Análise Real
Professor: Alexandre de Bustamante Simas

1ª Prova

1. Escolha uma das duas questões abaixo (1' ou 1"):

1'. Mostre que uma função $f : A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$, é contínua se, e somente se, para todo conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, a imagem inversa $f^{-1}(U)$ é um conjunto aberto em A. Conclua que vale o seguinte resultado: $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^n$, é contínua se, e somente se, para todo conjunto U aberto (resp. fechado) em B, a imagem inversa $f^{-1}(U)$ é um conjunto aberto (resp. fechado) em A.

1". Mostre que uma função $f : A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$ é contínua no ponto $a \in A$ se, e somente se, para toda sequência $(x_k) \in A$, tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, temos $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$. Conclua que se $K \subset \mathbb{R}^m$ é compacto, então $f(K) \subset \mathbb{R}^n$ é compacto.

2. Escolha uma das duas questões abaixo (2' ou 2"):

2'. Mostre que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, toda sequência $(x_k) \in K$ possui uma subsequência que converge para um ponto de K.

2". Mostre que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se, e somente se, seu complementar $\mathbb{R}^n \setminus A$ é fechado. Conclua que um conjunto $U \subset X \subset \mathbb{R}^n$ é aberto em X se, e somente se, seu complementar $X \setminus U$ é fechado em X.

Escolha 3 das 5 questões abaixo.

3. Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e convexo. Fixe $p \in \mathbb{R}^n$, seja $\varphi : C \to \mathbb{R}$ a função definida por $\varphi(x) = |x-p| = \sqrt{\langle x-p, x-p\rangle}$. Mostre que **existe** um **único** ponto $a \in C$ tal que $\varphi(a) = \inf\{\varphi(x), x \in C\}$.

4. Mostre que todo conjunto infinito $X \subset \mathbb{R}^n$ possui um subconjunto não-compacto.

5. Seja $h : B \to \mathbb{R}^n$ o homeomorfismo de $B(0,1)$ em $\mathbb{R}^n$ dado por $h(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$. Fixado $a \in \mathbb{R}^n$, seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a translação $T(x) = x + a$. Mostre que $\phi = h^{-1} \circ T \circ h : B(0,1) \to B(0,1)$ é um homeomorfismo. Além disso, prove que $\forall b \in fr\, B(0,1)$, temos $\lim\limits_{x\to b} \phi(x) = b$. Conclua que, $\forall c, d \in B(0,1)$, existe um homeomorfismo $\overline{\phi} : B[0,1] \to B[0,1]$, tal que $\overline{\phi}(c) = d$ e $\overline{\phi}(x) = x$, para todo $x \in fr\, B(0,1)$.

6. Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é *totalmente desconexo* se $\forall x, y \in X$, existe uma cisão $X = A \cup B$, onde $x \in A$ e $y \in B$. Mostre que todo subconjunto enumerável do $\mathbb{R}^n$ é totalmente desconexo.

7. Mostre que $X = \{(x, \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)); x \in (0,1)\}$ é conexo por caminhos, mas $\overline{X}$ não é.

Bônus. Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, e $(0,0)$ um ponto interior de $A \cup \{(0,0)\}$. Mostre que se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = b \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{x\to 0} \liminf_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \limsup_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \liminf_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \limsup_{x\to 0} f(x,y) = b.$$

Obs.: Note que $\liminf_{y\to 0} f(x,y)$ e $\limsup_{y\to 0} f(x,y)$ não precisam ser finitos para todos os valores de x, e analogamente para $\liminf_{x\to 0} f(x,y)$ e $\limsup_{x\to 0} f(x,y)$.