UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Cálculo Avançado

Professor: Alexandre de Bustamante Simas
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 7

Exercícios

1. Calcule $\int_B f$, sendo:

a) $f(x,y) = x\cos(y)$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, x^2 \leq y \leq \pi\}$;

b) $f(x,y) = xy$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 2; y \leq x; x \geq 0\}$;

c) $f(x,y) = x$ e B o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ e $(2,0)$;

d) $f(x,y) = x + y$ e B a região formada entre os gráficos das funções $y = x$ e $y = e^x$, com $0 \leq x \leq 1$;.

2. Inverta a ordem de integração:

$$a) \int_1^e \int_{\ln x}^x f(x,y)dydx; \qquad b) \int_0^1 \int_{x^2}^1 f(x,y)dydx;$$
$$c) \int_0^{\pi/4} \int_{\mathrm{sen}(x)}^{\cos(x)} dydx; \qquad d) \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx.$$

3. Calcule:

a) $\int_B x^2 + 2y$, onde B é o círculo $x^2 + y^2 \leq 4$;

b) $\int_B \frac{\sqrt[3]{y-x}}{1+y+x}$, onde B é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

c) $\int_B \sqrt{x^2+y^2}$, onde B é o quadrado $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.

4. Calcule:

a) $\int_B x$, onde B é o conjunto $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $x + y \leq z \leq x + y + 1$;

b) $\int_B 1$, onde B é o conjunto $x^2 + y^2 \leq z \leq 2x$;

c) $\int_B \sqrt{1-z^2}$, onde B é o conjunto $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ e $0 \leq y \leq z$.

5. Verifique que

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

onde B é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$, γ é a fronteira de B orientada no sentido anti-horário, $P(x,y) = x^2 - y$ e $Q(x,y) = x^2 + y$.

6. Seja B o triângulo da questão anterior e γ a fronteira de B orientada no sentido anti-horário. Verifique que

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

onde P e Q são de classe C^1 num aberto Ω contendo B.

Dica: Calcule $\int_B \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$ fixando y inicialmente e calcule $-\int_B \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$ fixando x inicialmente. Compare, em seguida, com as integrais $\int_\gamma Qdy$ e $\int_\gamma Pdx$.

7. Verifique a relação do exercício anterior supondo B o quadrado de vértices $(-1,-1), (1,-1), (1,1)$ e $(-1,1)$, com γ a fronteira orientada de B no sentido anti-horário.

8. O campo abaixo é conservativo?

a) $F(x,y) = (y,x)$;

b) $F(x,y,z) = (x-y, x+y+z, z^2)$;

c) $F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

9. Calcule:

a) $\int_\gamma ydx + xdy$, onde γ é uma curva C^1, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, com $\gamma(0) = (1,1)$ e $\gamma(1) = (2,2)$;

b) $\int_\gamma ydx + x^2dy$, onde γ é uma curva C^1, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, com $\gamma(0) = (1,1)$ e $\gamma(1) = (2,2)$;

10. (*Teorema de Green para círculos*): Seja B o círculo de centro na origem e raio r. Seja $\gamma(y) = (r\cos(t), r\text{sen}(t)), 0 \le t \le 2\pi$. Suponha que P e Q sejam C^1 num aberto Ω contendo B. Prove que

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

11. Usando o teorema de Green (obtido na questão anterior), transforme a integral de linha

$$\int_\gamma (x^4 - y^3)dx + (x^3 + y^5)dy$$

numa integral dupla e a calcule, onde γ é dada por $\gamma(t) = (\cos(t), \text{sen}(t)), 0 \le t \le 2\pi$.