UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Análise Real

Professor: Alexandre de Bustamante Simas
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 9

Observações: Quando o exercício pedir exemplos, é necessário demonstrar todas as afirmações feitas.

Exercícios

1. Prove o teorema do valor médio para integrais: Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto compacto e conexo Jordan-mensurável, com $v(K) > 0$. Seja $f : K \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que existe $p \in K$ tal que

$$f(p) = \frac{1}{v(K)} \int_K f.$$

2. Seja T uma matriz ortogonal $n \times n$, e defina a função $h(x) = Tx + p$, onde $p \in \mathbb{R}^n$ é constante. Se S é um conjunto Jordan-mensurável, defina $M = h(T)$, e mostre que $v(M) = v(T)$. Ou seja, mostre que matrizes ortogonais preservam volume.

3. a) Suponha que $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e não-negativa. Mostre que $\int_{(0,1)} f$ existe se, e somente se, o limite $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f$ existe.

b) Seja $A_n = [1 - 1/2^n, 1 - 1/2^{n+1}]$. Suponha que $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ satisfaz $\int_{A_n} f = (-1)^n/n$ e $f(x) = 0$ se $x \notin \cup_n A_n$. Mostre que $\int_{(0,1)} f$ não existe, mas $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{(\varepsilon, 1-\varepsilon)} f = \log(2)$.

4. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e seja $g : A \to \mathbb{R}^n$ injetiva, de classe C^1. Use o teorema de Sard para mostrar que se $g(B)$ é Jordan-mensurável, onde $B = \{x \in A; \det g'(x) = 0\}$, então, vale o teorema da mudança de variáveis para esta função g.

5. a) Seja $B_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq r^2\}$ e $C_r = [-r,r]^2$. Mostre que

$$\int_{B_r} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \pi(1 - e^{-r^2})$$

e

$$\int_{C_r} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \left[\int_{-r}^{r} e^{-x^2} dx\right]^2.$$

b) Prove que

$$\lim_{r \to \infty} \int_{B_r} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \lim_{r \to \infty} \int_{C_r} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy,$$

e conclua que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

6. Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Suponha que existe $a \in U$, tal que $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo. Mostre que

$$\lim_{r \to 0} \frac{v(f(B[a;r]))}{v(B[a;r])} = |\det f'(a)|,$$

e mostre que se $f'(a)$ não for um isomorfismo, então

$$\lim_{r \to 0} \frac{v(f(B[a;r]))}{v(B[a;r])} = 0.$$