UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Análise Real

Professor: Alexandre de Bustamante Simas
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 6

Observações: Quando o exercício pedir exemplos, é necessário demonstrar todas as afirmações feitas.

Exercícios

1. Seja $0 < a < 1$. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + x^2\text{sen}(1/x)$ quando $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ é derivável e $f'(0) = a$. Assim, $f'(0)$ é injetiva. Entretando f não é injetiva em nenhuma vizinhança de zero.

2. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto conexo. Se $f : U \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável e $f'(x) = T$ (constante) para todo $x \in U$ então mostre que existe $a \in \mathbb{R}^m$ tal que $f(x) = T \cdot x + a$.

3. Enuncie precisamente e demonstre o seguinte: se uma função de duas variáveis possui derivadas parciais limitadas na vizinhança de um ponto, ela é contínua neste ponto. Generalize este resultado.

4. Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, mostre que uma função $f : U \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞ se, e somente se, existem e são contínuas todas as derivadas mistas:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} : U \to \mathbb{R}.$$

5. Sejam $\alpha > 1$ e $c \in \mathbb{R}$. Se $f : U \to \mathbb{R}^n$, definida no aberto e conexo $U \subset \mathbb{R}^m$, cumpre a condição $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$ para quaisquer $x, y \in U$ então f é constante em U.

6. Dados $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^m$, indicamos com $det[v_1, \dots, v_m]$ o determinante da matriz $m \times m$ cujo i-ésimo vetor coluna é v_i. O *produto vetorial* de $m-1$ vetores $v_1, \dots, v_{m-1} \in \mathbb{R}^m$ é o vetor $v = v_1 \times \cdots \times v_{m-1} \in \mathbb{R}^m$, caracterizado pelas componentes

$$v_i = \langle v, e_i \rangle = det[v_1, \dots, v_{m-1}, e_i],$$

em particular, para todo $x \in \mathbb{R}^m$,

$$\langle v, x \rangle = det[v_1, \dots, v_{m-1}, x].$$

Prove que:

a) A aplicação $(v_1, \dots, v_{m-1}) \mapsto v_1 \times \cdots \times v_{m-1}$ é $(m-1)$-linear.

b) $v = v_1 \times \cdots \times v_{m-1}$ é perpendicular aos vetores $v_1, \dots, v_{m-1}$.

7. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Se uma aplicação $\varphi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$, de classe C^2, é um homeomorfismo de U sobre $M = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{m+1}$, e sua derivada $\varphi'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ é injetiva em todos os pontos $x \in U$, o conjunto M chama-se uma *superfície local*. Para cada $x \in U$, o espaço vetorial $E_x = \varphi'(x) \cdot \mathbb{R}^m$ chama-se o *espaço tangente* a M no ponto $\varphi(x)$. Seja agora $\nu : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma aplicação de classe C^1 tal que $|\nu(x)| = 1$ e $\nu(x) \perp E_x$ para todo $x \in U$. (Os vetores $\pm\nu(x)$ são as *normais unitárias* a M no ponto $\varphi(x)$). Podemos definir $\nu(x) = v(x)/|v(x)|$, onde $v(x)$ é o produto vetorial $v(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(x)$. Prove que, para todo $x \in U$, tem-se $\nu'(x) \cdot \mathbb{R}^m \subset E_x$ e que, para quaisquer $h, k \in \mathbb{R}^m$, vale

$$\langle \nu'(x) \cdot h, \varphi'(x) \cdot k \rangle = -\langle \nu(x), \varphi''(x) \cdot (h, k) \rangle.$$

Conclua que

$$\langle \nu'(x) \cdot h, \varphi'(x) \cdot k \rangle = \langle \nu'(x) \cdot k, \varphi'(x) \cdot h \rangle,$$

e portanto a aplicação linear $A : E_x \to E_x$, definida por $A = \nu'(x) \cdot [\varphi'(x)]^{-1}$ é auto-adjunta. Os autovalores de A são chamados as curvaturas principais da superfície local M no ponto $\varphi(x)$. O determinante de A chama-se curvatura gaussiana da superfície M no ponto $\varphi(x)$.

8. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Dado $z_0 \in U$, um ponto crítico de f, ponha $a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_0)$, $b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z_0)$ e $c = \frac{\partial f^2}{\partial y^2}(z_0)$. Exprima, em termos de a, b e c a condição para que z_0 seja não-degenerado. Admitindo-a satisfeita, obtenha condições adicionais para que z_0 seja um máximo local, um mínimo local, ou um ponto de sela.

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 \operatorname{sen}(1/x^3)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Seja $p(0, h) = 0$. Mostre que p aproxima f em ordem > 2, ou seja, mostre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(0 + h) - f(0) - p(0, h)|}{|h|^2} = 0,$$

mas que $f''(0)$ não existe.

10. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x, y) = x^2$ e $g(x, y) = x^2 + y^3$. Mostre que $f''(0, 0)$ e $g''(0, 0)$ são não-negativas definidas, e que f possui um máximo local, mas g não.

11. Uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ é dita analítica em U, quando $f \in C^\infty$ em U, e $\forall x \in U, \exists \delta > 0, |h| < \delta \Rightarrow x + h \in U$ e

$$f(x + h) = f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x) \cdot h^{(j)},$$

isto é, a série de Taylor converge, na vizinhança de cada ponto de U, para o valor de f.

a) Mostre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = e^{-1/t^2}$ se $t \neq 0$ e $f(0) = 0$ é C^∞, mas não é analítica.

b) Prove a unicidade da continuação analítica: Sejam $f, g : U \to \mathbb{R}^n$ analíticas e U conexo. Então, se existe $V \subset U$, aberto não-vazio, tal que $f|_V = g|_V$, então $f = g$.