Análise Real
Professor: Alexandre de Bustamante Simas

2^{a} Prova

1. (1,0 ponto) Demonstre que se $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, é diferenciável em $a \in U$, então, $\forall u \in \mathbb{R}^m, u \neq 0$, a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ existe. Obtenha $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ em termos de $f'(a)$. Use a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$, para mostrar que a existência de todas as derivadas direcionais em um ponto não implica a diferenciabilidade de f neste ponto.

2. (2,0 pontos) Demonstre a regra da cadeia, ou seja, demonstre que se $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $g : V \to \mathbb{R}^p$, $V \subset \mathbb{R}^n$ aberto, e $f(U) \subset V$, são tais que f é diferenciável em $a \in U$ e g é diferenciável em $f(a) \in V$, então $g \circ f$ é diferenciável em a e

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

3. (2,0 pontos) Escolha a questão 3' ou a 3" para fazer.

3' Demonstre a desigualdade do valor médio, isto é, demonstre que se $f : U \to \mathbb{R}^n$ é contínua no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, o segmento $[a, a + h]$ está contido em U, e f é diferenciável em todos os pontos do segmento aberto $(a, a + h)$, então,

$$| f(a + h) - f(a) | \leq | h | \sup_{0<t<1} | f'(a + th) | .$$

Use a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ para concluir que não podemos ter uma igualdade do valor médio se $n > 1$.

3" Sejam $\mathbb{R}^m = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$, $k \leq m$, uma decomposição em soma direta e $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Mostre que uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 se, e somente se, $\forall x = (x_1, \ldots, x_k) \in U$, $x_i \in E_i$, as derivadas parciais $\partial_1 f(x) : E_1 \to \mathbb{R}^n, \ldots, \partial_k f(x) : E_k \to \mathbb{R}^n$ existem e, além disso, as aplicações $\partial_1 f : U \to \mathcal{L}(E_1, \mathbb{R}^n), \ldots, \partial_k f : U \to \mathcal{L}(E_k, \mathbb{R}^n)$ são contínuas. Conclua que f é de classe C^1 se, e somente se, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existem para todo $x \in U$ e são contínuas em $x \in U$.

Mostre ainda que se as derivadas parciais $\partial_1 f : U \to \mathcal{L}(E_1, \mathbb{R}^n), \ldots, \partial_k f : U \to \mathcal{L}(E_k, \mathbb{R}^n)$ são limitadas na vizinhança de $a \in U$, então f é contínua em a. Conclua que se $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ são limitadas em uma vizinhança de $a \in U$, então f é contínua em a.

Resolva as questões abaixo

4. (2,0 pontos) Obtenha a derivada de uma aplicação p-linear

$$f : \overbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}^{p \text{ vezes}} \to \mathbb{R}^n.$$

Conclua que $det'(I) \cdot H = tr(H)$, onde I é a matriz identidade $n \times n$ e $tr(H)$ é o traço da matriz H. *Dica:* Comece **provando** que se f é p-linear, então $\exists M > 0$ tal que $| f(x_1, \ldots, x_p) | \leq M \ |x_1| \cdots |x_p|$.

5. (1,0 ponto) Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Dada $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciável, o gradiente de f no ponto $x \in U$ é o vetor $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^m$ caracterizado pelo fato de que $\langle \nabla f(x), h \rangle = \frac{\partial f}{\partial h}(x)$. Uma superfície de nível da função f é a imagem inversa $f^{-1}(c)$ de um número $c \in \mathbb{R}$. Prove:

a) Se os valores de um caminho diferenciável $\lambda : J \to \mathbb{R}^m$, $J \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto, estão contidos na mesma superfície de nível de f, então mostre que cada vetor velocidade $\lambda'(t)$ é perpendicular ao gradiente de f no ponto $\lambda(t)$.

b) Fixado $x \in U$, entre todos os vetores $h \in \mathbb{R}^m$, com $\langle h, h \rangle = 1$, mostre que a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial h}(x)$ atinge seu valor máximo quando h é um múltiplo positivo do gradiente de f. Qual é esse valor máximo?

6. (2,0 pontos) Seja $f : U \to \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Seja x_0 um ponto crítico de f. Mostre que se a forma Hessiana é positiva definida, isto é, $\forall y \neq 0, y \in \mathbb{R}^m$, temos $f''(x_0) \cdot (y, y) > 0$, então x_0 é mínimo local estrito de f. Conclua que se x_0 é um ponto crítico tal que $f''(x_0)$ é negativa definida, ou seja, $\forall y \neq 0, y \in \mathbb{R}^m$, temos $f''(x_0) \cdot (y, y) < 0$, então x_0 é máximo local estrito de f.

7. (1,0 ponto) Dado $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função k vezes diferenciável em $x \in U$. Mostre que $f^{(k)}(x) : (\mathbb{R}^m)^k \to \mathbb{R}$ é a forma k-linear definida por

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x) dx_{i_1} \otimes \cdots \otimes dx_{i_k}.$$

Bônus. (1,0 ponto) Mostre que $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, é diferenciável no ponto a se, e somente se, para todo u, com $|u| = 1$, a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ existe, é uma função linear de u e o limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t} = Tu$$

é uniforme em $u \in S^{n+1}$.