_0) : F \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Fazendo $f(z_0) = c \in \mathbb{R}^n$, existem abertos $V \subset E$ contendo $x_0$ e $Z \subset U$ contendo $z_0$ com a seguinte propriedade: $\forall x \in V$, **existe** um **único** $\xi(x) \in F$, tal que $(x, \xi(x)) \in Z$ e $f(x, \xi(x)) = c$. A aplicação $\xi : V \to F$ assim definida é de classe $C^k$. Obtenha $\xi'(x)$.

**3. (1,0 ponto)** Prove o *critério de Cauchy para integrais*, ou seja, demonstre o seguinte teorema: Uma função limitada $f : A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ retângulo, é integrável se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, existe $P$ partição de $A$, tal que $|U(f, P) - L(f, P)| < \varepsilon$.

**4. (2,0 pontos)** Prove o *teorema de Fubini*, ou seja, demonstra o seguinte teorema: Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ retângulos fechados. Seja $f : A \times B \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Defina, para $x \in A$, $g_x : B \to \mathbb{R}$ como $g_x(y) = f(x, y)$. Sejam,

$$L(x) = \underline{\int}_B g_x(y)dy = \underline{\int}_B f(x, y)dy;$$

e

$$U(x) = \overline{\int}_B g_x(y)dy = \overline{\int}_B f(x, y)dy.$$

Temos então que $L$ e $U$ são integráveis em $A$ e vale

$$\int_{A\times B} f = \int_A L = \int_A \left[\underline{\int}_B f(x, y)dy\right] dx,$$

e

$$\int_{A\times B} f = \int_A U = \int_A \left[\overline{\int}_B f(x, y)dy\right] dx.$$

**Resolva as questões abaixo**

**5. (1,0 ponto)** Sejam $F \subset \mathbb{R}^m$ um subconjunto fechado e $T \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto qualquer. Suponha dada uma aplicação $\varphi : F \times T \to F$ contínua em relação à segunda variável e tal que, para um certo $\lambda$, com $0 < \lambda < 1$, vale $|\varphi(x,t) - \varphi(y,t)| \leq \lambda |x - y|$, sejam quais forem $x, y \in F$ e $t \in T$. Mostre que existe uma aplicação contínua $\alpha : T \to F$ tal que $\varphi(\alpha(t), t) = \alpha(t)$ qualquer que seja $t \in T$.

**6. (1,0 ponto)** Mostre que a aplicação $f : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, definida por $f(X) = X^2$, é um difeomorfismo de uma vizinhança da identidade sobre outra vizinhança da identidade, mas não é um difeomorfismo local em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$.

**7. (1,0 ponto)** Seja $f : \mathbb{R}^{m+p} \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^1$. Suponha que $f(x_0) = 0$ e que $f'(x_0)$ tem posto $m$. Mostre que se $c$ é um ponto de $\mathbb{R}^m$ suficientemente próximo de 0, então a equação

$$f(x) = c$$

tem solução.

**8. (1,0 ponto)** Seja $C$ um conjunto de medida nula. Mostre que se existir $\int_A \chi_C$, então, necessariamente, $\int_A \chi_C = 0$.

**9. (1,0 ponto)** Use o teorema de Fubini para dar uma demonstração simples de que $\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial^2 f/\partial y \partial x$, se estas derivadas parciais são contínuas.

Dica: Note que se $\partial^2 f(a)/\partial x \partial y - \partial^2 f(a)/\partial y \partial x > 0$, então existirá um retângulo $A$ contendo $a$, tal que $\partial^2 f/\partial x \partial y - \partial^2 f/\partial y \partial x > 0$ em $A$.

**10. (1,0 ponto)** Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^1$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Suponha que existe $a \in U$, tal que $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo. Mostre que

$$\lim_{r \to 0} \frac{v(f(B[a;r]))}{v(B[a;r])} = |\det f'(a)|.$$

**11. (1,0 ponto)** Suponha que $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e não-negativa.

Mostre que $\displaystyle\int_{(0,1)} f$ existe se, e somente se, o limite $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f$ existe.

**Bônus 1. (1,5 ponto)** Seja $0 < a < 1$. Use a função $f(x) = ax + x^2\text{sen}(1/x)$, quando $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, para mostrar que o teorema da função inversa não é verdade se $f$ for apenas diferenciável.

**Bônus 2. (1,5 ponto)** Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo fechado. Seja $f_k$ uma sequência de funções limitadas, integráveis $f_k : A \to \mathbb{R}^m$ convergindo uniformemente para uma função contínua $f : A \to \mathbb{R}^m$. Mostre que $f$ é integrável e que

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k = \int_A f.$$