UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Cálculo Avançado

Professor: Alexandre de Bustamante Simas
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 6

Exercícios

1. Suponha que para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $\det(a_{i,j}) \neq 0$. Suponha ainda que tenhamos funções diferenciáveis $b_1, \ldots, b_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Denote por

$$s_1, \ldots, s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

as (únicas) soluções do sistema de equações

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}(t) s_j(t) = b_i(t), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Primeiro mostre que, de fato, as soluções $(s_1, \ldots, s_n)$ são únicas. Em seguida mostre, usando o teorema da função implícita, que as soluções $s_1, \ldots, s_n$ são diferenciáveis e determine $s_i'(t)$.

Dica: Defina $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cujas coordenadas são

$$f_i(t, y) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}(t) y_j \right) - b_i(t).$$

Aplique o teorema da função implícita para f.

2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1. Escreva f na forma $f(x, y)$, onde $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^2$. Assuma que $f(3, -1, 2) = 0$ e que

$$Df(3, -1, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que existe uma função $g : B \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 definida num aberto $B \subset \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, g(x)) = 0,$$

para $x = 3$ e $g(3) = (-1, 2)$.

b) Encontre $Dg(3)$.

3. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 com $F(0,0) = 0$ e $DF(0,0) = [2, 3]$. Seja $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida pela equação

$$G(x, y, z) = F(x + 2y + 3z - 1, x^3 + y^2 - z^2).$$

a) Note que $G(-2, 3, -1) = F(0, 0) = 0$. Mostre que é possível resolver a equação $G(x, y, z) = 0$, para z, digamos $z = g(x, y)$, para (x, y) num aberto B contendo $(-2, 3)$, tal que $g(-2, 3) = -1$.

b) Encontre $Dg(-2,3)$.

5. Seja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 com $f(-1,2)=-1$. Faça

$$G(x,y,z) = f(x,y) + u^2,$$

e

$$H(x,y,z) = 3x^3 + uy + u^3.$$

As equações $G(x,y,z)=0$ e $H(x,y,z)=0$ têm a solução $(x,y,u)=(-1,2,1)$.

a) Que condições em Df garantem que existe $g: B \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, onde $B \subset \mathbb{R}$ é aberto, tais que $(y,u)=g(x)$ satisfaz $G(x,g(x))=0$ e $H(x,g(x))=0$ simultaneamente, com $g(-1)=(2,1)$?

b) Sob as condições da letra a), e assumindo que $Df(2,-1)=[1,-3]$, encontre $Dg(-1)$.