UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Análise Real

Professor: Alexandre de Bustamante Simas
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 7

Observações: Quando o exercício pedir exemplos, é necessário demonstrar todas as afirmações feitas.

Exercícios

Definição: Dados $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, uma aplicação $f : X \to Y$ diz-se aberta quando, para cada $A \subset X$ aberto em X, sua imagem $f(A)$ é um subconjunto aberto em Y.

1. Mostre que um difeomorfismo local é uma aplicação aberta.

2. Se J é um intervalo aberto da reta, mostre que toda aplicação contínua aberta $f : J \to \mathbb{R}$ é injetiva. Conclua que todo difeomorfismo local $f : J \to \mathbb{R}$ é um difeomorfismo de J sobre $f(J)$.

3. Sejam $F \subset \mathbb{R}^m$ um subconjunto fechado e $T \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto qualquer. Suponha dada uma aplicação $\varphi : F \times T \to F$ contínua em relação à segunda variável e tal que, para um certo λ, com $0 < \lambda < 1$, vale $|\varphi(x,t) - \varphi(y,t)| \leq \lambda|x - y|$, sejam quais forem $x, y \in F$ e $t \in T$. Mostre que existe uma aplicação contínua $\alpha : T \to F$ tal que $\varphi(\alpha(t), t) = \alpha(t)$ qualquer que seja $t \in T$.

4. Resolva os itens abaixo:

a) Seja $B = B[x_0, \delta]$ a bola *fechada* de centro x_0 e raio δ em $\mathbb{R}^m$. Seja $f : B \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação tal que, para quaisquer $x, y \in B$, temos $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$, onde λ é uma constante, com $0 \leq \lambda < 1$. Se $|f(x_0) - x_0| < (1 - \lambda)\delta$, então existe um único ponto $a \in B$ tal que $f(a) = a$.

b) Mostre que o mesmo resultado continua válido se tomarmos B como a bola *aberta* de centro x_0 e raio δ. Entretanto, se soubermos (além do fato de que f é uma contração) apenas que $|f(x_0) - x_0| \leq (1 - \lambda)\delta$; então vale o resultado somente para bola fechada.

c) Conclua que, se $\varphi : B \times T \to \mathbb{R}^m$ é contínua em $T \subset \mathbb{R}^n$, se, para um certo $\lambda \in [0, 1)$, vale $|\varphi(x,t) - \varphi(y,t)| \leq \lambda|x - y|$, qualquer que seja $t \in T$ e se, para todo $t \in T$, temos $|\varphi(x_0, t) - x_0| < (1 - \lambda)\delta$, então existe uma única aplicação contínua $\alpha : T \to B$, tal que $\varphi(\alpha(t), t) = \alpha(t)$, para todo $t \in T$.

Obs: Neste enunciado, B é a bola – aberta ou fechada – de centro x_0 e raio δ.

5. Seja $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma contração. Prove que a aplicação $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, dada por $f(x) = x + \varphi(x)$, é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^m$ *sobre* si mesmo.

6. Seja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^k (k \geq 1)$, tal que $|g'(x)| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Prove que $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, definida por $f(x) = x + g(x)$ é um difeomorfismo de classe C^k sobre um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Mostre que se para todo $x \in \mathbb{R}^m$, temos $|g'(x)| \leq \alpha < 1$, então f é sobrejetiva. Finalmente, dê um contra-exemplo para mostrar que esta última condição não pode ser dispensada se quisermos concluir que f é sobre $\mathbb{R}^m$.

Definição: O *posto* de uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é a dimensão de sua imagem $T \cdot \mathbb{R}^m$. O *posto* de uma aplicação diferenciável $f : U \to \mathbb{R}^n$ num ponto $x \in U$ é, por definição, o posto de sua derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Assim, as imersões e submersões são chamadas aplicações de posto máximo.

7. Se $U \subset \mathbb{R}^4$ é aberto e $f : U \to \mathbb{R}^3$ tem posto 3 em todos os pontos de U, então mostre que $|f(x)|$ não assume valor máximo para $x \in U$.

8. Se $U \subset \mathbb{R}^{m+p}$ é aberto, e $f : U \to \mathbb{R}^m$ é uma submersão de classe $C^k (k \geq 1)$, e $g : f(U) \to \mathbb{R}^n$ é tal que $g \circ f : U \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^k, então mostre que g é de classe C^k.

9. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva, tal que $\int_0^1 f(t)dt = 3$. Mostre que, para cada x num certo intervalo $[0, \delta]$, existe um único $\xi(x) \in [0, 1]$, tal que $\int_x^{\xi(x)} f(t)dt = 2$ e que a função $\xi : [0, \delta] \to [0, 1]$ assim definida é de classe C^1 no intervalo $(0, \delta)$. Calcule a derivada $\xi'(x)$.

10. O conjunto das matrizes simétricas é um espaço vetorial E de dimensão $\dfrac{m(m+1)}{2}$. Seja $U \subset E$ formado pelas matrizes positivas definidas. Mostre que U é aberto e convexo, e que $f : U \to E$ dada por $f(X) = X^2$, é um difeomorfismo de U sobre si mesmo. Faça o mesmo para $f(X) = X^k, k \in \mathbb{N}$.

11. Mostre que a aplicação $f : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, definida por $f(X) = X^2$, é um difeomorfismo de uma vizinhança da identidade sobre outra vizinhança da identidade, mas não é sobre $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ nem é um difeomorfismo local em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$.

12. Mostre que todo ponto $z = (x, y)$ do círculo $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ é centro de um disco aberto B tal que $B \cap S^1$ é o gráfico de uma função $y = f(x)$ ou de uma função $x = g(y)$. Prove este fato, ache as funções, os pontos onde só se pode ter $y = f(x)$ e os pontos onde deve ser $x = g(y)$. Generalize para a esfera $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m; \langle x, x \rangle = 1\}$.

13. Seja $f : \mathbb{R}^{m+p} \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1. Suponha que $f(x_0) = 0$ e que $f'(x_0)$ tem posto m. Mostre que se c é um ponto de $\mathbb{R}^m$ suficientemente próximo de 0, então a equação

$$f(x) = c$$

tem solução.