UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Análise Real

Professor: Alexandre de Bustamante Simas
E-mail: alexandre@mat.ufpb.br / Home page: http://www.mat.ufpb.br/∼alexandre/

Lista 8

Observações: Quando o exercício pedir exemplos, é necessário demonstrar todas as afirmações feitas.

Exercícios

1. (Propriedades da Integral): Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um retângulo fechado. Sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções integráveis.

a) Para qualquer partição P de A, e S subretângulo de P, mostre que

$$m_S(f) + m_S(g) \leq m_S(f+g) \;\text{ e }\; M_S(f+g) \leq M_S(f) + M_S(g),$$

e conclua que

$$L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P) \;\text{ e }\; U(f+g,P) \leq U(f,P) + U(g,P).$$

b) Prove a linearidade da integral: sejam c, d constantes, temos que

$$\int_A (cf + dg) = c \int_A f + d \int_A g.$$

c) Prove que se $f \leq g$, então

$$\int_A f \leq \int_A g.$$

d) Mostre que $|f|$ é integrável e vale

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|.$$

e) Seja P uma partição de A, mostre que f é integrável se, e somente se, para cada subretângulo S de P, a função $f|_S$, f restrita ao conjunto S, é integrável, e que neste caso, temos

$$\int_A f = \sum_S \int_A f|_S.$$

2. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função integrável, onde $A \subset \mathbb{R}^m$ é um retângulo. Se $f = g$, exceto em um número finito de pontos, mostre que g é integrável e que vale $\int_A f = \int_A g$.

3. Demonstre que $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ não tem conteúdo nulo, se para todo i, temos $a_i < b_i$.

4. Demonstre que um conjunto ilimitado não pode ter conteúdo nulo. Use este fato para construir um exemplo de um conjunto fechado, de medida nula, cujo conteúdo não é nulo.

5. Demonstre que a fronteira de um conjunto de conteúdo nulo, tem conteúdo nulo. Use este fato para construir um exemplo de um conjunto limitado, de medida nula cuja fronteira não tem medida nula.

6. Mostre que o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função não-decrescente $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tem medida nula. Conclua que toda função não-decrescente $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável.

7. Demonstre que se $f, g : A \to \mathbb{R}$ são integráveis, onde $A \subset \mathbb{R}^m$ é um retângulo fechado. Então $f \cdot g$ é integrável.

8. Mostre que se C tem conteúdo nulo, então $C \subset A$, para algum retângulo fechado A, tem-se que C é Jordan-mensurável, e $\int_A \chi_C = 0$. Em contraste, construa um exemplo de um conjunto C de medida nula, para o qual $\int_A \chi_C$ não está definida para nenhum retângulo fechado A que satisfaça $C \subset A$.

9. Seja C um conjunto de medida nula. Mostre que se existir $\int_A \chi_C$, então, necessariamente, $\int_A \chi_C = 0$. Dica: Use o exercício 3 para mostrar que para qualquer partição P do retângulo A, temos que $L(f, P) = 0$.

10. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ não-negativa, onde $A \subset \mathbb{R}^m$ é um retângulo fechado. Se $\int_A f = 0$, mostre que o conjunto $\{x \in A; f(x) \neq 0\}$ tem medida nula.

11. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função não-negativa e integrável. Defina $A_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, \ \text{ e } \ 0 \leq y \leq f(x)\}$. Mostre que A_f é Jordan-mensurável e que sua área vale $\int_a^b f$.

12. Seja $f : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que

$$\int_a^b \int_a^y f(x, y)dxdy = \int_a^b \int_x^b f(x, y)dydx.$$

Dica: Calcule $\int_C f$ de duas formas diferentes, onde C é um conjunto conveniente.

13. Use o teorema de Fubini para dar uma demonstração simples de que $\partial^2 f/\partial x\partial y = \partial^2 f/\partial y\partial x$, se estas derivadas parciais são contínuas. Dica: Note que se $\partial^2 f(a)/\partial x\partial y - \partial^2 f(a)/\partial y\partial x > 0$, então existirá um retângulo A contendo a, tal que $\partial^2 f/\partial x\partial y - \partial^2 f/\partial y\partial x > 0$ em A.

14. Sejam $A = [a_1, b_1] \times \cdots [a_m, b_m]$ e $f : A \to \mathbb{R}$ contínua. Defina $F : A \to \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \int_{[a_1,x_1]\times\cdots\times[a_m,x_m]} f.$$

Calcule $\partial F(x)/\partial x_i$, para x no interior de A.

15. (Regra de Leibniz) Seja $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ contínua e suponha que $\partial f/\partial y$ é contínua. Defina $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$. Prove que

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx.$$

Dica: $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \left(\int_c^y \partial f(x, y)/\partial y dy + f(x, c)\right) dx$. Note que a hipótese de continuidade de $\partial f/\partial y$ pode ser enfraquecida.